JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

ABDELMEJID BAYAD

Formes de Jacobi et formule de Weber p-adique

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 11, n^o 2 (1999), p. 317-329

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1999__11_2_317_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **11** (1999), 317–329

Formes de jacobi et formule de Weber p-adique

par ABDELMEJID BAYAD

RÉSUMÉ. Dans ce texte, on construit sur un corps local de caractéristique strictement positive, un analogue p-adique aux formes de Jacobi méromorphes complexes $D_L(z;\varphi)$, étudiées dans [3] et [4]. Le théorème principal établit que les formes de Jacobi p-adiques obtenues satisfont deux relations de distribution et d'inversion additives. L'analogue p-adique à une formule de Weber généralisée est prouvé comme corollaire du théorème principal.

ABSTRACT. Let L be a complex lattice. Our object of study is the construction a p-adic analogous of the complex Jacobi meromorphic form $D_L(z,\varphi)$, studied in [3] and [4]. Our main result is that the p-adic analogous of D_L also satisfies the simple additive distribution and inversion relations.

In consequence of the main result, we prove a p-adic analogous of generalized complex Weber's formula.

INTRODUCTION

D'après [4], on sait associer à un réseau complexe L une fonction $D_L(z;\varphi)$ sur $\mathbb{C}^2$, périodique de périodes L en la seconde variable, analytique en la première variable et normalisée par

$$\lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi) = \lim_{\varphi\to 0} \varphi D_L(z;\varphi) = 1.$$

Nous étudions dans ce texte, un analogue p-adique aux fonctions $D_L(z;\varphi)$ sur un corps local de caractéristique $p > 0$. Avant toute chose, on se fixe K un corps local de caractéristique $p > 0$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, nous désignons par q un élément de K^* de valuation strictement positive et v_q la valuation discrète normalisée de K. On associe au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$ de $\overline{K^*}$, la fonction p-adique $D_{q^\mathbb{Z}}(z;\varphi)$ est définie formellement par

$$D_{q^\mathbb{Z}}(z;\varphi) = z^{v_q(\varphi)} \frac{\theta_{q^\mathbb{Z}}(z\varphi)}{\theta_{q^\mathbb{Z}}(z)\theta_{q^\mathbb{Z}}(\varphi)} \text{ ; pour tous } z,\varphi \in \overline{K^*}$$

Manuscrit reçu le 17 mars 1998.

où $\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z) = (z-1)\prod_{n\geq 1}\frac{(1-q^n z)(1-q^n z^{-1})}{(1-q^n)^2}$ c'est la fonction thêta fondamentale associée au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$ de $\overline{K^*}$ et normalisée par $\theta'_{q^{\mathbb{Z}}}(1) = 1$. Dans le paragraphe 2 nous précisons le sens que nous donnons au facteur p-adique $z^{v_q(\varphi)}$. Nous prouvons que $D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ est un analogue p-adique à $D_L(z;\varphi)$, possédant toutes les propriétés anologues à celles satisfaites par $D_L(z;\varphi)$. Dans la foulée, nous prouvons aussi que ces fonctions $D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ satisfont deux relations de distribution et d'inversion additives simples lorsqu'on change de sous-groupe discret. Précisons la formule de Weber p-adique obtenue comme conséquence de cette dernière relation de distribution additive . Dans les cas génériques simples où γ désigne un point de $\overline{K^*}/q^{\mathbb{Z}}$ d'ordre premier l vérifiant $\gamma^l = q$ ou 1, on a

$$\sum_{i=0}^{l-1} z^{v_q(\gamma^{li})}\frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l\varphi\gamma^i)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l)\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(\varphi\gamma^i)} = \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z\varphi)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z)\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(\varphi)}$$

où

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z) = \theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z)\prod_{i=1}^{l-1}\frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z\gamma^i)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(\gamma^i)},$$

c'est la fonction thêta fondamentale normalisée associée au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$ de $\overline{K^*}$. Il est à noter que lorsque φ est un point de torsion de $\overline{K^*}/q^{\mathbb{Z}}$ on retrouve des résultats p-adiques connus [1]. En particulier, lorsque φ est un point de torsion d'une courbe elliptique les applications arithmétiques de cette formule sont nombreuses. En effet, pour φ point de 2-torsion d'une courbe ellipique définie sur un corps de nombres, on construit et étudie dans [5] un élément de Stickelberger quadratique pour un certain groupe de classes. Dans [2] et [3], on construit des éléments de Stickelberger quadratiques pour φ point de p-torsion premier quelconque. Dans [15] et [16], on applique la formule de Weber classique pour obtenir des résultats de structure galoisienne et monogénéité. Pour d'autres applications arithmétiques de nature différentes mais liées à nos formes de Jacobi se référer à [19].

1. Prologue complexe : Formule de Weber généralisée.

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur. Pour tout réseau complexe L, si (w_1, w_2) désigne une base de L telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, on pose $\tau = w_1/w_2 \in \mathcal{H}$ et on définit l'aire de L par

$$a(L) = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} w_1 & \overline{w}_1 \\ w_2 & \overline{w}_2 \end{vmatrix} = \frac{w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1}{2i} = |w_2|^2\mathrm{Im}(\tau);$$

c'est un nombre réel > 0 indépendant du choix de la base orientée (w_1, w_2) de L. On définit alors la forme $\mathbb{R}$-linéaire alternée $E_L(u,v) =$

$\frac{1}{2i}\frac{\bar{u}v-\bar{v}u}{a(L)}$, $(u,v) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Notons que ses valeurs sur $L \times L$ sont entières, et elle vaut -1 sur toutes les bases (w_1, w_2) de L telles que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$. Dans toute la suite, on pose $\quad e(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{C}$.

On rappelle la définition des fonctions suivantes

$$D_L(z,\varphi) = e\big(E_L(z,\varphi)/2\big)\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}, \forall (z,\varphi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \tag{1.1}$$

la fonction $\mathcal{K}_L(u)$ est décrite par le produit infini

$$\mathcal{K}_L(u) = ue^{-\frac{1}{2}uu^*}\prod_{\ell\in L,\ell\neq 0} e^{\frac{u}{\ell}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\ell}\right)^2}\left(1-\frac{u}{\ell}\right) \tag{1.2}$$

où, écrivant $u = a_1w_1 + a_2w_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note

$$u^* = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$$

pour η_1 et η_2 les périodes de “deuxième espèce” associées aux périodes de “première espèce” w_1 et w_2. L'application $u \mapsto uu^*$ et donc d'après (2) la fonction $u \mapsto \mathcal{K}_L(u)$ ne dépend pas du choix de la base (w_1, w_2) de L, telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$.

Dans ce qui suit, par raison de simplicité, on prend $w_1 = \tau$ et $w_2 = 1$. Soient $z = z_1\tau + z_2$ et $\varphi = \varphi_1\tau + \varphi_2$, où $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \le z_2 < 1$ et $0 \le \varphi_2 < 1$, représentants de points du tore complexe $\mathbb{C}/L$. On a le lemme suivant

Lemme 1.3. *On a*

(i) $\mathcal{K}_L(z) = \frac{1}{2\pi i}e(\tau)^{\frac{1}{2}z_1(z_1-1)}e(z_2(z_1-1)/2)\theta_\tau(e(z))$.

(ii) $D_L(z,\varphi) = 2\pi i.e(z_2\varphi_1)e(\tau)^{z_1\varphi_1}\frac{\theta_\tau(e(z+\varphi))}{\theta_\tau(e(z))\theta_\tau(e(\varphi))}$

où $\theta_\tau(w) = (w-1)\prod_{n\ge 1}\frac{(1-e(\tau)^n w)(1-e(\tau)^n w^{-1})}{(1-e(\tau)^n)^2}$ *est la fonction thêta fondamentale normalisée associée au réseau* $L = [\tau, 1]$.

Démonstration. Le (ii) se déduit du (i) et du fait que

$$E_L(z,\varphi) = \varphi_1 z_2 - \varphi_2 z_1.$$

Quant au (i) c'est un calcul élémentaire utilisant la définition (1.2). Pour plus de détails se reporter à [10] Chap 2.

On démontre dans [3], un théorème qui généralise une formule de Weber aux points φ non nécessairement de torsion du tore complexe.

D'une façon précise, on a

Théorème 1.4. *Si* Λ *est un réseau complexe tel que* $L \subset \Lambda$ *et* $[\Lambda : L] = l$ *on a*

$$\sum_t e(E_L(lz,t)/2)\frac{\mathcal{K}_L(lz+\varphi+t)}{\mathcal{K}_L(lz)\mathcal{K}_L(\varphi+t)} = \frac{\mathcal{K}_\Lambda(z+\varphi)}{\mathcal{K}_\Lambda(z)\mathcal{K}_\Lambda(\varphi)}.$$

Cette relation est particulièrement plus simple exprimée à l'aide de la fonction $D_L(z;\varphi)$. En effet, on a

$$\sum_t D_L(lz;\varphi+t) = D_\Lambda(z;\varphi)$$

où t parcourt un système complet de représentants dans $\mathbb{C}$ de Λ/L.

Remarques 1.5. Lorsque φ est un point de torsion du tore $\mathbb{C}/L$, l'énoncé du théorème 1.4 est plus simple, mais équivalent, à la formule de Weber classique (3.19)§ 3 p.292 de [15].

2. Préliminaires p-adiques.

A. La fonction $z \to z^x, x \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}_p$.

On se fixe S un système de représentants des racines primitives de l'unité dans $\mathbb{C}_p$. Dans ce qui suit nous choisissons un système S vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $\xi_n \in S$, où $n \in \mathbb{N}^*$: $\xi_n^d = \xi_{\frac{n}{d}}, \forall$ d diviseur de n.

On considère

$$\mathcal{E} = \Big\{ \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \ : x_n \in \mathbb{Z}, y_n \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\sim$, donnée par

$$x \sim x' \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\xi_{y_n}^{x_n} - \xi_{y'_n}^{x'_n}\right) = 0$$

où $x = \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big), x' = \big((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

On définit sur $\mathcal{E}$ une autre relation $\simeq$, donnée par

$$x \simeq x' \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{x'_n}{y'_n}\right) = 0$$

où $x = \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big), x' = \big((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. On vérifie que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

Lemme 2.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}_p^*$ vérifiant $v_p(z) = 0$, il existe $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \in \mathcal{E}$ tel que :*

$$z = \lim_{n\to+\infty} \xi_{y_n}^{x_n}.$$

Démonstration. On peut faire une démonstration analogue à celle qu'on fait habituellement pour caractériser polairement $\mathbb{C}$, $v_p(z)$ serait l'analogue du module d'un nombre complexe. Ceci permet de donner une écriture unique d'un complexe p-adique.

D'une façon précise, on a

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}_p^*$, il existe un unique élément $\overline{x}$ de $\mathcal{E}/\sim$ tel que :*

$$z = p^{v_p(z)} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y_n}^{x_n}, \text{ où } \overline{x} = \overline{((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})}.$$

Mise en Garde. Dans toute la suite du présent texte, on se fixe un système de représentants pour $\mathcal{E}/\sim$, noté E vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E$, on a : $(x_n, y_n) = 1$,

De même, on se fixe un système de représentants pour $\mathcal{E}/\simeq$, noté R vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in R$, on a : $(x_n, y_n) = 1$,

et le système S de représentants des racines de l'unité dans $\mathbb{C}_p$, choisi au début de cette section.

Définition 2.3. Pour tous $z \in \mathbb{C}_p^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ils existent un unique élément $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de E et un unique élément $((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de R tels que

$$z = p^{v_p(z)} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y_n}^{x_n} \text{ et } x = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

On définit alors z^x par l'égalité :

$$z^x = p^{xv_p(z)} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y'_n}^{x'_n}, \forall z \in \mathbb{C}_p^*, \forall x \in \mathbb{R}$$

où

$$\lim_{n\to+\infty} \xi_{y'_n}^{x'_n} = \lim_{n\to+\infty} \xi_{q_n y_n}^{p_n x_n} \qquad \text{avec } ((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E.$$

C'est le sens que nous adoptons, dans toute la suite du texte, pour définir la fonction z^x.

Remarques 2.4. (i) Soient x, y éléments de $\mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}_p$, les quantités suivantes

$$(z^x)^y, z^{xy} \text{ et } (z^y)^x$$

sont, à priori, différentes.

(ii) **Exemple de calcul :** a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}_p^*$, il existe un unique élément $((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de R tels que

$$x = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

et il existe un unique élément $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de E tels que

$$z = p^{v_p(z)} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y_n}^{x_n}.$$

on a alors

$$(zp)^x = \left(p^{v_p(z)+1} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y_n}^{x_n}\right)^x = p^{xv_p(z)+x} \lim_{n\to+\infty} \xi_{y'_n}^{x'_n},$$

où

$$\lim_{n\to+\infty} \xi_{y'_n}^{x'_n} = \lim_{n\to+\infty} \xi_{q_n y_n}^{p_n x_n} \qquad \text{avec } ((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E.$$

Donc, $(zp)^x = z^x p^x$.

b) D'après la définition 2.3, on a : $\xi_n^{\frac{1}{m}} = \xi_{nm}; \forall n, m \in \mathbb{N}^*$.

B. **Fonctions méromorphes sur un corps local.**

Nos références pour cette section sont [1], chap. III et [13], § 2. Nous fixons K un corps local et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et notons $car(K)$ sa caractéristique. Nous désignons par q un élément de K^* de valuation strictement positive.

Pour une série de Laurent $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n X^n$, avec $a_n \in K$, qui converge pour tout z de $\overline{K}^*$, nous associons la fonction

$$(z \mapsto f(z)) \text{ de } \overline{K}^* \text{ dans } \overline{K} .$$

Donc, toute fonction associée à une série de Laurent du type précédent est dite holomorphe sur $\overline{K}^*$. On confond souvent dans les notations la fonction et la série qui la définit.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\overline{K}^*$, est un anneau intègre pour les opération naturelles. Notons M_K son corps de fonctions.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, adapté au cas rigide, tout élément f de M_K s'écrit comme un quotient g/h de deux fonctions holomorphes g et h sur $\overline{K}^*$, sans zéros communs. Ce sont ces éléments de M_K que nous nommons fonctions méromorphes sur $\overline{K}^*$.

Définition 2.5. Une fonction méromorphe sur $\overline{K}^*$ est dite q-périodique lorsqu'elle satisfait :

$$f(q^{-1}z) = f(z)$$

pour tout élément z de $\overline{K}^*$ où f est définie.

Pour une telle fonction f écrite sous forme réduite g/h, avec g et h holomorphes comme ci-dessus, et tout $\alpha \in \overline{K}^*$, on note $m_{\alpha,f}$ l'entier relatif défini par

$$m_{\alpha,f} = \begin{cases} \text{la multiplicité de } g \text{ en } \alpha, \text{ si } \alpha \text{ zéro de } g\,; \\ \text{- la multiplicité de } h \text{ en } \alpha, \text{ si } \alpha \text{ zéro de } h\,; \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Si de plus la fonction méromorphe f est q-périodique, on définit son *diviseur* comme la somme formelle

$$\sum_{\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_{\alpha,f}(\alpha) .$$

En fait, soient m_α, $\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, une famille d'entiers relatifs, tous nuls excepté un nombre fini d'entre eux. Les deux propriétés suivantes sont alors *équivalentes :*

$$(2.6) \qquad \sum_{\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha = 0, \qquad \prod_{\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} \alpha^{m_\alpha} \equiv 1 (\operatorname{mod} q^{\mathbf{Z}});$$

et

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \textit{il existe une fonction méromorphe } q\textit{-périodique } f, \\ \textit{unique à constante multiplicative près, de diviseur} \\ \qquad \sum_{\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha(\alpha) \;. \end{cases}$$

Il s'agit là tout simplement du théorème d'Abel-Jacobi et de sa réciproque sur une courbe de Tate $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

Définition 2.8. Soit f une fonction méromorphe q-périodique sur $\overline{K}^*$, non nulle, on appelle valence de f et on note $\operatorname{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f)$ l'entier

$$\operatorname{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f) = \sum_{\alpha \in \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_{\alpha,f}, \text{ où } \alpha \text{ parcourt les zéros de } f \text{ dans } \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

Il est clair que, pour une fonction f méromorphe sur $\overline{K}^*$ et dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$, où β est un point d'ordre ℓ, la valence de f relativement à $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$ est donnée par la relation

$$\operatorname{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f) = \ell \operatorname{val}_{q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}}(f) \;.$$

On déduit de (2.6) et (2.7) que, comme dans le cas des fonctions d'une variable complexe doublement périodiques, toute fonction q-périodique non constante est de valence supérieure ou égale à 2.

Dans la suite nous avons besoin du résultat suivant

Proposition 2.9. *Soit f une fonction méromorphe sur $\overline{K}^*$. On suppose que le groupe des périodes de f contient $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$ où β définit un point d'ordre s de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et qu'en outre f, comme fonction de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$, est de valence inférieure ou égale à 1. Alors, f est constante.*

La démonstration de cette proposition se fait en deux étapes :
Étape 1 :

On se ramène au cas où β est racine de l'unité. Puisque β est d'ordre s, il existe alors un entier k tel que :

$$(2.10) \qquad \beta^s = q^k \;.$$

Soit d le p.g.c.d. de k et s. On a donc

$$s = ds_1, \; k = dk_1, \; (s_1, k_1) = 1 \;.$$

On déduit de 2.10 l'existence d'une racine d-ième de l'unité ξ_d telle que :

$$\beta^{s_1} = q^{k_1}\xi_d \;.$$

Soient a, b éléments de $\mathbf{Z}$ tels que : $1 = ak_1 + bs_1$ on pose $q' = q^b\beta^a$. On vérifie facilement l'égalité de groupes :

$$q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}} = q'^{\mathbf{Z}}\xi_d^{\mathbf{Z}} .$$

Étape 2 :

Soit maintenant $\beta = \xi_s$, où ξ_s est une racine primitive s-ième de 1. On désigne par σ le $\overline{K}$-automorphisme du corps des fonctions q-périodiques défini par :

$$(g \ : z \mapsto g(z)) \longmapsto (g^\sigma \ : z \mapsto g(\xi_s z)).$$

Son ordre est s.

Soit Φ l'application de $\overline{K}^* \mapsto \overline{K}^*$ définie par $\Phi(z) = z^s$. Alors Φ induit par passage au quotient un morphisme d'espace analytique rigide

$$\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}} \longmapsto \overline{K}^*/q^{s\mathbf{Z}} .$$

On déduit que Φ induit une injection du corps des fonctions q^s-périodiques dans le corps des fonctions q-périodiques défini par :

$$g \longmapsto \widetilde{g} = g \circ \Phi$$

l'image de cette injection est l'ensemble des fonctions q-périodiques invariantes par σ.

Nous pouvons maintenant conclure. Soit f une fonction méromorphe, de périodes $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, de valence ≤ 1 (*i.e.* de valence $\leq s$ relativement à $q^{\mathbf{Z}}$). Puisque f est invariante par σ, il existe donc g fonction q^s-périodique telle que :

$$f(z) = \widetilde{g}(z) = g(z^s), \ \forall z .$$

Si de plus f est de valence ≤ 1 relativement à $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, il est immédiat que g est une fonction q^s-périodique de valence ≤ 1. On en déduit que g, et donc f, sont des constantes.

3. Fonctions thêtas fondamentales normalisées associées aux sous-groupes discrets.

Dans ce paragraphe, on se fixe un corps local K de caractéristique $p > 0$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, nous désignons par q un élément de K^* de valuation strictement positive et v_q la valuation discrète normalisée de K. L'objectif dans ce paragraphe est de préciser quelques propriétés fondamentales satisfaites par les fonctions thêtas normalisées.

La fonction thêta fondamentale normalisée associée au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$ est plus communément décrite par le produit infini

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z) = (z-1)\prod_{n\geq 1}\frac{(1-q^n z)(1-q^n z^{-1})}{(1-q^n)^2}. \tag{3.1}$$

On vérifie que $\theta_{q^{\mathbb{Z}}}$ ou plus simplement θ est une fonction holomorphe sur $\overline{K}^*$ dont les zéros d'ordre 1 sont les éléments de $q^{\mathbb{Z}}$. Elle vérifie la propriété suivante

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^{-1}) = \theta_{q^{\mathbb{Z}}}(qz) = -\frac{1}{z}\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z) \tag{3.2}$$

de sorte que, pour tout élément m de $\mathbf{Z}$, on a

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(q^m z) = (-1)^m q^{\frac{-m(m-1)}{2}} z^{-m}\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z)\ , \ [1].$$

On définit la fonction thêta fondamentale normalisée associée au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}\xi_l^{\mathbb{Z}}$ par le produit suivant

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}\xi_l^{\mathbb{Z}}}(z) = \theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z)\prod_{i=1}^{l-1}\frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z\xi_l{}^i)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(\xi_l{}^i)}. \tag{3.3}$$

Proposition 3.4. *Si $\psi \in \overline{K}^*$ vérifiant $\psi^l = q$, on a l'égalité*

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z) = \theta_{\psi^{\mathbb{Z}}}(z).$$

Démonstration. On remarque qu'on a l'égalité de groupes : $q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}} = \psi^{\mathbb{Z}}$. D'autres part, les deux fonctions suivantes

$$z \to \theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z) \text{ et } z \to \theta_{\psi^{\mathbb{Z}}}(z) \overset{\text{def}}{=} (z-1)\prod_{n\geq 1}\frac{(1-\psi^n z)(1-\psi^n z^{-1})}{(1-\psi^n)^2}$$

sont holomorphes et admettant les même zéros, donnés par $q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}$, avec la même multiplicité qui est 1.

De plus, elles vérifient

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z\psi) = \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z\psi^l)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z)}\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z) = \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(zq)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z)}\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z) = -z^{-1}\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}(z)$$

et

$$\theta_{\psi^{\mathbb{Z}}}(z\psi) = -z^{-1}\theta_{\psi^{\mathbb{Z}}}(z).$$

Par conséquent, la fonction $\frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}}}{\theta_{\psi^{\mathbb{Z}}}}$ est périodique dont l'ensemble des périodes contient $q^{\mathbb{Z}}\psi^{\mathbb{Z}}$. Donc, elles diffèrent d'une constante multiplicative non nulle et comme elles sont, par définition, normalisées alors elles coincident. D'où la démonstration de la proposition 3.4.

Ceci nous permet de prouver le lemme suivant

Lemme 3.5. *Pour tout point $\gamma \in \overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$ d'ordre l*
(i) *Si $(v_q(\gamma^l), l) = 1$, on pose*

$$\alpha = \textit{ l'inverse de } v_q(\gamma^l) \textit{ modulo } l, \quad \beta = -[v_q(\gamma^\alpha)]$$

Alors la fonction thêta fondamentale normalisée associée au sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$ est donnée par

$$\theta_{\tilde{\gamma}^{\mathbb{Z}}}(z) \text{ où } \tilde{\gamma} = \gamma^{\alpha} q^{\beta}.$$

(ii) *Si* $v_q(\gamma) = 0 \bmod l$, *on a* $\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z) = \theta_{q^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}}(z)$.

(iii) *Le lien entre* $\theta_{q^{\mathbb{Z}}}$ *et* $\theta_{\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}}$ *est donné par :*

$$\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l) = l\theta_{\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}}(z).$$

Démonstration. D'après la proposition 3.4 pour montrer (i), Il suffit de remarquer l'égalité de groupes suivante $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}} = \tilde{\gamma}^{\mathbb{Z}}$.

De même pour montrer (ii), il suffit de remarquer qu'on a l'égalité de groupes suivante $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}} = q^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}$.

Pour montrer le (iii), on considère la fonction

$$z \to \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l)}{l\theta_{\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}}(z)}$$

D'un part, elle est q-périodique de périodes $\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}$. D'autre part, modulo $\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}$, elle admet au plus un pôle et qui est simple. Donc, d'après la proposition 2.9, cette fonction est une constante. Or

$$\lim_{z\to 1} \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l)}{l\theta_{\left(q^{\frac{1}{l}}\right)^{\mathbb{Z}}\xi_l{}^{\mathbb{Z}}}(z)} = 1.$$

D'où le (iii).

4. Formes p-adiques de Jacobi et résultat principal

Dans ce paragraphe, on garde les mêmes notations et hypothèses que dans le pragraphe précedent. Soient l un nombre premier ≥ 2, β un point d'ordre l de $\overline{K^*}/q^{\mathbb{Z}}$, on définit la fonction $D_{q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ par l'égalité

$$D_{q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi) = z^{lv_q(\varphi)} \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}}(z\varphi)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}}(z)\theta_{q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}}(\varphi)}. \tag{4.1}$$

Tout d'abord, précisons quelques propriétés de la fonction $D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$.

Grâce au lemme 1.3 cette fonction est un analogue p-adique à la forme de Jacobi méromorphe $D_L(z;\varphi)$ associée au réseau complexe L. Elle vérifie des propriétés analogues. Celles satisfaites par $D_L(z;\varphi)$ sont précisées dans [4]. D'après (3.1), (3.2), (3.3) et (2.4) (ii), on peut vérifier que $D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\lim_{z\to 1} zD_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi) = \lim_{\varphi\to 1} \varphi D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi) = 1, \tag{4.2}$$

(4.3) analytique par rapport à la première variable et non holomorphe relativement à la seconde variable.
(4.4) ne dépend que de φ modulo $q^{\mathbb{Z}}$.
(4.5) les équations fonctionnelles :

$$D_{q^{\mathbb{Z}}}(zq;\varphi) = \varphi^{-1}q^{v_q(\varphi)}D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$$

(4.6) Symétrie :

$$D_{q^{\mathbb{Z}}}(z^{-1};\varphi^{-1}) = -D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi).$$

$$D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi) = \varphi^{-v_q(z)}z^{v_q(\varphi)}D_{q^{\mathbb{Z}}}(\varphi,z). \tag{4.7}$$

Le but de ce travail est de démontrer qu'elle vérifie deux relations de distribution et d'inversion additives lorsqu'on change de sous-groupe discret. D'une façon plus précise, on a

Théorème principal. *Soient γ et α deux points d'ordre l de $\overline{K^*}/q^{\mathbb{Z}}$, et que l'on a*

$$q^{\mathbb{Z}}\alpha^{\mathbb{Z}} \cap q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}} = q^{\mathbb{Z}} .$$

Alors,on a
(i) *Formule de distribution : Pour tous $z^l \notin q^{\mathbb{Z}}$, $\varphi \notin q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$, on a la relation suivante*

$$\sum_t D_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l;\varphi t) = D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$$

où t parcourt un système complet T de représentants dans $\overline{K^*}$ de $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}/q^{\mathbb{Z}}$.
(ii) *Formule d'inversion : Pour tous $z \notin q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$, $\varphi^l \notin q^{\mathbb{Z}}$, on a la relation suivante*

$$\sum_s D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi s) = lD_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi^l)$$

où s parcourt un système complet de représentants dans $\overline{K^*}$ de $q^{\mathbb{Z}}\alpha^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}/q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$.

Commençons par prouver le résultat suivant

Lemme 4.8. *Pour tous $z \in \overline{K^*} - q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$, $\varphi^l \notin q^{\mathbb{Z}}$, la somme*

$$S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{t\in T} D_{q^{\mathbb{Z}}}(zt;\varphi^l)\varphi^{v_q(t^l)}t^{-v_q(\varphi^l)},$$

ne dépend pas du choix de T. De plus, on a

$$S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z\rho,\varphi) = \varphi^{-v_q(\rho^l)}\rho^{v_q(\varphi^l)}S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi),$$

pour tout $\rho \in q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$.

Démonstration. D'après (4.4), (4.5), (4.6) et la remarque (2.4) (ii) la fonction de t

$$t \mapsto D_{q^{\mathbb{Z}}}(zt;\varphi)\varphi^{v_q(t)}t^{-v_q(\varphi)}, \quad zt \notin q^{\mathbb{Z}}, \tag{4.9}$$

ne dépend que de la classe de t modulo $q^{\mathbb{Z}}$. Nous venons de prouver que $S_{q^{\mathbb{Z}}}$, somme d'expressions du type (4.9), pour $t \in T$, est indépendante du choix du système T de représentants de $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$ modulo $q^{\mathbb{Z}}$.

De plus, comme l'ensemble d'indice $T\mathrm{mod}q^{\mathbb{Z}} = q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}/q^{\mathbb{Z}}$ est invariant par la multiplication de $\rho \in q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$, on a

$$S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z\rho,\varphi)/S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi) = \varphi^{-v_q(\rho^l)}\rho^{v_q(\varphi^l)};$$

d'où l'égalité voulue .

D'autre part, vu le lemme 4.8 et l'identité (4.1), on obtient :

Lemme 4.10 (Lemme des pôles). *Les deux fonctions $z \mapsto D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ et $z \mapsto S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi)$ sont méromorphes, et tous leurs pôles sont simples. On a*

$$\{\textit{pôles de } S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi)\} \subset \{\textit{pôles de } D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi)\} = q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$$

De plus, seuls les points de $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}} - \varphi$ sont des zéros de $z \mapsto D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$; ceux-ci sont tous simples.

Démontrons le théorème principal : On considère la fonction quotient définie par $z \mapsto S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi)/D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$. D'après le lemme 4.8 et la propriété (4.4), cette fonction est périodique pour le réseau de périodes $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$. En outre, le lemme des pôles (4.10) assure que le nombre de ses pôles modulo $q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}$ est inférieur ou égal à 1. d'après Proposition 2.9, ceci n'est possible que si elle est constante. En conclusion, les deux fonctions $z \mapsto D_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi)$ et $z \mapsto S_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi)$ diffèrent d'une constante multiplicative non nulle près. Comme $\lim_{u\to 1}\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(u)/u = 1$, on conclut que

$$\lim_{z\to 1} zS_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z,\varphi) = 1 = \lim_{z\to 1} zD_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi) \ .$$

Ce qui permet de montrer le (i) du théorème principal. La formule d'inversion (ii) est une conséquence immédiate du lemme 3.5) (iii) et de la partie (i) du théorème principal. *Donc le théorème principal est démontré.*

L'identité (4.1) suggère de simplifier par $z^{v_q(\varphi^l)}$ dans les deux membres de l'égalité de distribution (i) fournit par le théorème principal et on obtient le résultat suivant

Corollaire 4.11 (Weber p-adique). *Pour tout point γ de $\overline{K^*}/q^{\mathbb{Z}}$, d'ordre l, on a*

$$\sum_{i=0}^{l-1} z^{v_q(\gamma^{li})}\frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l\varphi\gamma^i)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(z^l)\theta_{q^{\mathbb{Z}}}(\varphi\gamma^i)} = \frac{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z\varphi)}{\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(z)\theta_{q^{\mathbb{Z}}\gamma^{\mathbb{Z}}}(\varphi)}$$