Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Marouan Redouaby

Sur la méthode de Van der Corput pour les sommes d'exponentielles

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 13, nº 2 (2001), p. 583-607

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2001__13_2_583_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 583-607

Sur la méthode de Van der Corput pour les sommes d'exponentielles

par Marouan REDOUABY

RÉSUMÉ. Pour majorer la somme d'exponentielle

$$\sum_{m=M+1}^{2M} e(TF(m/M)),$$

où $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ est une fonction "presque monomiale", M est une entier grand et T un réel grand devant M^4, nous étudions le procédé A^kBAD, où A et B désignent comme d'habitude les transformations A et B de Van der Corput [2], et où D désigne le double grand crible appliqué dans l'esprit de Fouvry et Iwaniec [1]. Nos résultats complètent le tableau 17.1 de [5] (voir également [4]) et sont résumés dans le corollaire 2 ci-dessous.

ABSTRACT. In order to bound the exponential sum

$$\sum_{m=M+1}^{2M} e(TF(m/M)),$$

where $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ is an "almost monomial" function, M is a large integer and T is a real number larger than M^4, we study the A^kBAD process, where A et B refer to the classical A and B Van der Corput transforms [2], and D refers to the double large sieve as used by Fouvry and Iwaniec [1]. Our results complete Table 17.1 of [5] (see also [4]) and are summarized in corollary 2 below.

Introduction

Soit $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction plusieurs fois dérivable. Les sommes d'exponentielles de la forme

$$S = \sum_{m=M+1}^{2M} e(TF(m/M)), \tag{0.1}$$

avec M entier grand et T réel $\gg M$, interviennent dans de très nombreux problèmes de théorie analytique des nombres, et notamment pour majorer $\zeta(\sigma + it)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann, avec $1/2 \leq \sigma < 1$.

Manuscrit reçu le 12 mai 1999.

Lorsque T est très grand devant M (disons $T \gg M^3$ pour fixer les idées), les majorations de S obtenues jusqu'à aujourd'hui restent très éloignées du résultat conjecturé (cf. [6, conjecture 2 page 59]). La méthode de Van der Corput [2] consiste à appliquer d'abord plusieurs fois la transformation A qui a pour effet de se ramener à une somme de type $(0,1)$, mais avec un T moins grand que dans la somme originale, et de faire apparaître un paramètre ; le prix à payer est que, à chaque application de la transformation A, le gain doit être pris à la puissance un demi.

L'utilisation du paramètre de la transformation A conduit à la méthode de Van der Corput pour les sommes doubles d'exponentielles. Malgré d'énormes complications, celle-ci n'amène que de très légères améliorations dans les sommes simples d'exponentielles.

Les meilleurs résultats actuels sont obtenus à l'aide du puissant Théorème de Huxley pour les sommes simples d'exponentielles avec paramètre (cf. [4, Théorème 2] ou [5, Théorème 17.2.2], l'application aux sommes simples avec T grand étant exposés au Théorème 3 de [4] ou au Théorème 17.4.2 de [5]). Les paramètres qui apparaissent à chaque application de la transformation A sont effectivement utilisés, mais leur contribution au résultat final est faible.

Dans cet article, nous reprenons le procédé A^kB de Van der Corput. À l'aide de quelques manipulations faciles sur les paramètres de la transformation A, nous nous mettons en position pour appliquer la méthode de Fouvry et Iwaniec [1] pour les sommes multiples d'exponentielles à phase monomiale, ce qui permet une utilisation plus forte des paramètres. Nous noterons AD ce procédé, où D désigne le double grand crible au sens de la Proposition 1 de [1].

Nos résultats deviennent meilleurs que ceux de Huxley pour $T \gg M^{4.22}$ (une amélioration survient déjà lorsque T est proche de $M^{10/3}$, mais alors les résultats de [8] sont meilleurs que les nôtres). Toutefois, l'utilisation de la méthode de Fouvry et Iwaniec pour les sommes d'exponentielles à phase monomiale nous oblige à renforcer les hypothèses sur F. Nous supposons que F vérifie :

$$F^{(k-1)}(x) = Cx^\sigma + u(x) \quad \text{ou} \quad F^{(k-1)}(x) = C\log x + u(x), \qquad \text{pour } x \in [1,2], \tag{0.2}$$

avec

$$k \text{ entier},\ 2 \le k \ll 1,\ \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\},\ \sigma \ll 1 \text{ et } C \asymp 1, \tag{0.3}$$

et

$$u^{(j)}(x) \ll T^{-\theta} \text{ pour } x \in [1,2],\ 1 \le j \le 5, \tag{0.4}$$

pour un certain θ qui ne dépend que de la quantité $\log M/\log T$. Il est à noter que l'hypothèse (0.2) autorise l'application à la majoration de $\zeta(\sigma + it)$.

Dans le procédé AD, les termes non monomiaux sont éliminés par la transformation A au §2.1. Nous arrivons alors au Théorème A^kBAD énoncé et démontré au §3. Enfin, au §3.3, nous formulons le Corollaire 2 correspondant aux cas $k = 4$ et $k = 5$, ce qui complète le Tableau 17.1 de [5] pour les fonctions "presque monomiales" (i.e. les fonctions qui vérifient (0.2)).

Cependant, notre amélioration par rapport à [5] reste minime.

Nous remercions Patrick Sargos pour ses nombreux conseils, remarques et corrections.

Notations. Pour tout réel x, on pose $e(x) = e^{2\pi i x}$. Si z est un nombre complexe, $\mathrm{Re}\,(z)$ désigne sa partie réelle. Pour toute fonction g, on note g', g'', $g^{(j)}$ les dérivées d'ordre $1, 2, j$ avec $j \geq 3$. Une fonction de classe C^j est une fonction qui admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre j.

Les symboles classiques O, $\ll$, $\asymp$ sous-entendent toujours des constantes absolues. Lorsqu'ils apparaissent dans une conclusion, les constantes dépendent au plus des autres constantes absolues sous-entendues dans les hypothèses. Par contre le symbole $\ll_j$ sous-entend une constante qui peut également dépendre de j.

La relation $u \ll v$ ou $u = O(v)$ signifie qu'il existe une constante absolue C telle que $|u| \leq Cv$; $u \gg v$ signifie que u et v sont positifs et que $v \ll u$; enfin $u \asymp v$ signifie qu'on a à la fois $u \ll v$ et $u \gg v$.

Le symbole $\square$ indique la fin d'une démonstration ; s'il est placé à la fin d'un énoncé, il signifie que la démonstration ne présente pas de difficulté et qu'elle a été omise.

1. La transformation A^kB

Nous apportons quelques précisions à la transformation A^kB usuelle en vue d'une exploitation des paramètres provenant de la transformation A itérée k fois.

Après k itérations de la transformation A, la phase $f(m)$ devient :

$$2^k h_1 \cdots h_k f^{(k)}(m) + \frac{2^{k-1}}{3} h_1 \cdots h_{k-1} h_k^3 f^{(k+2)}(m) + \text{négligeable.}$$

On pose alors $l_1 = h_1 \cdots h_{k-1}$ et $l_2 = h_k$.

On applique alors la transformation B, relativement à la variable m. Il est ici important de remarquer que la nouvelle phase s'écrit sous la forme d'un terme principal plus un terme secondaire, ce dernier étant contrôlé par le Théorème 3 et le Lemme 14 de [7].

1.1. La tramsformation A^k. Soient M un réel positif ≥ 2, et $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que

$$[a,b] \subset]M, 2M]. \tag{1.1}$$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On pose

$$S = \sum_{a \leq m \leq b} e\big(f(m)\big). \tag{1.2}$$

La tranformation A de Van der Corput, remaniée par Heath-Brown [3] s'énonce comme

Lemme 1. *Sous l'hypothèse (1.1), et avec la notation (1.2), pour tout entier H tel que $2 \leq H \leq M$, nous avons :*

$$S \ll M\Big(H^{-1/2} + |S_1|^{1/2}\Big), \tag{1.3}$$

avec

$$S_1 = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H-1} \Big(1 - \frac{h}{H}\Big) S_h \tag{1.4}$$

et

$$S_h = \frac{1}{M} \sum_{a+h \leq m \leq b-h} e\big(\Delta_h f(m)\big), \tag{1.5}$$

où

$$\Delta_h f(m) = f(m+h) - f(m-h).$$

Démonstration. La majoration (1.3) découle de l'inégalité suivante (cf. [1, Lemme 5.6.2]) :

$$|S|^2 \leq M^2 \Big(\frac{9}{2} H^{-1} + 6\mathrm{Re}\,(S_1)\Big). \tag{1.6}$$

□

En utilisant une récurrence sur (1.6), on arrive au

Lemme 2 (Transformation A^k). *Soit k un entier ≥ 1. Sous l'hypothèse (1.1) et avec la notation (1.2), pour tout entier H tel que*

$$2 \leq H \leq M^{2^{1-k}}, \tag{1.7}$$

nous avons :

$$S \ll M\Big(H^{-1/2} + |S_k|^{2^{-k}}\Big), \tag{1.8}$$

avec

$$S_k = H^{1-2^k} \sum_{h_1=1}^{H_1-1} \cdots \sum_{h_k=1}^{H_k-1} \Big(1 - \frac{h_k}{H_k}\Big) S_{h_1,\dots,h_k}, \tag{1.9}$$

$$H_i = H^{2^{i-1}}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k \tag{1.10}$$

et

$$S_{h_1,\dots,h_k} = \frac{1}{M} \sum_{a+h_1+\dots+h_k \leq m \leq b-h_1-\dots-h_k} e\big(\Delta_{h_k} \cdots \Delta_{h_1} f(m)\big). \tag{1.11}$$

Remarque. En utilisant (1.6), on voit facilement que la constante sous-entendue dans le symbole $\ll$ de (1.8) peut être choisie égale à $12/\sqrt{2}$.

1.2. Une modification de la transformation A^k. Nous commençons par l'analogue du Lemme 2.7 de [2].

Soient H un entier ≥ 2, k un entier ≥ 1, et $h_1, \dots, h_k$ des entiers tels que

$$1 \leq h_i \leq H^{2^{i-1}} \text{ pour } 1 \leq i \leq K. \tag{1.12}$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+4} qui vérifie :

$$|f^{(k+4)}(x)| \leq \lambda_{k+4}, \text{ pour } x \in [a, b], \tag{1.13}$$

où λ_{k+4} désigne un réel positif.

Lemme 3. *Sous les hypothèses (1.12) et (1.13), on a pour tout* $m \in [a + h_1 + \dots + h_k, b - h_1 - \dots - h_k]$

$$\Delta_{h_k} \cdots \Delta_{h_1} f(m) = h_1 \cdots h_k \times \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} f^{(k)}(m + \mathbf{h} \cdot \mathbf{t}) dt_1 \cdots dt_k, \tag{1.14}$$

avec $\mathbf{h} \cdot \mathbf{t} = h_1 t_1 + \dots + h_k t_k$. *En particulier on a :*

$$\Delta_{h_k} \cdots \Delta_{h_1} f(m) = 2^k h_1 \cdots h_k f^{(k)}(m) + \frac{2^{k-1}}{3} h_1 \cdots h_k (h_1^2 + \dots + h_k^2) f^{(k+2)}(m) + E, \tag{1.15}$$

avec

$$E \ll_k H^{3 \cdot 2^k - 1} \lambda_{k+4}. \tag{1.16}$$

Le lemme suivant est également un classique.

Lemme 4 (Sommation d'Abel multiple). *Soient k un entier ≥ 1 et $M_1, \dots, M_k$ des réels positifs ≥ 1. Soit $\Omega_k = [N_1, N_1'] \times \dots \times [N_k, N_k']$ un pavé de $\mathbb{R}^k$ tel que*

$$\Omega_k \subset [M_1, 2M_1] \times \dots \times [M_k, 2M_k].$$

Soit $\psi : \Omega_k \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^k qui vérifie :

$$\psi(x_1, \dots, x_k) \ll 1, \quad \frac{\partial^r \psi}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(x_1, \dots, x_k) \ll \frac{T}{M_{i_1} \cdots M_{i_r}}, \tag{1.17}$$

pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_k$ *et tout sous-ensemble non vide* $\{i_1, \dots, i_r\}$ *de* $\{1, \dots, k\}$, *et où* T *désigne un réel positif. Soit enfin* $\big(a_{n_1,\dots,n_k}\big)_{(n_1,\dots,n_k)\in\Omega_k}$ *une suite quelconque de nombres complexes. Alors il existe un pavé* $\Omega'_k = [N_1, N''_1] \times \cdots \times [N_k, N''_k]$ *de* $\mathbb{R}^k$ *tel que* $\Omega'_k \subset \Omega_k$, *pour lequel on ait*

$$\sum_{(n_1,\dots,n_k)\in\Omega_k} a_{n_1,\dots,n_k}\psi(n_1,\dots,n_k) \ll_k (1+T)\Big|\sum_{(n_1,\dots,n_k)\in\Omega'_k} a_{n_1,\dots,n_k}\Big|. \tag{1.18}$$

Désormais, dans ce qui suit, k désigne un entier ≥ 2 ; l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est défini comme en (1.1).

On suppose que la fonction-phase f de (1.2) est de classe C^{k+4}, et qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{gathered} 0 < \lambda \leq |f^{(k+2)}(x)| \ll \lambda, \quad |f^{(k+3)}(x)| \ll \frac{\lambda}{M}, \\ \text{et } |f^{(k+4)}(x)| \leq C_0 \frac{\lambda}{M^2}, \end{gathered} \tag{1.19}$$

pour tout $x \in [a, b]$, où C_0 désigne une constante positive.

Soit enfin un entier $H \geq 2$ tel que

$$H^{2^{k-1}} \leq \min\big(1, \sqrt{3C_0^{-1}}\big)M, \quad H \leq M^2\lambda, \quad H \ll \lambda^{1/(1-3\cdot 2^{k-1})}. \tag{1.20}$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 5. *Sous les hypothèses (1.1), (1.19) et (1.20), et avec la notation (1.2), il existe cinq entiers positifs* L_1, L'_1, L_2, L'_2 *et* b_1 *tels que :*

$$\begin{gathered} 1 \leq L_1 \leq L'_1 \leq H^{2^{k-1}-1}, \quad 1 \leq L_2 \leq L'_2 \leq H^{2^{k-1}}, \quad a \leq b_1 \leq b \\ L'_1 \leq 2^{k-1}L_1, \quad L'_2 \leq 2L_2, \end{gathered} \tag{1.21}$$

pour lesquels nous avons :

$$S \ll_{\varepsilon,k} M\Big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_k(H) + M^{\varepsilon} S_k^{2^{-k}}\Big), \quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0, \tag{1.22}$$

avec

$$\mathcal{L}_k(H) = H^3\Big(\frac{\lambda}{HM^2}\Big)^{2^{-k}} + H\Big(\frac{\lambda}{HM^2}\Big)^{2^{-k-1}}, \tag{1.23}$$

$$S_k = \frac{1}{H^{2^k-1}} \sum_{l_1=L_1}^{L'_1} \Big| \sum_{l_2=L_2}^{L'_2} S_{l_1,l_2} \Big| \tag{1.24}$$

et

$$S_{l_1,l_2} = \frac{1}{M} \sum_{a \le m \le b_1} e\Big(2^k l_1 l_2 f^{(k)}(m) + \frac{2^{k-1}}{3} l_1 l_2^3 f^{(k+2)}(m)\Big). \tag{1.25}$$

Démonstration. **a)** On commence par appliquer le Lemme 2 à la somme S. En vue du Lemme 3, en écrivant $e(E) = 1 + O(E)$, on obtient :

$$S \ll_k M\left(H^{-1/2} + H^3\Big(\frac{\lambda}{HM^2}\Big)^{2^{-k}} + |S_k|^{2^{-k}}\right) \tag{1.26}$$

avec

$$S_k = \frac{1}{H^{2^k-1}} \sum_{h_1=1}^{H-1} \cdots \sum_{h_k=1}^{H^{2^{k-1}}-1} S_{h_1,\dots,h_k}, \tag{1.27}$$

$$S_{h_1,\dots,h_k} = \frac{1}{M} \sum_{a+h_1+\dots+h_k \le m \le b-h_1-\dots-h_k} \psi(h_1,\dots,h_k,m) \times e\big(\varphi(h_1,\dots,h_k,m)\big), \tag{1.28}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \psi(h_1,\dots,h_k,m) &= \Big(1 - \frac{h_k}{H^{2^{k-1}}}\Big) \\ &\quad \times e\Big(\frac{2^{k-1}}{3} h_1 \cdots h_k (h_1^2 + \dots + h_{k-1}^2) f^{(k+2)}(m)\Big) \\ \varphi(h_1,\dots,h_k,m) &= 2^k h_1 \cdots h_k f^{(k)}(m) \\ &\quad + \frac{2^{k-1}}{3} h_1 \cdots h_{k-1} h_k^3 f^{(k+2)}(m). \end{aligned} \tag{1.29}$$

b) On écrit :

$$S_{h_1,\dots,h_k} = \frac{1}{M}\Big(\sum_{a \le m \le b} - \sum_{a \le m < a+h_1+\dots+h_k} - \sum_{b-h_1+\dots-h_k < m \le b}\Big) \times \psi(h_1,\dots,h_k,m) e\big(\varphi(h_1,\dots,h_k,m)\big).$$

Avec la sommation d'Abel pour sortir la fonction-poids ψ, suivie par l'inégalité de Van der Corput ([2, Théorème 2.2]) sur les deux dernières sommes, sachant que sous l'hypothèse $H^{2^k-1} \le \sqrt{3C_0^{-1}M}$, on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(h_1,\dots,h_k,x) \asymp_k h_1 \cdots h_k \lambda,$$

on obtient :

$$S \ll_k M\Big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_k(H) + |S_k|^{2^{-k}}\Big), \tag{1.30}$$

avec S_k donnée par (1.27) et

$$S_{h_1,\ldots,h_k} = \frac{1}{M} \sum_{a\le m\le b} \psi(h_1,\ldots,h_k,m)e\big(\varphi(h_1,\ldots,h_k,m)\big). \tag{1.31}$$

c) Transformation de S_k. On commence par découper les intervalles de sommation $[1, H^{2^{i-1}-1}]$, $1 \le i \le k$, en intervalles diadiques ; et on utilise la sommation d'Abel multiple (Lemme 4) pour sortir la fonction-poids ψ. Sous l'hypothèse $H \ll \lambda^{1/(1-3\cdot 2^{k-1})}$, la variation totale de ψ par rapport aux $k+1$ variables $h_1 \ldots, h_k, m$ est $\ll 1$. On en déduit qu'il existe des entiers $\tilde{l}_i$, $\tilde{l}'_i$ $(1 \le i \le k)$ et b_1 tels que

$$1 \le \tilde{l}_i \le \tilde{l}'_i \le H^{2^{i-1}}, \quad \tilde{l}'_i \le 2\tilde{l}_i \text{ pour } 1 \le i \le k, \text{ et } a \le b_1 \le b,$$

pour lesquels on ait

$$S_k \ll_k \frac{(\log H)^k}{H^{2^k-1}} \Big| \sum_{h_1=\tilde{l}_1}^{\tilde{l}'_1} \cdots \sum_{h_k=\tilde{l}_k}^{\tilde{l}'_k} S_{h_1,\ldots,h_k} \Big| \tag{1.32}$$

et

$$S_{h_1,\ldots,h_k} = \frac{1}{M} \sum_{a\le m\le b} e\big(\varphi(h_1,\ldots,h_k,m)\big).$$

Finalement on pose $l_1 = h_1 \cdots h_{k-1}$, $l_2 = h_k$, et on écrit :

$$\sum_{h_1=\tilde{l}_1}^{\tilde{l}'_1} \cdots \sum_{h_k=\tilde{l}_k}^{\tilde{l}'_k} S_{h_1,\ldots,h_k} = \sum_{h_1=\tilde{l}_1\cdots\tilde{l}_{k-1}}^{\tilde{l}'_1\cdots\tilde{l}'_{k-1}} \chi(l_1) \sum_{l_2=\tilde{l}_k}^{\tilde{l}'_k} S_{l_1,l_2},$$

avec $\chi(l_1) = 1$ si $k = 2$, $\chi(l_1) = \sum_{h_1\cdots h_{k-1}=l_1} 1$ si $k \ge 3$, et

$$S_{l_1,l_2} = \frac{1}{M} \sum_{a\le m\le b} e\Big(2^k l_1 l_2 f^{(k)}(m) + \frac{2^{k-1}}{3} l_1 l_2^3 f^{(k+2)}(m)\Big).$$

Nous avons la majoration $\chi(l_1) \ll_{\varepsilon,k} M^\varepsilon$. En majorant $\log H$ par M^ε aussi et en posant $L_1 = \tilde{l}_1 \cdots \tilde{l}_{k-1}$, $L'_1 = \tilde{l}'_1 \cdots \tilde{l}'_{k-1}$, $L_2 = \tilde{l}_k$, $L'_2 = \tilde{l}'_k$, on arrive à

$$\begin{aligned} S_k \ll_{\varepsilon,k} \frac{M^\varepsilon}{MH^{2^k-1}} \sum_{l_1=L_1}^{L'_1} \\ \times \Big| \sum_{l_2=L_2}^{L'_2} \sum_{a\le m\le b_1} e\Big(2^k l_1 l_2 f^{(k)}(m) + \frac{2^{k-1}}{3} l_1 l_2^3 f^{(k+2)}(m)\Big) \Big|. \end{aligned} \tag{1.33}$$

En remplaçant S_k dans (1.30) par le membre de droite de (1.33), on arrive à (1.22). □

1.3. Le Lemme A^kB. Dans la somme obtenue au Lemme 5 (i.e. le Lemme A^k) nous devons maintenant appliquer la transformation B par rapport à la variable m. Pour formuler le résultat de façon précise, nous nous plaçons sous l'hypothèse où f est "semi-monomiale".

Soit donc $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+5} avec $k \geq 2$ entier telle que

$$F^{(k-1)}(t) = Ct^\sigma + u_0(t), \text{ pour } 1 \leq t \leq 2, \tag{1.34}$$

avec $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ et avec la convention $t^\sigma = \log t$ si $\sigma = 0$, où C est un réel strictement positif et où on a

$$|u_0^{(j)}(t)| \leq \eta |(Ct^\sigma)^{(j)}|, \text{ pour } 1 \leq t \leq 2 \text{ et } 1 \leq j \leq 5, \tag{1.35}$$

η désignant un réel positif suffisamment petit.

Soient M et T deux réels positifs grands tels que

$$M^{k+2^{-k}} \leq T \leq M^{k+2}. \tag{1.36}$$

On pose

$$f(x) = TF\Big(\frac{x}{M}\Big), \text{ pour } x \in [a,b], \text{ avec } [a,b] \subset]M, 2M]. \tag{1.37}$$

Soit enfin un entier $H \geq 2$ tel que

$$H \leq M^{2^{1-k}}, \quad H \leq TM^{-k} \tag{1.38}$$

et

$$\Big(\frac{T}{M^{k+1}}\Big)^{1/(1-2^k)} \leq H \leq \Big(\frac{T}{M^{k+2}}\Big)^{1/(1-3\cdot 2^{k-1})}. \tag{1.39}$$

Nous avons alors le

Lemme 6 (Lemme A^kB). *Sous les hypothèses (1.34) à (1.39), et avec la notation (1.2), il existe deux constantes positives non nulles D_1 et D_2 qui dépendent uniquement de C et σ telles que si*

$$H^{2^{k-1}} \leq D_1 \text{ et } \eta \leq D_2, \tag{1.40}$$

alors on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} & M^{1+\varepsilon-2^{-k}} \\ & + M^{1+\varepsilon}\Big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_{k,\eta}(H) + (M^kT^{-1})^{2^{-k-1}}\mathcal{S}_k^{2^{-k}}\Big), \end{aligned} \tag{1.41}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,\eta}(H) = & H^3\Big(\frac{T}{HM^{k+4}}\Big)^{2^{-k}} + H\Big(\frac{T}{HM^{k+4}}\Big)^{2^{-k-1}} \\ & + H^{1/2}\Big(\frac{\eta^2 T}{HM^{k+2}}\Big)^{2^{-k-1}} + H^{3/2}\Big(\frac{\eta^4T^3}{H^3M^{3k+2}}\Big)^{2^{-k-1}}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$S_k = \frac{1}{H^{2^k-1} L_1^{1/2} L_2^{1/2}} \sum_{l_1=L_1}^{L_1'} \sum_{m^*=N_{l_1}}^{N_{l_1}'} |S_{l_1,m^*}|, \tag{1.43}$$

L_1, L_1 et L_2 sont définis en (1.21) ; pour $l_1 \in [L_1, L_1']$, l'intervalle $[N_{l_1}, N_{l_1}']$ est contenu dans $[D_3 l_1 L_2 T M^{-k-1}, D_4 l_1 L_2 T M^{-k-1}]$ où D_3 et D_4 sont deux constantes dépendant uniquement de k, C et σ vérifiant $0 < D_3 \leq D_4$, et

$$S_{l_1,m^*} = \sum_{l_2 \in I_{l_1,m^*}} e\big(C_1 l_1^{1/(2-\sigma)} l_2^{1/(2-\sigma)} m^{*(1-\sigma)/(2-\sigma)} + \phi(l_1, l_2, m^*)\big), \tag{1.44}$$

où I_{l_1,m^*} est un intervalle contenu dans $[L_2, 2L_2]$, pour tout $l_1 \in [L_1, L_1']$ et tout $m^* \in [N_{l_1}, N_{l_1}']$,

$$\begin{aligned}\phi(l_1, l_2, m^*) = {}& C_2 l_1^{1/(\sigma-2)} l_2^{(2\sigma-3)/(\sigma-2)} m^{*(\sigma-3)/(\sigma-2)} \\ &+ C_3 l_1 l_2 u_0'\big(C_4 l_1^{1/(2-\sigma)} l_2^{1/(2-\sigma)} m^{*1/(\sigma-2)}\big)\end{aligned} \tag{1.45}$$

et

$$\begin{aligned} C_1 &= D_5\Big(\frac{T}{M^{k+\sigma-1}}\Big)^{1/(2-\sigma)}, & C_2 &= D_6\Big(\frac{T}{M^{k+\sigma-1}}\Big)^{1/(\sigma-2)}, \\ C_3 &= D_7 T M^{-k}, & C_4 &= D_8\Big(\frac{T}{M^{k+1}}\Big)^{1/(2-\sigma)}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

où D_5, D_6, D_7 et D_8 sont des constantes non nulles qui dépendent uniquement de k, C et σ.

Démonstration. **a)** On commence par appliquer le Lemme 5 à la somme S ; la formule (1.22) s'écrit ici

$$S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} M\Big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_k(H) + M^{\varepsilon - 2^{-k}} S_k^{2^{-k}}\Big), \tag{1.47}$$

avec

$$\mathcal{L}_k(H) = H^3\Big(\frac{T}{HM^{k+4}}\Big)^{2^{-k}} + H\Big(\frac{T}{HM^{k+4}}\Big)^{2^{-k-1}}, \tag{1.48}$$

S_k est donnée par (1.24) et $S_{l_1,l_2} = \sum_{a \leq m \leq b} e\big(G_{l_1,l_2}(m)\big)$, où on a posé

$$G_{l_1,l_2}(x) = 2^k l_1 l_2 f^{(k)}(x) + \frac{2^{k-1}}{3} l_1 l_2^3 f^{(k+2)}(x), \text{ pour } x \in [a, b_1].$$

b) Pour fixer les idées, on suppose $f^{(k+2)}(x) > 0$ pour $x \in [a, b_1]$. Il existe alors une constante positive non nulle $D_{1,1}$ dépendant uniquement de C et σ telle que $H^{2^{k-1}} \leq D_{1,1} M$ implique $G_{l_1,l_2}''(x) \asymp_{k,C,\sigma} l_1 l_2 T M^{-k-2}$ pour tout $x \in [a, b_1]$. Sous les hypothèses (1.36) et (1.39), $l_1 l_2 T M^{-k-2}$ est petit devant l'unité ; on peut appliquer la transformation B par rapport à la variable m.

Nous rappelons brièvement l'énoncé et les notations relatifs à la transformation B de Van der Corput.

Soit $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $b-a \geq 2$. On suppose qu'il existe deux réels positifs X et M, avec $M \geq b-a$, tels qu'on ait

$$\frac{X}{M^2} \leq G''(x) \ll \frac{X}{M^2} \quad \text{et} \quad G'''(x) \ll \frac{X}{M^3}, \quad \text{pour } x \in [a,b].$$

On pose $[\alpha,\beta] = G'([a,b])$, de sorte que $G' : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ soit une bijection. Soit alors $Z : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ la fonction réciproque de G'. On introduit la fonction

$$G^* : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \text{ définie par } G^*(y) = G\big(Z(y)\big) - yZ(y).$$

Dans ces conditions, le Théorème 1′ de [7] s'écrit :

$$\sum_{a \leq m \leq b} e\big(f(m)\big) = e^{i\pi/4} \sum_{\alpha \leq m^* \leq \beta} G''\big(Z(m^*)\big)^{-1/2} e\big(G^*(m^*)\big) + E$$

avec

$$E \ll \Big(1 + \frac{M}{X}\Big) \log(M+X) + \frac{M}{X^{1/2}}.$$

Si on applique ce résultat à la situation qui nous intéresse, on obtient

$$S_{l_1,l_2} = e^{i\pi/4} \sum_{G'_{l_1,l_2}(a) \leq m^* \leq G'_{l_1,l_2}(b_1)} \big(G''_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(m^*))\big)^{-1/2} \times e\big(G^*_{l_1,l_2}(m^*)\big) + E_{l_1,l_2}, \tag{1.49}$$

où Z_{l_1,l_2} désigne la fonction réciproque de G'_{l_1,l_2},

$$G^*_{l_1,l_2}(y) = G_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(y)) - yZ_{l_1,l_2}(y)$$

et

$$E_{l_1,l_2} \ll_{k,C,\sigma} \Big(1 + \frac{M^{k+1}}{l_1 l_2 T}\Big) \log M + \Big(\frac{M^{k+2}}{l_1 l_2 T}\Big)^{1/2}. \tag{1.50}$$

c) Calcul de $G^*_{l_1,l_2}$. Si on peut écrire $G(x) = g(x) + u(x)$, où g est un terme dominant (en un sens à préciser), on s'attend à ce qu'on ait $G^*(y) = g^*(y) + v(y)$, où g^* est également "dominant". La formulation précise de cette phrase est démontrée au Théorème 3 de [7].

Sous les hypothèses (1.34), (1.35) et (1.37), G_{l_1,l_2} s'écrit

$$G_{l_1,l_2}(x) = g(x) + u(x), \text{ pour } x \in [a,b_1], \tag{1.51}$$

avec

$$g(x) = T_1 C\sigma (xM^{-1})^{\sigma-1}$$

et

$$u(x) = \frac{1}{6} T_1 C\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(l_2M^{-1})^2 (xM^{-1})^{\sigma-3} + T_1 u_0' xM^{-1} + \frac{1}{6} T_1 (l_2 M^{-1})^2 u_0^{(3)}(xM^{-1}),$$

(si $\sigma = 0$, il faut remplacer $C\sigma$ par C) où on a posé $T_1 = 2^k l_1 l_2 T M^{-k}$. Il existe alors (cf. [7, Théorème 3]) deux constantes strictement positives $D_{1,2}$ et D_2 dépendant uniquement de C et σ telles les conditions $H^{2^{k-1}} \leq D_{1,2} M$ et $\eta \leq D_2$ impliquent

$$G^*_{l_1,l_2}(m^*) = g^*(m^*) + u(z(m^*)) + E^*, \text{ pour } m^* \in J_{l_1,l_2}, \tag{1.52}$$

avec

$$E^* \ll_{k,C,\sigma} (\eta^2 + (l_2 M^{-1})^4) l_1 l_2 T M^{-k}, \tag{1.53}$$

z désignant la fonction réciproque de g' et

$$J_{l_1,l_2} = [g'(a), g'(b_1)] \cap [G'_{l_1,l_2}(a), G'_{l_1,l_2}(b_1)]. \tag{1.54}$$

On pose $J'_{l_1,l_2} = [G'_{l_1,l_2}(a), G'_{l_1,l_2}(b_1)] \setminus [g'(a), g'(b_1)]$ et on écrit

$$S_{l_1,l_2} = e^{i\pi/4} \Big(\sum_{m^* \in J_{l_1,l_2}} + \sum_{m^* \in J'_{l_1,l_2}} \Big) \big(G'_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(m^*))\big)^{-1/2} e\big(G^*_{l_1,l_2}(m^*)\big) + E_{l_1,l_2}.$$

En majorant trivialement la somme sur J'_{l_1,l_2}, sachant que

$$\# J'_{l_1,l_2} \ll 1 + |u'(a)| + |u'(b_1)|,$$

on obtient

$$S_{l_1,l_2} = e^{i\pi/4} \sum_{m^* \in J_{l_1,l_2}} \big(G'_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(m^*))\big)^{-1/2} \times e\big(g^*(m^*) + u(z(m^*)) + E^*\big) + E_{l_1,l_2} + F_{l_1,l_2}, \tag{1.55}$$

avec

$$F_{l_1,l_2} \ll_{k,C,\sigma} \big(1 + \big(\eta + (l_2 M^{-1})^2\big) l_1 l_2 T M^{-k-1}\big) \times \big(M^{k+2} l_1^{-1} l_2^{-1} T^{-1}\big)^{1/2}. \tag{1.56}$$

Le calcul explicite de $g^*(m^*) + u(z(m^*))$ (cf. [7, Lemme 9]) donne

$$g^*(m^*) + u(z(m^*)) = C_1 l_1^{1/(2-\sigma)} l_2^{1/(2-\sigma)} (\pm m^*)^{(1-\sigma)/(2-\sigma)} + \phi(l_1, l_2, \pm m^*), \tag{1.57}$$

où C_1 et ϕ sont donnés par (1.45) et (1.46) et où le signe $\pm$ signifie $+$ si $\sigma - 1 > 0$ et $-$ si $\sigma - 1 < 0$.

On sort le terme $e(E^*)$ en écrivant $e(E^*) = 1 + O(E^*)$; en rassemblant (1.57), (1.56), (1.55), (1.53) et (1.50), la majoration (1.47) s'écrit

$$S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} M^{1+\varepsilon-2^{-k}} + M^{1+\varepsilon}\Big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_{k,\eta}(H) + M^{-2^{-k}} S_k^{2^{-k}}\Big), \tag{1.58}$$

avec

$$(1.59)\quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{k,\eta}(H) &= H^3\big(TH^{-1}M^{-k-4}\big)^{2^{-k}} + H\big(TH^{-1}M^{-k-4}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{1/2}\big(\eta^2 TH^{-1}M^{-k-2}\big)^{2^{-k}} + H^{3/2}\big(\eta^4 T^3 H^{-3}M^{-3k-2}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{3/2}\big(TH^{-1}M^{-k-6}\big)^{2^{-k-1}} + H^{1/2}\big(\eta^4 TH^{-1}M^{-k}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{5/2}\big(TH^{-1}M^{-k-8}\big)^{2^{-k-1}} + H^{7/2}\big(T^3H^{-3}M^{-3k-10}\big)^{2^{-k-1}}, \end{aligned}$$

S_k est donnée par (1.24) et

$$(1.60)\quad \begin{aligned} S_{l_1,l_2} = \sum_{m^*\in J_{l_1,l_2}} &\big(G''_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(\pm m^*))\big)^{-1/2} \\ &\times e\big(C_1 l_1^{1/(2-\sigma)} l_2^{1/(2-\sigma)} m^{*(1-\sigma)/(2-\sigma)} + \phi(l_1,l_2,m^*)\big). \end{aligned}$$

d) Fin de la démonstration. On permute dans S_k la somme sur m^* avec celle sur l_2, on utilise la sommation d'Abel sur l_2 pour sortir la fonction-poids $\big(G''_{l_1,l_2}(Z_{l_1,l_2}(\pm m^*))\big)^{-1/2}$, on obtient alors

$$(1.61)\quad S_k \ll_{k,C,\sigma} (M^{k+2}T^{-1})^{1/2} H^{-2^k+1} L_1^{-1/2} L_2^{-1/2} \sum_{l_1=L_1}^{L'_1} \sum_{m^*=N_{l_1}}^{N'_{l_1}} |S_{l_1,m^*}|,$$

où N_{l_1}, N'_{l_1} et S_{l_1,m^*} sont donnés en (1.43) et (1.44).

En remplaçant dans (1.58) S_k par le membre de droite de (1.61) et en remarquant que sous les hypothèses (1.36), (1.38) et (1.39) les quatre derniers termes du membre de droite de (1.59) sont dominés par les quatre premiers, on arrive à (1.41). On choisit $D_1 = \min(D_{1,1}, D_{1,2})$. □

2. La transformation AD de Fouvry et Iwaniec

Le but de cette section est d'établir une majoration de la somme triple d'exponentielles S_k définie en (1.43). La méthode est celle de Fouvry et Iwaniec (plus précisément le Théorème 3 de [1]) que nous devons étendre à des situations où la somme à phase monotone est perturbée par une fonction-poids à faible oscillation.

La démonstration du Théorème 3 de [1] consiste en une application de la transformation A de Weyl et Van der Corput, d'un lemme d'espacement (qui est le cœur de la méthode), suivi du double grand crible que nous notons D. Nous reprenons ce scénario en demandant en outre à la transformation A d'éliminer l'oscillation de notre fonction-poids.

Ce problème d'élimination se produit dans de nombreuses situations parfois plus compliquées qu'ici ; en prévision d'autres applications ultérieures, nous commençons cette section par une formulation de la "transformation

A avec élimination" beaucoup plus générale que ce dont nous avons besoin ici.

2.1. Transformation A avec élimination. On veut appliquer la transformation A à la somme

$$S = \sum_{n\in\Omega} \sum_{d\in E_n} \chi_{n,d} \sum_{m\in I_{n,d}} \xi_m \psi_{n,d}(m) e\big(f_n(m)\big), \tag{2.1}$$

avec les notations suivantes : Ω est un ensemble fini non vide quelconque dont le nombre d'éléments est noté N ; pour chaque $n \in \Omega$, E_n désigne une ensemble fini non vide quelconque (l'exemple que nous avons en tête est celui où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et où E_n est une partie de l'ensemble des diviseurs de n) ; pour chaque $n \in \Omega$ et chaque $d \in E_n$, $\chi_{n,d}$ désigne un nombre complexe de module au plus un, $I_{n,d}$ désigne un intervalle de $\mathbb{Z}$ contenu dans un intervalle fixe $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ de longueur au moins un, $\psi_{n,d}$ désigne une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1. Pour chaque $m \in [a,b] \cap \mathbb{Z}$, ξ_m désigne un nombre complexe de module au plus un. Enfin, pour chaque $n \in \Omega$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque.

Pour chaque $n \in \Omega$ et chaque $d \in E_n$, soient $\alpha_{n,d}$ et $\beta_{n,d}$ deux nombres positifs tels que

$$|\psi_{n,d}(x)| \le \alpha_{n,d} \text{ et } |\psi'_{n,d}(x)| \le \frac{\beta_{n,d}}{b-a}, \text{ pour tout } x \in [a,b]. \tag{2.2}$$

On pose

$$\alpha = \Big(\frac{1}{N}\sum_{n\in\Omega}\Big(\sum_{d\in E_n}\alpha_{n,d}\Big)^2\Big)^{1/2} \text{ et } \beta = \Big(\frac{1}{N}\sum_{n\in\Omega}\Big(\sum_{d\in E_n}\beta_{n,d}\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{2.3}$$

On a alors le

Lemme 7. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout entier Q tel que $2 \le Q \le b-a$, on a*

$$S \ll \Big(\alpha + \frac{Q}{b-a}\beta\Big) N(b-a)\log(b-a+1)\big(Q^{-1/2} + S'^{1/2}\big), \tag{2.4}$$

avec

$$S' = \frac{1}{QN(b-a)} \sum_{q=1}^{Q-1} \Big| \sum_{n\in\Omega} \sum_{a+q\le m\le b-q} \xi_{m+q}\overline{\xi_{m-q}} \times e\big(\Delta_q f_n(m)\big)\Big|. \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour alléger les écritures on suppose $\xi_m = 1$ pour tout m.

a) On commence par appliquer la formule classique du prolongement de l'intervalle de sommation (cf. [5, Lemme 5.2.3]) :

$$(2.6)\qquad \sum_{m\in I_{n,d}} \psi_{n,d}(m)e\big(f_n(m)\big) = \int_{-1/2}^{1/2}\Big(\sum_{a\le m\le b}\psi_{n,d}(m) \times e\big(f_{n,\theta}(m)\big)\Big)T_{n,d}(\theta)d\theta,$$

avec

$$(2.7)\qquad f_{n,\theta}(m) = f_n(m) - \theta m, \quad T_{n,d}(\theta) = \sum_{m\in I_{n,d}} e(\theta m).$$

En reportant (2.6) dans (2.1), on a

$$(2.8)\qquad |S| \le \int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n\in\Omega}\sum_{d\in E_n}|S_{n,d}||T_{n,d}(\theta)|d\theta,$$

où on a posé

$$(2.9)\qquad S_{n,d} = \sum_{a\le m\le b}\psi_{n,d}(m)e\big(f_{n,\theta}(m)\big).$$

b) Décalage de Weyl et sommation d'Abel. Si Q est un entier tel que $2\le Q\le b-a$, le principe du décalage de Weyl s'écrit

$$(2.10)\qquad S_{n,d} = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{a-2q\le m\le b-2q}\psi_{n,d}(m+2q)e\big(f_{n,\theta}(m+2q)\big),$$

ou encore, en posant

$$\varphi_{m,q} = \begin{cases}1 & \text{si } a\le m+2q\le b,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$|S_{n,d}| \le \frac{1}{Q}\sum_m\Big|\sum_{q=1}^{Q}\varphi_{m,q}\tilde{\psi}_{n,d}(m+2q)e\big(f_{n,\theta}(m+2q)\big)\Big|,$$

où $\tilde{\psi}_{n,d}$ est un prolongement de classe C^1 de la fonction $\psi_{n,d}$ à l'intervalle $[a, b+2Q]$ et vérifiant

$$(2.11)\quad |\tilde{\psi}_{n,d}(x)| \ll \alpha_{n,d} + \frac{Q}{b-a}\beta_{n,d} \text{ et } |\tilde{\psi}'_{n,d}(x)| \ll \frac{\beta_{n,d}}{b-a},\ x\in[a, b+2Q].$$

On fait une sommation d'Abel sur la variable q pour éliminer le facteur $\tilde{\psi}_{n,d}(m+2q)$:

$$(2.12)\quad |S_{n,d}| \leq \frac{1}{Q}\sum_{m}\sum_{q=1}^{Q-1}|A_{m,q}||\tilde{\psi}_{n,d}(m+2q)-\tilde{\psi}_{n,d}(m+2q+2)| \\ +\frac{1}{Q}\sum_{m}|A_{m,Q}||\tilde{\psi}_{n,d}(m+2Q)|,$$

avec la notation $A_{m,q}=\sum_{s=1}{q}\varphi_{m,s}e\big(f_{n,\theta}(m+2s)\big)$.
On obtient ainsi

$$(2.13)\qquad |S_{n,d}| \ll \beta_{n,d}S_{n,1}+\Big(\alpha_{n,d}+\frac{Q}{b-a}\beta_{n,d}\Big)S_{n,2},$$

avec

$$(2.14)\qquad S_{n,1}=\frac{1}{Q(b-a)}\sum_{q=1}^{Q-1}\sum_{m}|A_{m,q}| \text{ et } S_{n,1}=\frac{1}{Q}\sum_{m}|A_{m,Q}|.$$

Alors $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ ne dépendent plus du paramètre d et la majoration(2.8) s'écrit

$$(2.15)\quad S \ll \int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n\in\Omega}\bigg(\Big(S_{n,1}+\frac{Q}{b-a}S_{n,2}\Big)\sum_{d\in E_n}\beta_{n,d}|T_{n,d}(\theta)| \\ +S_{n,2}\sum_{d\in E_n}\alpha_{n,d}|T_{n,d}(\theta)|\bigg)d\theta.$$

À l'aide de l'inégalité évidente

$$(2.16)\qquad T_{n,d}(\theta)\ll T(\theta),\ \text{où on a posé } T(\theta)=\min(b-a,|\theta|^{-1})$$

et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$(2.17)\quad S \ll N^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\bigg(\beta\Big(\sum_{n\in\Omega}S_{n,1}^2\Big)^{1/2} \\ +\Big(\alpha+\frac{Q}{b-a}\beta\Big)\Big(\sum_{n\in\Omega}S_{n,2}^2\Big)^{1/2}\bigg)T(\theta)d\theta$$

c) De manières similaires on établit les deux majorations suivantes

$$(2.18)\qquad \sum_{n\in\Omega}S_{n,1}^2 \ll \frac{Q^2}{(b-a)^2}S_1,\quad \sum_{n\in\Omega}S_{n,2}^2 \ll S_1,$$

avec

$$(2.19)\qquad S_1=N(b-a)^2(Q^{-1}+S'),$$

où S' est donnée en (2.5). On fait la preuve pour $S_{n,1}$:
Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$S_{n,1}^2 \ll \frac{1}{Q(b-a)} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{a-2q\le m\le b} |A_{m,q}|^2, \tag{2.20}$$

où on a rajouté des termes positifs du côté de b.
De manière similaire à la preuve du Lemme 5.6.2 de [5] on arrive à

$$\begin{aligned} S_{n,1}^2 \ll Q + &\frac{1}{Q(b-a)} \\ &\times \sum_{q=1}^{Q-1} \mathrm{Re}\Big(\sum_{r=1}^{q-1}(q-r) \sum_{a+r\le m\le b-r} e\big(\Delta_r f_n(m) - 2\theta r\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.21}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\Omega} S_{n,1}^2 \ll NQ + &\frac{1}{Q(b-a)} \\ &\times \sum_{q=1}^{Q-1}\sum_{r=1}^{q-1}(q-r)\mathrm{Re}\Big(\sum_{n\in\Omega}\sum_{a+r\le m\le b-r} e\big(\Delta_r f_n(m) - 2\theta r\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dans le second membre de (2.22) on remplace la partie réelle par le module pour éliminer les termes $e(-2\theta r)$, la majoration devient ainsi indépendante de θ. On prolonge la somme sur r pour qu'elle devienne indépendante de q, on obtient alors

$$\sum_{n\in\Omega} S_{n,1}^2 \ll NQ + \frac{Q}{b-a}\sum_{r=1}^{Q-1}\Big|\sum_{n\in\Omega}\sum_{a+r\le m\le b-r} e\big(\Delta_r f_n(m)\big)\Big|, \tag{2.23}$$

et la première majoration de (2.18) en découle.
d) Fin de la démonstration. On reporte les deux majorations de (2.18) dans (2.17) et comme $\int_{-1/2}^{1/2} T(\theta)d\theta \ll \log(b-a+1)$, on arrive à (2.4). □

2.2. Le Lemme *AD* pour les sommes triples à phase presque monomiale. Nous allons dans ce paragraphe, en application du paragraphe précédent, donner un analogue du Théorème 3 de [1]. Nous l'appellerons Lemme *AD*, en référence à la transformation *A* suivie de l'inégalité du double grand crible.

Soit la somme

$$(2.24)\quad S = \sum_{m_1 \sim M_1} \sum_{m_2 \sim M_2} \chi_{m_1,m_2} \sum_{m \in I_{m_1,m_2}} \xi_m \psi_{m_1,m_2}(m) \times e\Big(\frac{X m^\alpha m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2}}{M^\alpha M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2}}\Big),$$

où M_1, M_2 et M désigne des réels positifs ≥ 1, χ_{m_1,m_2} et ξ_m sont des nombres complexes de module au plus un ; X, α, α_1 et α_2 désignent des nombres réels tels que

$$(2.25)\qquad X \geq 1, \quad \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha\alpha_1\alpha_2 \neq 0.$$

La notation $m_1 \sim M_1$ signifie $m_1 \in [M_1, 2M_1]$. On suppose en outre que pour chaque $m_1 \sim M_1$ et $m_2 \sim M_2$

$$(2.26)\qquad I_{m_1,m_2} \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ tel que } I_{m_1,m_2} \subset [M, 2M],$$

$\psi_{m_1,m_2} : [M, 2M] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1. On notera α_{m_1,m_2} et β_{m_1,m_2} deux réels positifs tels que

$$(2.27)\qquad |\psi_{m_1,m_2}(x)| \leq \alpha_{m_1,m_2}, \quad |\psi'_{m_1,m_2}(x)| \leq \frac{\beta_{m_1,m_2}}{M}, \ M \leq x \leq 2M.$$

On pose enfin

$$(2.28)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \Big(\frac{1}{M_1M_2} \sum_{m_1 \sim M_1} \sum_{m_2 \sim M_2} \alpha^2_{m_1,m_2}\Big)^{1/2} \\ \text{et } \beta &= \Big(\frac{1}{M_1M_2} \sum_{m_1 \sim M_1} \sum_{m_2 \sim M_2} \beta^2_{m_1,m_2}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous avons alors le

Lemme 8 (Lemme *AD*). *Sous les hypothèses (2.25) à (2.27), et avec les notations (2.24) et (2.28), on a*

$$(2.29)\quad \begin{aligned} S \ll (\alpha + M^{-2/5})\big(&X^{1/4}M^{1/2}M_1^{3/4}M_2^{3/4} + M^{7/10}M_1M_2 \\ &+ MM_1^{3/4}M_2^{3/4} + M^{11/10}M_1M_2X^{-1/4}\big)\big(\log(2MM_1M_2)\big)^2\log(2M). \end{aligned}$$

Démonstration. On commence par appliquer le Lemme 7 à la somme S avec $\Omega = [M_1, 2M_1] \times [M_2, 2M_2]$; les ensembles E_n n'interviennent pas ici (on prend par exemple $E_n = \{n\}$). On a alors pour tout entier Q tel que $2 \leq Q \leq M$

$$(2.30)\quad S^2 \ll (\alpha + QM^{-1}\beta)^2\big(\log(2M)\big)^2\big(Q^{-1}MM_1M_2(MM_1M_2 + S(Q_0)\log Q)\big),$$

avec Q_0 entier $\leq Q$ et

$$(2.31)\quad S(Q_0) = \sum_{q\sim Q_0} \Big| \sum_{m_1\sim M_1} \sum_{m_2\sim M_2} \sum_{M+q\leq m\leq 2M-q} \xi_{m+q}\overline{\xi_{m-q}} \times e\Big(\frac{Xt(m,q)m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}}{M^\alpha M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}}\Big)\Big|,$$

où on a posé $t(m,q) = (m+q)^\alpha - (m-q)^\alpha$. On pose

$$(2.32)\qquad S(Q_0) = \sum_{q\sim Q_0} |S_q| \text{ et } \chi_q = \frac{\overline{S_q}}{|S_q|}.$$

On a alors

$$(2.33)\quad S(Q_0) = \sum_{q\sim Q_0}\sum_m\sum_{m_1}\sum_{m_2} \chi_q\xi_{m+q}\overline{\xi_{m-q}} \times e\Big(\frac{Xt(m,q)m_1^{\alpha_1}m_2^{\alpha_2}}{M^\alpha M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}}\Big).$$

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration du Théorème 3 de [1]. Le choix final $Q = M^{3/5}/3$ donne (2.29). □

3. Le Théorème A^kBAD

Le but de cet article est d'établir le Théorème A^kBAD pour les sommes simples d'exponentielles à phase "presque monomiale". Le résultat formulé au §3.1 est difficile à manier à cause de la présence du terme $u(x)$ dans l'écriture (0.2) de la phase, qui fait apparaître un paramètre η dans notre majoration (3.6). Toutefois notre application principale revient à majorer $\zeta(\sigma+it)$ pour certaines valeurs de σ, auquel cas on peut prendre $\eta = 0$, et la majoration (3.6) s'en trouve simplifiée.

La démonstration se scinde en deux parties : le Lemme A^kB qui est exposé au Lemme 6 et le Lemme AD qui est exposé au Lemme 8 ; le reste de la démonstration exposé au §3.2 revient essentiellement à justifier la taille des paramètres.

Enfin, au §3.3, nous formulons nos résultats à la manière du Tableau 17.1 de [5].

3.1. Énoncé du Théorème A^kBAD. Nous rappelons les hypothèses et les notations de notre théorème :

Soit $F : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+5}, avec k entier ≥ 2 telle que

$$(3.1)\qquad F^{(k-1)}(t) = Ct^\sigma + u(t),\ \text{pour } 1\leq t\leq 2,$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ et avec la convention $t^\sigma = \log t$ si $\sigma = 0$, où C est un réel strictement positif et où on a

$$(3.2)\qquad |u^{(j)}(t) \leq \eta|(Ct^\sigma)^{(j)}|,\ \text{pour } 1\leq t\leq 2 \text{ et } 1\leq j\leq 5,$$

η désignant un réel positif suffisamment petit.

Soient T et M deux réels positifs grands tels que

$$M^{k+2^{-k}} \leq T \leq M^{k+2}. \tag{3.3}$$

On pose

$$f(x) = TF(x/M), \text{ pour } x \in [a,b], \text{ avec } [a,b] \subset]M, 2M] \tag{3.4}$$

et

$$S = \sum_{a \leq m \leq b} e\big(f(m)\big). \tag{3.5}$$

Théorème 1. *Sous les hypothèses (3.1) à (3.3) et avec les notations (3.4) et (3.5), il existe une constante strictement positive $D_{C,\sigma}$ dépendant uniquement de C et σ, telle que $\eta \leq D_{C,\sigma}$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} M^{1+\varepsilon}\bigg(\Big(\frac{T}{M^{k+3/2}}\Big)^{2/(5K-2)} + \Big(\frac{T}{M^{k+2}}\Big)^{5/(18K-10)} + \Big(\frac{M^k}{T}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{T}{M^{k+3/2}}\Big)^{1/2K} + \mathcal{L}_k(\eta)\bigg) \tag{3.6}$$

où nous avons posé $K = 2^k$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k(\eta) = {}& \Big(\frac{\eta^{2/3}T}{M^{k+1/2}}\Big)^{30/(57K-50)} + \Big(\frac{\eta^{2/3}T}{M^{k+1/2}}\Big)^{3/2K} \\ & \times \bigg(1 + \Big(\frac{T}{M^{k+1}}\Big)^{(37K-50)/40(1-K)K}\bigg) + (\eta^4 M)^{1/2K} + \Big(\frac{\eta^{2/3}T}{M^{k+2/3}}\Big)^{5/(11K-10)} \\ & + \Big(\frac{\eta^{4/3}T}{M^{k+2/3}}\Big)^{3/(8K-6)} + \eta^{1/K}\Big(\frac{T^7}{M^{7k-3+10/K}}\Big)^{1/20(K-1)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2. Démonstration du Théorème 1. On commence par appliquer le Lemme 6 à la somme S de (3.5).

a) Majoration de S_k. On traite d'abord la somme

$$\tilde{S}_k = \sum_{l_1=L_1}^{L_1'} \sum_{m^*=N_{l_1}}^{N_{l_1}'} |S_{l_1,m^*}|, \tag{3.8}$$

où S_{l_1,m^*} est donnée en (1.44).

On prolonge le domaine de sommation de m^* :

$$M^* = D_3 \frac{L_1 L_2 T}{M^{k+1}}, \quad M'^* = 2^k D_4 \frac{L_1 L_2 T}{M^{k+1}} \tag{3.9}$$

$$\text{et } \chi_{1,l_1,m^*} = \begin{cases} 1 & \text{si } N_{l_1} \leq m^* \leq N_{l_1}' \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où N_{l_1}, N'_{l_1}, D_3 et D_4 sont donnés en (1.43). On pose également

$$(3.10) \qquad \chi_{2,l_1,m^*} = \frac{\overline{S_{l_1,m^*}}}{S_{l_1,m^*}} \text{ et } \chi_{l_1,m^*} = \chi_{1,l_1,m^*} \times \chi_{2,l_1,m^*}.$$

On a donc

$$(3.11) \quad \tilde{S}_k = \sum_{l_1=L_1}^{L_1'} \sum_{m^*=M^*}^{M'^*} \chi_{l_1,m^*} \sum_{l_2 \in I_{l_1,m^*}} \psi_{l_1,m^*}(l_2) \times e\Big(\frac{X l_2^{1/(2-\sigma)} l_1^{1/(2-\sigma)} m^{*(1-\sigma)/(2-\sigma)}}{L_2^{1/(2-\sigma)} L_1^{1/(2-\sigma)} M^{*(1-\sigma)/(2-\sigma)}}\Big),$$

avec

$$(3.12) \qquad \psi_{l_1,m^*}(l_2) = e\big(\phi(l_1,l_2,m^*)\big), \quad X \asymp_{k,C,\sigma} L_1L_2M^{-k},$$

où ϕ est la fonction définie en (1.45).
Pour tout $(l_1,,m^*) \in [L_1,L_1'] \times [M^*,M^{*\prime}]$, on a

$$(3.13) \qquad |\psi_{l_1,m^*}(l_2)| \le 1, \quad |\psi'_{l_1,m^*}(l_2)| \ll_{k,C,\sigma} \beta L_2^{-1},$$

pour tout $l_2 \in [L_2, 2L_2]$, où on a posé

$$(3.14) \qquad \beta = L_1L_2^3TM^{-k-2} + \eta L_1L_2TM^{-k}.$$

u_0' et u_0'' sont définies à l'extérieur de l'intervalle $[1,2]$ par leurs polynômes de Taylor en 1 (ou en 2) à l'ordre 1.
On suppose que l'on a

$$(3.15) \qquad D_3L_1L_2^3TM^{-k-1} \ge 1.$$

On peut ainsi appliquer le Lemme 8 à la somme $\tilde{S}_k$ de (3.11), et on obtient la majoration suivante

$$(3.16) \quad \tilde{S}_k \ll_{k,C,\sigma} \Big(1 + L_1L_2^{13/5}TM^{-k-2} + \eta L_1L_2^{3/5}TM^{-k}\Big) \times \Big(L_1^{7/4}L_2^{3/2}TM^{-k-3/4} + L_1^2L_2^{17/10}TM^{-k-1} + L_1^{3/2}L_2^{7/4}T^{3/4}M^{-3(k+1)/4} + L_1^{7/4}L_2^{37/20}T^{3/4}M^{-3k/4-1}\Big)(\log M)^3.$$

On en déduit pour S_k la majoration suivante

$$(3.17) \quad S_k \ll_{k,C,\sigma} H^{1-2^k}\Big(1 + L_1L_2^{13/5}TM^{-k-2} + \eta L_1L_2^{3/5}TM^{-k}\Big) \times \Big(L_1^{5/4}L_2TM^{-k-3/4} + L_1^{3/2}L_2^{6/5}TM^{-k-1} + L_1L_2^{5/4}T^{3/4}M^{-3(k+1)/4} + L_1^{5/4}L_2^{27/20}T^{3/4}M^{-3k/4-1}\Big)(\log M)^3.$$

Dans (3.17) on fait le choix

$$(3.18)\qquad L_1 = H^{2^{k-1}-1} \text{ et } L_2 = H^{2^{k-1}}.$$

La condition (1.39) implique alors que (3.15) est satisfaite. Dans la suite de la démonstration, on suppose de plus que

$$(3.19)\qquad H \le \Big(\frac{T}{M^{k+2}}\Big)^{5/(5-9\cdot 2^k)},$$

ce qui assure que le terme $L_1 L_2^{13/5} T M^{-k-2}$ de (3.17) est inférieur à 1. De même sous l'hypothèse (1.38) les deux derniers termes du membre de droite de (3.17) sont dominés par les deux termes qui les précèdent. On obtient finalement

$$(3.20)\quad S_k \ll_{k,C,\sigma} \Big(1 + \eta H^{2^{k+2}/5-1} T M^{-k}\Big)\Big(H^{2^{k-3}-1/4} T M^{-k-3/4} + H^{7\cdot 2^{k-2}/5-1/2} T M^{-k-1}\Big)(\log M)^3.$$

b) Fin de la démonstration. On reporte la majoration (3.20) dans (1.41) et on obtient

$$(3.21)\qquad S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} M^{1+\varepsilon-2^{-k}} + M^{1+\varepsilon}\big(H^{-1/2} + \mathcal{L}_k(H,\eta)\big),$$

avec

$$\begin{aligned}(3.22)\quad \mathcal{L}_k(H,\eta) &= H^3\big(TH^{-1}M^{-k-4}\big)^{2^{-k}} + H\big(TH^{-1}M^{-k-4}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{1/8}\big(TH^{-1/2}M^{-k-3/2}\big)^{2^{-k-1}} + H^{7/20}\big(TH^{-1}M^{-k-2}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{3/2}\big(\eta^4T^3H^{-3}M^{-3k-2}\big)^{2^{-k-1}} + H^{37/40}\big(\eta^2T^3H^{-5/2}M^{-3k-3/2}\big)^{2^{-k-1}} \\ &+ H^{23/20}\big(\eta^2T^3H^{-3}M^{-3k-2}\big)^{2^{-k-1}}.\end{aligned}$$

Sous la condition (1.38), le terme $H^{1/2}\big(\eta^2TH^{-1}M^{-k-2}\big)^{2^{-k-1}}$ est dominé par le terme $H^{23/20}\big(\eta^2T^3H^{-3}M^{-3k-2}\big)^{2^{-k-1}}$ de (3.22).

Pour optimiser le choix de H, on utilise le Lemme 2.4 de [2], et sous les hypothèses (3.3), (1.38), (1.39), (1.40) et (3.19) on arrive à (3.6). Un choix possible pour $D_{C,\sigma}$ est $D_{C,\sigma} = D_2$, la constante définie dans le Lemme 6.

3.3. Application : Sommes avec T grand. Comme application du Théorème 1, nous allons compléter le bas du Tableau 17.1 de la page 369 de [5]. En effet notre théorème donne de bons résultats à partir de $k \ge 3$, mais nous obtenons de réelles améliorations par rapport à la méthode de Huxley avec $k \ge 4$.

Nous allons reprendre le Théorème 1, et nous allons exprimer les deux paramètres M et η en fonction du paramètre T. Pour cela on pose

$$(3.23)\quad M = T^{\alpha}, \quad \eta = T^{-\theta}, \text{ avec } \alpha \text{ et } \theta \text{ deux réels strictement positifs.}$$

La condition (3.3) s'écrit alors

$$\frac{1}{k+2} \leq \alpha \leq \frac{K}{kK+1}, \text{ où } K = 2^k. \tag{3.24}$$

Pour exprimer la majoration (3.6) en fonction de T, on pose

$$\beta(\alpha) = \max\Big(\frac{(5K-2k-5)\alpha+2}{5K-2}, \frac{(18K-5k-20)\alpha+5}{18K-10}, \frac{(k+2)\alpha-1}{2}, \frac{(4K-2k-3)\alpha+2}{4K}\Big), \tag{3.25}$$

qui correspond aux quatre premiers termes du membre de droite de (3.6) et

$$\beta_1(\alpha,\theta) = \frac{(57K-30k-65)\alpha+(30-20\theta)}{57K-50}, \tag{3.26}$$

$$\beta_2(\alpha,\theta) = \frac{(4K-6k-3)\alpha+(6-4\theta)}{4K}, \tag{3.27}$$

$$\beta_3(\alpha,\theta) = \frac{(40K^2-23kK-33K+10k-20)\alpha+(23K-10)}{40K(K-1)} - \frac{\theta}{K}, \tag{3.28}$$

$$\beta_4(\alpha,\theta) = \frac{(2K+1)\alpha-4\theta}{2K}, \tag{3.29}$$

$$\beta_5(\alpha,\theta) = \frac{(33K-15k-40)\alpha+(15-10\theta)}{33K-30}, \tag{3.30}$$

$$\beta_6(\alpha,\theta) = \frac{(8K-3k-8)\alpha+(3-4\theta)}{8K-6}, \tag{3.31}$$

$$\beta_7(\alpha,\theta) = \frac{(20K^2-7kK-17K-10)\alpha+7K}{20K(K-1)} - \frac{\theta}{K}, \tag{3.32}$$

qui correspondent aux sept termes du membre de droite (3.7).

On considère les réels $\theta_i(\alpha)$ $(1 \leq i \leq 7)$ donnés par les relations

$$\beta_i\big(\alpha,\theta_i(\alpha)\big) = \beta(\alpha), \quad 1 \leq i \leq 7. \tag{3.33}$$

On pose enfin

$$\theta_0(\alpha) = \max_{1\leq i\leq 7} \theta_i(\alpha). \tag{3.34}$$

Nous avons alors le

Corollaire 1. *Avec les notations (3.4), (3.5), (3.23),(3.25), (3.34) et sous les hypothèses (3.1), (3.2), (3.24), si le paramètre T est assez grand par rapport à C et σ, et si $\theta \geq \theta_0(\alpha)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$S \ll_{\varepsilon,k,C,\sigma} T^{\beta(\alpha)+\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Nous pouvons maintenant présenter nos résultats.

Corollaire 2. *Avec les notations (3.4), (3.5), (3.23), (3.34) et sous les hypothèses (3.1), (3.2), si le paramètre T est assez grand par rapport à C et σ, et si $\theta \geq \theta_0(\alpha)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$S \ll_{\varepsilon, C, \sigma} T^{\beta(\alpha)+\varepsilon}. \tag{3.36}$$

avec

(3.37)

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} (5+248\alpha)/278 & si\ 83/359 \leq \alpha \leq 1012/4265 = 0.2372\ldots \\ (2+67\alpha)/78 & si\ 144/725 \leq \alpha \leq 83/359 = 0.2311\ldots \end{cases}$$

(3.38)

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} (5+531\alpha)/566 & si\ 171/914 \leq \alpha \leq 144/725 = 0.1986\ldots \\ (2+145\alpha)/158 & si\ 1/6 \leq \alpha \leq 171/914 = 0.1870\ldots \end{cases}$$

si $\alpha \geq 1012/4265$, $\beta(\alpha)$ est donné par le Tableau 17.1 de [5].

Démonstration. Découle du Corollaire 1 avec $k = 4$ pour (3.37), $k = 5$ pour (3.38). □

Remarques

1. Avec $k = 3$, le Corollaire donne un bon résultat pour $\alpha = 3/10$. Ainsi nous avons $\beta(3/10) = 107/380 = 0.2815\ldots$, $\theta_0(3/10) = 142/475 = 0.2989\ldots$, alors que le Tableau 17.1 de [5] donne $\beta(3/10) = 103/365 = 0.2821\ldots$ Dans un article récent [8], Sargos donne $\beta(3/10) = 1283/4560 = 0.2813\ldots$

2. Avec $k \geq 4$, notre méthode prend le relais du Tableau 17.1 de [5] à partir de $\alpha = 1012/4265$. Par exemple pour la dernière valeur du Tableau 17.1 de [5] $\alpha = 2848/12173 = 0.2339\ldots$, nous avons par le Corollaire 2 : $\beta(2848/12173) = 767169/3384094 = 0.2266\ldots$ $\theta_0(2848/12173) = 1582103/6768188 = 0.2337\ldots$, alors que Tableau 17.1 de [5] corrigé par Tableau 17.2 de [5] donne $\beta(2848/12173) = 5527/24346 = 0.2270\ldots$

3. On trouve certaines valeurs de α extérieures au Tableau 17.1 dans le Tableau 17.2 de [5]. Par exemple en prenant la dernière quantité du Tableau 17.2 avec $k = 4$, on trouve $\alpha = 5696/29873 = 0.1906\ldots$ Pour cette valeur, le Corollaire 2 ci-dessus donne $\beta(5696/29873) = 0.1877\ldots$ alors que le Tableau 17.1 de [5] donne $\beta(5696/29873) = 0.1878\ldots$

4. Pour la dernière valeur de $\beta(\alpha)$ dans (3.37) nous apportons la précision suivante : si $144/725 \leq \alpha \leq 23/161 = 0.1987\ldots$, le Corollaire 1 donne en fait $\beta(\alpha) = (-1+7\alpha)/2$, un résultat très légèrement meilleur que (3.37), du moins lorsque α est dans le petit intervalle indiqué. Pour les mêmes raisons que celles données à la page 370 de [5], nous préférons ne pas alourdir le Corollaire 2 avec des améliorations aussi minimes.

Bibliographie

[1] E. Fouvry, H. Iwaniec, *Exponential sums with monomials.* J. Number Theory **33** (1989), 311–333.

[2] S. W. Graham, G. Kolesnik, *Van der Corput's method of exponential sums.* London Math. Soc Lecture Notes **126**, Cambridge University Press, 1991.

[3] D. R. Heath-Brown, Weyl's inequality, Hua's inequality, and Waring's problem. J. London Math. Soc. **28** (1988), 216–230.

[4] M. N. Huxley, *Expoential sums and the Riemann zeta function IV.* Proc. London Math. Soc **66** (1993), 1–40.

[5] M. N. Huxley, *Area, lattice points and exponential sums.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[6] H. L. Montgomery, *Ten problems on the interface between analytic number theory and harmonic analysis.* CBMS 84, American Math. Soc., 1994.

[7] M. Redouaby, P. Sargos, *Sur la transformation B de Van der Corput.* Expo. Math. **17** (1999), 207–232

[8] P. Sargos, *Un critère de la dérivée cinquième pour les sommes d'exponentielles.* Bull. London Math. Soc **32** (2000), 398–402.

Marouan Redouaby
s/c Patrick Sargos
Institut Elie Cartan
Université Henri Poincaré
B. P. 239
54506 Vandœuvre Cedex
France
E-mail : sargos@iecn.u-nancy.fr