

JACQUES MARTINET

Une famille de réseaux dual-extrêmes

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 9, n° 1 (1997),
p. 169-181

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1997__9_1_169_0

© Université Bordeaux 1, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une famille de réseaux dual-extrêmes

par JACQUES MARTINET¹

RÉSUMÉ. On construit pour tout entier $n \geq 8$ pair un couple dual-extrême (Λ, Λ^*) de réseaux euclidiens de dimension n dont aucun n'est parfait, et tel que l'un d'entre eux seulement soit eutactique.

ABSTRACT. We construct for every even $n \geq 8$ a pair (Λ, Λ^*) of dual-extreme Euclidean lattices of dimension n , such that none of them is perfect and only one is eutactic.

Soit E un espace euclidien de dimension n . L'invariant d'Hermité d'un réseau L de E est $\gamma(L) = \frac{N(L)}{\det(L)^{1/n}}$, où $N(x) = x.x$ pour tout $x \in E$, $N(L) = \min_{x \in L \setminus \{0\}} N(x)$ et le déterminant $\det(L)$ de L est le déterminant de la matrice de Gram $(e_i.e_j)$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de L . Les réseaux extrêmes (Korkine et Zolotareff) sont ceux sur lesquels γ atteint un maximum local. Ils ont été caractérisés par Voronoï comme réseaux parfaits et eutactiques, notions que l'on peut définir ainsi en suivant [B-M] : notons p_F la projection orthogonale sur le sous-espace F de E et posons $p_x = p_{\mathbb{R}x}$ pour $x \in E$ non nul ; soit en outre $S(L) = \{x \in L \mid N(x) = N(L)\}$; un réseau est parfait si les p_x , $x \in S(L)$ engendrent E , et eutactique s'il existe une relation $\text{Id} = \sum_{x \in S(L)} \rho_x p_x$ à coefficients $\rho_x > 0$.

[On retrouve les définitions usuelles en exprimant les p_x dans un couple de bases $(\mathcal{B}^*, \mathcal{B})$ où \mathcal{B} est une base de L ; nous renvoyons à [M], ch. III pour tout ce qui concerne ces questions, ainsi que pour les notions duales rappelées ci-dessous.]

Soit $L^* = \{x \in E \mid \forall y \in E, x.y \in \mathbb{Z}\}$ le réseau dual de L . Comme dans [B-M], on pose $\gamma'(L) = [N(L)N(L^*)]^{1/2} = [\gamma(L)\gamma(L^*)]^{1/2}$. Les réseaux dual-extrêmes sont ceux sur lesquels γ' atteint un maximum local. Disons que L est dual-parfait si les p_x , $x \in S(L) \cup S(L^*)$ engendrent E ,

mots-clefs : Réseaux extrêmes, réseaux dual-extrêmes, vecteurs minimaux.

Manuscrit reçu le 19 décembre 1996

¹Membre du laboratoire d'Algorithmique Arithmétique "A2X", U.M.R. 9936 du C.N.R.S.

et *dual-eutactique* s'il existe une relation $\sum_{x \in S(L)} \rho_x p_x = \sum_{y \in S(L^*)} \rho'_y p_y$ à coefficients $\rho_x, \rho'_y > 0$.

Les réseaux dual-extrêmes ont été caractérisés dans [B-M] comme réseaux dual-parfaits et dual-eutactiques. Il en résulte tout de suite que si Λ est extrême et Λ^* eutactique, alors Λ est dual-extrême, la dual-perfection de (L, L^*) résultant de celle de L et la condition de dual-eutaxie provenant de la conjonction de deux relations de la forme

$$\text{Id} = \sum_{x \in S(L)} \rho_x p_x \quad \text{et} \quad \text{Id} = \sum_{y \in S(L^*)} \rho'_y p_y.$$

À ma connaissance, tous les exemples de réseaux dual-extrêmes trouvés jusqu'à présent l'ont été par ce procédé. Nous construisons ici pour toute dimension paire $n \geq 8$ des exemples de couples dual-extrêmes (Λ, Λ^*) dans lesquels ni Λ , ni Λ^* n'est parfait, et tels que Λ n'est pas eutactique. (Le fait que Λ^* soit eutactique n'apporte alors aucune aide à la démonstration de la dual-eutaxie.)

Il est démontré dans [B-M] que de tels exemples n'existent pas en dimension $n \leq 4$. Le cas des dimensions impaires $n \geq 5$ et celui de la dimension 6 demeurent ouverts. Si de tels exemples n'existaient pas dans les dimensions 5, 6 et 7, il en résulterait en particulier que la "constante de Bergé-Martinet" $\gamma' = \sup_{\text{rg } L=n} \gamma'(L)$ aurait la valeur atteinte par γ' sur \mathbb{D}_5 , \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7 . Ce résultat, que nous conjecturons, entraînerait d'intéressantes inégalités. Pour l'instant, γ' n'est connue que dans les dimensions 1, 2, 3, 4 et 8.

Les réseaux servant d'exemples ont été trouvés lors d'une étude dans la ligne de Watson ([W]) de réseaux Λ contenant un sous-réseau L de même norme, en l'occurrence une classe de réseaux de la forme $\langle L, \frac{e_1 + \dots + e_n}{d} \rangle$. Le fait que l'on puisse définir cette classe en prenant les produits scalaires $e_i \cdot e_j$ égaux pour $j \neq i$ résulte du lemme 7 de l'article [Z] de Zaharova. L'existence de cette classe pour $n = 2d$ résulte de la proposition 3.2 ci-dessous.

[Dans la classification de [Z], il manque des classes, correspondant à des quotients Λ/Λ' de type (4, 2). Nous reviendrons ailleurs sur cette question.]

Finalement, on remarque que notre construction du réseau dual de Λ se fait par collage (adjonction d'un *glue vector*) à un réseau de la forme $\mathbb{A}_{n-1} \perp \lambda \mathbb{A}_1$. Des exemples en d'autres dimensions que les dimensions $n \geq 8$ pourraient probablement être obtenus en partant de réseaux $\mathbb{A}_p \perp \lambda \mathbb{A}_{p'}$.

Le problème crucial est la détermination des vecteurs minimaux des réseaux Λ^* et Λ ; elle se fait aux numéros 2 et 3 en utilisant deux réseaux auxiliaires, M d'indice 2 dans Λ^* , et L d'indice $d = \frac{n}{2}$ dans Λ .

1. Soit A un anneau commutatif, et soit $M(n, x, y) \in \mathcal{M}_n(A)$ la matrice carrée d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à x et les autres à y . Ces matrices constituent une algèbre commutative de rang 2 sur A , les lois étant

$$\begin{aligned}
 &M(n, x, y) + M(n, x', y') = M(n, x + x', y + y') \text{ et} \\
 (1.1) \quad &M(n, x, y) M(n, x', y') = M(n, xx' + (n - 1)yy', xy' + x'y + (n - 2)yy').
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 &\det(M(n, x, y)) = (x - y)^{n-1}(x + (n - 1)y) \text{ et} \\
 (1.2) \quad &M(n, x, y)^{-1} = M\left(n, \frac{x + (n - 2)y}{(x - y)(x + (n - 1)y)}, \frac{-y}{(x - y)(x + (n - 1)y)}\right)
 \end{aligned}$$

lorsque le déterminant est non nul.

Considérons en particulier les matrices de la forme

$$M(n, 1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & \dots & \theta \\ \theta & 1 & \dots & \theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \theta & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Elles représentent une forme quadratique définie positive pour $\theta \in]-\frac{1}{n-1}, 1[$. On peut alors les interpréter comme matrices de Gram d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E de dimension n . On note L_θ le réseau de E de base \mathcal{B} .

Le groupe symétrique S_n opère sur \mathcal{B} , et cette opération conserve les produits scalaires $e_i \cdot e_j$. Ainsi, on peut identifier $\{\pm \text{Id}\} \times S_n$ à un sous-groupe de $\text{Aut}(L_\theta)$, qui sont des G -réseaux au sens de [M], ch. XI pour la représentation de $G = S_n$ définie par l'opération sur \mathcal{B} .

La formule de multiplication montre que $\theta \mapsto \theta^* = \frac{-\theta}{(n-2)\theta+1}$ est une involution de l'intervalle $]-\frac{1}{n-1}, 1[$, qui transforme $M(n, 1, \theta)$ en une matrice $M(n, 1, \theta^*)$ proportionnelle à son inverse. Comme $2M(n, 1, \frac{1}{2})$ est une matrice de Gram du réseau \mathbb{A}_n , on voit que l'involution échange les extrémités

de l'intervalle $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, lesquelles représentent les réseaux Λ_n^* et Λ_n renormalisés à la norme 1. Ces deux réseaux sont G -parfaits, et l'exemple 5.4 de [M], ch. XIII, qui interprète $\theta \mapsto L_\theta$ comme un chemin de l'algorithme de Voronoï pour G , montre que L_θ est de norme 1 sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, et n'a pas d'autre vecteurs minimaux sur l'intervalle ouvert que les vecteurs $\pm e_i$. Il en résulte l'égalité $\text{Aut}(L_\theta) = \{\pm \text{Id}\} \times S_n$ pour tout $\theta \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}[$, sauf au point fixe $\theta = 0$ de l'involution, correspondant au réseau isodual \mathbb{Z}^n .

2. On considère maintenant le réseau $\Lambda_\theta = \Lambda$ obtenu par adjonction du vecteur $e = \frac{e_1 + \dots + e_n}{d}$ au réseau $L = L_\theta$ de base \mathcal{B} , où $d \geq 3$ est entier. On s'intéresse au cas où la norme reste égale à 1. Le calcul fait ci-dessous de la norme des vecteurs $e - e_i$ montre que ce n'est possible que si l'on a $n \geq 2d$, l'égalité $n = 2d$ ayant lieu si et seulement si les n vecteurs $e - e_i$ sont aussi de norme 1 ; c'est un cas particulier d'un résultat de Watson ([W]).

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas $n = 2d$.

On a $e \cdot e_i = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n e_i \cdot e_j = \frac{1+(2d-1)\theta}{d}$, d'où l'on déduit pour la norme des vecteurs $e - e_{i_1} - \dots - e_{i_k}$, $0 \leq k \leq n$ la valeur

$$(2.1) \quad N(e - e_{i_1} - \dots - e_{i_k}) - 1 = (k-1) \frac{d-2 + ((k-4)d+2)\theta}{d}.$$

Supposons toujours Λ de norme au moins 1. En faisant $k = 1$, on obtient les égalités $N(e - e_i) = 1$; en faisant $k = 0$ et $k = 2$, on obtient l'encadrement

$$(2.2) \quad a = \frac{d-2}{2(2d-1)} \leq \theta \leq b = \frac{d-2}{2(d-1)},$$

qui suffit à assurer les inégalités $N(e - e_{i_1} - \dots - e_{i_k}) \geq 1$ pour tout k .

Les vecteurs $f_1 = e, f_2 = e_2, \dots, f_n = e_n$ constituent une base de Λ dont la base duale est formée des vecteurs $f_1^* = de_1^*$ et $f_i^* = e_i^* - e_1^*$ pour $i \geq 2$. Les égalités

$$(2.3) \quad e_1^* + \dots + e_n^* = ne_1^* + \sum_{i=1}^n (e_i^* - e_1^*) = 2f_1^* + \sum_{i=2}^n f_i^*,$$

montrent que les vecteurs $e' = e_1^* + \dots + e_n^*$ et $e_j^* - e_i^*$ ($1 \leq i < j \leq n$) engendrent un sous-réseau M d'indice 2 de Λ^* . Notons α et β les valeurs

respectives des produits scalaires $e_i^*.e_i^*$ et $e_i^*.e_j^*$ ($j \neq i$). Étant donnés des indices i, j, k distincts, on a $N(e_i^* - e_j^*) = 2\alpha - 2\beta$ et $(e_i^* - e_j^*). (e_i^* - e_k^*) = \alpha - \beta$. Comme e' est orthogonal aux vecteurs $e_i^* - e_j^*$, on voit que M est semblable à $P_\lambda = A_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}A_1$, avec $\lambda = \frac{N(e')}{N(e_i^* - e_j^*)} = \frac{n(\alpha + (n-1)\beta)}{2(\alpha - \beta)}$.

En utilisant 1.2 avec $x = 1$ et $y = \theta$, on trouve

$$\alpha = \frac{1 + (n - 2)\theta}{(1 - \theta)(1 + (n - 1)\theta)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-\theta}{(1 - \theta)(1 + (n - 1)\theta)},$$

d'où

$$(2.4) \quad \alpha - \beta = \frac{1}{1 - \theta} \quad \text{et} \quad \alpha + (n - 1)\beta = \frac{1}{1 + (n - 1)\theta},$$

et finalement

$$(2.5) \quad \lambda = \frac{n(1 - \theta)}{2(1 + (n - 1)\theta)},$$

fonction décroissante de θ , égale à 1 en $c = \frac{n - 2}{3n - 2} = \frac{d - 1}{3d - 1}$.

Avec les notations de 2.2, on a $a < c < b$ pour $d \geq 4$ et $a < c = b$ pour $d = 3$. Dans ce dernier cas, que nous écartons dans la suite, on voit facilement que Λ est semblable au réseau E_6^* (on peut utiliser par exemple la matrice de Gram qui figure dans [C-S1]).

Selon que l'on a $\lambda < 1$, $\lambda > 1$ ou $\lambda = 1$, $S(M)$ est égal à $S' = \{\pm(e_1^* + \dots + e_n^*)\}$, à $S'' = \{\pm(e_j^* - e_i^*), j \neq i\}$ ou à $S' \cup S''$, d'où en particulier $s(M) = 1$, $s(M) = \frac{n(n-1)}{2}$ ou $s(M) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Munissons l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} de sa base canonique orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On peut alors identifier $A_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}A_1$ au réseau de base $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_0 - \varepsilon_{n-1}, \sqrt{2\lambda}\varepsilon_n)$ de l'hyperplan H d'équation $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$. On définit une similitude φ de E sur H en appliquant $e_i^* - e_1^*$ sur $\varepsilon_0 - \varepsilon_i$ et e' sur $\sqrt{2\lambda}\varepsilon_n$. On a alors $\varphi(M) = A_{n-1} \perp \sqrt{\lambda}A_1$, et, en tenant compte de l'expression de f_1^* donnée en 2.3, on voit que $\varphi(L^*) = \varphi(M) \cup (g + \varphi(M))$, avec $g = \frac{n\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_{n-1} + \sqrt{2\lambda}\varepsilon_n}{2}$.

Posons $\varepsilon'_n = \sqrt{2}\varepsilon_n$.

2.6. PROPOSITION. *Pour tout $d \geq 4$, on a $S(\Lambda^*) = S(M)$.*

Démonstration. Modulo M , on a

$$g \equiv g' = \frac{\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{d-1} - \varepsilon_d - \dots - \varepsilon_{n-1} + \sqrt{\lambda}\varepsilon'_n}{2},$$

et il est clair que g' est l'un des vecteurs de $g+M$ de longueur minimale. On a donc, pour tout $x \in \Lambda \setminus M$, $N(x) \geq N(g') = \frac{n+2\lambda}{4} = \frac{d+\lambda}{2} > 2$. \square

3. Nous revenons maintenant au réseau Λ , dont nous déterminons la norme en utilisant les propriétés du couple (M, M^*) . On a $[\Lambda^* : M] = [M^* : \Lambda] = 2$, et $\varphi' = \varphi^{-1}$ applique $P_\lambda^* = \mathbb{A}_{n-1}^* \perp \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\mathbb{A}_1$ sur M^* . On a $\varphi(\Lambda^*) = \langle M^*, g' \rangle$, donc

$$\varphi'(\Lambda) = \{z \in P_\lambda^* \mid g'.z \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Posons $\varepsilon' = \sum_{j=0}^d \varepsilon_j$, $\varepsilon'' = \sum_{j=d}^{n-1} \varepsilon_j$, $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, et écrivons les éléments $z \in P_\lambda^*$ sous la forme $z = x + \frac{q}{\sqrt{2\lambda}}\varepsilon'_n$, $x \in \mathbb{A}_{n-1}^*$, $q \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$(3.1) \quad z \in \varphi'(\Lambda) \Leftrightarrow x.(\varepsilon' - \varepsilon'') + q \equiv 0 \pmod{2}.$$

Nous aurons besoin de quelques propriétés du réseau \mathbb{A}_{n-1}^* .

Il y a n couples de vecteurs minimaux de \mathbb{A}_{n-1}^* , représentés par les vecteurs $g_i = -\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{n}$ ($0 \leq i \leq n-1$), de somme nulle, de norme $\frac{n-1}{n}$, et les autres vecteurs non nuls de \mathbb{A}_{n-1}^* sont de norme au moins $\frac{2n-4}{n}$, cette valeur étant atteinte sur les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples $\pm(g_i - g_j)$, ($0 \leq i < j \leq n$) ; ce résultat, certainement bien connu, peut se vérifier en interprétant \mathbb{A}_m^* , ($m \geq 2$) comme la projection orthogonale de \mathbb{Z}^{m+1} sur l'hyperplan contenant \mathbb{A}_m , ce qui revient à écrire la forme quadratique correspondante (renormalisée au minimum n) sous la forme $\sum_{i=1}^m x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)^2$. En outre, les vecteurs g_1, \dots, g_n constituent une base de \mathbb{A}_{n-1}^* .

3.2. PROPOSITION. *Le réseau Λ est de norme 1 pour tout θ de l'intervalle fermé $[a, b]$, et n'a pas d'autres vecteurs minimaux sur l'intervalle ouvert que les $2n$ couples $\pm e_i, \pm(e - e_i)$.*

Démonstration. On a $g_i.(\varepsilon' - \varepsilon'') = \pm 1$. Donc, pour $x = \sum_{i=1}^n a_i g_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, la congruence 3.1 s'écrit $\sum a_i \equiv q \pmod{2}$. Par conséquent, les vecteurs minimaux de $\varphi'(\Lambda)$ sont à rechercher parmi les vecteurs de l'un des trois types suivants :

- (1) $q = 0$, deux des a_i valent 1 ou -1 , et les autres sont nuls.
- (2) $q = \pm 2$, et les a_i sont tous nuls.
- (3) $q = \pm 1$, l'un des a_i vaut ± 1 , et les autres sont nuls.

Comme φ applique $e_1^* - e_2^*$, de norme $2(\alpha - \beta) = \frac{2}{1-\theta}$ (formule 2.4), sur un vecteur minimal de \mathbb{A}_{n-1} , φ a pour rapport de similitude $\sqrt{1-\theta}$.

Dans le cas (1), les vecteurs correspondants de Λ sont de norme $N_1 = (1 - \theta) \frac{2n-4}{n}$, et l'inégalité $N_1 \leq 1$ n'est possible que pour $\theta \geq 1 - \frac{n}{2n-4} = 1 - \frac{d}{2d-2} = \frac{d-2}{2(d-1)} = b$. Dans le cas (2), les vecteurs correspondants de Λ sont de norme $N_2 = \frac{2(1-\theta)}{\lambda}$, et l'inégalité $N_2 \leq 1$ n'est possible que pour $\frac{2(1-\theta)}{\lambda} \leq 1$. En utilisant 2.5, on voit que cette inégalité équivaut à $\theta \leq \frac{d-2}{2n-1} = a$.

Dans le cas (3), la norme est

$$N_3 = (1 - \theta) \left(\frac{n-1}{n} + \frac{2}{\lambda} \right) = (1 - \theta) \left(\frac{n-1}{n} \right) + \frac{1 + (n-1)\theta}{n} = 1.$$

Il y a exactement $2n$ couples de tels vecteurs, représentés par les vecteurs $g_i \pm \frac{e'_i}{\sqrt{2\lambda}}$, qui correspondent nécessairement aux $2n$ couples $\pm e_i, \pm(e - e_i)$ de vecteurs de norme 1 de Λ . \square

3.3. Remarque. On peut encore interpréter le chemin $\theta \mapsto \Lambda_\theta$ ($\theta \in [a, b]$) comme un chemin de voisinage pour l'algorithme de Voronoï relatif au groupe S_n .

4. On a identifié au n°1 le groupe $\text{Aut}(L_\theta)$ du réseau L_θ de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ au produit direct $\{\pm \text{Id}\} \times S_n$. Ce groupe invarie $e = \frac{e_1 + \dots + e_n}{d}$, et s'identifie donc à un sous-groupe de $\text{Aut}(\Lambda_\theta)$.

4.1. PROPOSITION. Soit $\sigma \in \text{GL}(E)$ l'application définie par $\sigma(e_i) = e - e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, pour tout $\theta \in]a, b[$, σ est un automorphisme d'ordre 2 de $\Lambda = \Lambda_\theta$, et l'on a $\text{Aut}(\Lambda) = \{\pm \text{Id}\} \times \{\text{Id}, \sigma\} \times S_n$. En outre, $\text{Aut}(\Lambda)$ est transitif sur $S(\Lambda)$.

Démonstration. On a $\sigma(e) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n (e - e_i) = \frac{n}{d}e - e = e$. Pour tout i , on a donc $\sigma^2(e_i) = \sigma(e - e_i) = e - (e - e_i) = e_i$, ce qui prouve que $\sigma^2 = \text{Id}$. Comme σ commute avec S_n , le groupe G engendré par $\sigma, -\text{Id}$ et S_n est bien le produit direct des trois sous-groupes de l'énoncé. Il est clair que G opère transitivement sur $S(\Lambda)$.

Les produits scalaires $e.e_i$ sont visiblement indépendants de i , et l'on a

$$N(e) = e \cdot \frac{1}{d} \sum_i e_i = \frac{1}{d} \sum_i e.e_i = 2e.e_1.$$

Donc, quels que soient les indices i et j , on a $\sigma(e_i).\sigma(e_j) = (e - e_i).(e - e_j) = N(e) - 2e.e_1 + e_i.e_j = e_i.e_j$, ce qui prouve que σ est une isométrie.

Soit $\tau \in \text{Aut}(\Lambda)$. Par transitivité, il existe $\tau_1 \in G$ tel que $\tau' = \tau\tau_1$ fixe e_1 . Pour tout $i \geq 2$, $\tau'(e_i)$ est de l'une des formes $e_j, -e_j, e - e_j$ ou

$-(e - e_j)$. On vérifie tout de suite que l'égalité $e_1 \cdot \tau'(e_i) = \theta$ n'est possible que lorsque $\tau'(e_1)$ est l'un des vecteurs e_j , ce qui prouve que $\text{Aut}(\Lambda)$ est réduit à G . \square

[Variante : On a $\text{Aut}(\Lambda) = \text{Aut}(\Lambda^*) \simeq \text{Aut}(\mathbb{A}_{n-1}) \times \text{Aut}(\mathbb{A}_1)$, et donc $|G| = |\text{Aut}(\Lambda)|$.]

5. Nous nous occupons maintenant des questions d'extrémalité. Rappelons que $p_x \in \text{End}^s(E)$ désigne la projection orthogonale sur la droite de E portée par le vecteur non nul x ; on a $p_x(y) = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$.

Le groupe $O(E)$ opère sur $\text{End}^s(E)$ par $\tau u = \tau u \tau^{-1}$; dans le cas des projections, on a $\tau p_x = p_{\tau(x)}$.

Posons $u = \sum_{i=1}^n p_{e_i}$ et $v = \sum_{i=1}^n p_{(e-e_i)}$. Avec les notations de 4.1, on a $\sigma \cdot u = v$.

5.1. LEMME. On a $u = v$. [On démontre en appendice que, pour $a < \theta < b$, c'est la seule relation de perfection ; autrement dit, le rang de perfection de Λ est égal à $2n - 1$ sur cet intervalle.]

Démonstration. Il suffit de vérifier cette égalité sur les vecteurs de B^* . On a $p_{e_i}(e_i^*) = e_i$ et $p_{e_i}(e_j^*) = 0$ pour $j \neq i$, d'où $u(e_j^*) = e_j$.

On a de même $p_{e-e_i}(e_j^*) = (e \cdot e_j^* - e_i \cdot e_j^*)(e - e_i)$, donc $p_{e-e_i}(e_i^*) = (\frac{1}{d} - 1)(e - e_i)$ et $p_{e-e_i}(e_j^*) = \frac{1}{d}(e - e_i)$ si $j \neq i$, d'où $v(e_j^*) = (\frac{1}{d} - 1)(e - e_j) + \sum_{i \neq j} \frac{1}{d}(e - e_i) = e_j$ par un calcul immédiat. \square

[Variante : On utilise le fait que le carré extérieur de la représentation de S_n définie par E ne contient qu'une fois la représentation unité.]

5.2. THÉORÈME. Supposons $d \geq 4$ et prenons $\theta = c$ (i.e., $\Lambda = \Lambda_c$ avec $c = \frac{d-1}{3d-1}$). Alors, Λ est dual-extrême, mais ni Λ , ni Λ^* ne sont parfaits, et Λ n'est pas eutactique.

Démonstration. Il est clair que ni Λ_θ , ni Λ_θ^* ne sont parfaits sur $]a, b[$, car on a $s(\Lambda) = 2n < \frac{n(n+1)}{2}$ et $s(\Lambda^*) = \frac{n(n-1)}{2} < \frac{n(n+1)}{2}$. En revanche, ils sont dual-parfaits sur tout l'intervalle : en effet, les vecteurs $e_i^* - e_j^*$ forment une configuration parfaite de dimension $n - 1$ (perfection du réseau \mathbb{A}_{n-1}), et les n vecteurs e_i sont indépendants et n'appartiennent pas à l'hyperplan engendré par les précédents ; on conclut à l'aide de [M], ch. III, prop. 5.3, (3) (qui n'utilise pas le fait qu'il s'agisse de vecteurs minimaux d'un même réseau).

Aucun des réseaux Λ_θ n'est eutactique : sinon, vu la transitivité de $\text{Aut}(\Lambda)$ sur $S(\Lambda)$, on aurait une relation de la forme $\text{Id} = \lambda(u + v)$, et donc,

vu le lemme 5.1, de la forme $\text{Id} = \mu u = \mu \sum_{i=1}^n p_{e_i}$, ce qui est impossible car les droites d'une configuration eutactique de n droites doivent être deux à deux orthogonales, cf. [M], ch. III, prop. 6.10, (3). (En revanche, Λ^* est eutactique, puisque $S(\Lambda^*) \sim S(\mathbb{A}_{n-1}) \perp S(\mathbb{A}_1)$.)

Restreignons-nous maintenant au cas de $\theta = c$.

Pour prouver la dual-eutaxie, on utilise un argument de moyenne, montrant que, s'il existe une relation $\sum_{x \in S(\Lambda)} \rho_x p_x = \sum_{y \in S(\Lambda^*)} \rho_y p_y$ à coefficients ρ_x, ρ'_y positifs, il existe une telle relation ayant des coefficients positifs et constants sur les orbites de $\text{Aut}(\Lambda)$, cf. [M], ch. III, prop. 8.8.

Ici, il y a une unique orbite ω dans $S(\Lambda)$ et deux orbites ω'_1 et ω'_2 dans $S(\Lambda^*)$ formées des vecteurs $\pm(e_i^* - e_j^*)$ et $\pm(e_1^* + \dots + e_n^*)$. On doit considérer les sommes des projections orthogonales sur les directions de vecteurs minimaux, et l'on peut remplacer la somme sur ω_1 par $u = \sum_{i=1}^n p_{e_i}$ (lemme 5.1).

Posons $w = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{e_i^* - e_j^*}$ et $w' = p_{e_1^* + \dots + e_n^*}$. On cherche les relations de dual-eutaxie de la forme $u = \rho w + \rho' w'$, et, vu l'invariance de u, w, w' sous $\text{Aut}(\Lambda)$, il suffit de tester l'égalité sur un vecteur de E dont l'orbite sous $\text{Aut}(\Lambda)$ engendre E . Faisons-le pour e_1 . On pose $N^* = N(\Lambda^*) (= \frac{2}{1-\theta})$.

On a $p_{e_1}(e_1) = e_1$, $p_{e_i}(e_1) = \theta e_1$ ($i > 1$), donc $u(e_1) = e_1 + \sum_{i=2}^n \theta e_i$. De même,

$$w(e_1) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(e_i^* - e_j^*) \cdot e_1}{N^*} (e_i^* - e_j^*) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{N^*} (e_1^* - e_j^*)$$

et $w'(e_1) = \frac{1}{N^*} (e_1^* + \dots + e_n^*)$.

En faisant les produits scalaires avec e_1 et avec un autre vecteur e_i (au choix), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 1 + (n-1)\theta^2 &= \frac{n-1}{N^*} \rho_1 + \frac{1}{N^*} \rho_2 \\ 2\theta + (n-2)\theta^2 &= -\frac{1}{N^*} \rho_1 + \frac{1}{N^*} \rho_2 \end{aligned}$$

dont l'unique solution est $\rho_1 = \frac{N^*}{n} (1 - \theta)^2$ et $\rho_2 = \frac{N^*}{n} (1 + (n-1)\theta)^2$.

On a donc construit une relation de dual-eutaxie à coefficients strictement positifs. \square

On remarque que les réseaux Λ_c sont rationnels, c'est-à-dire proportionnels à des réseaux entiers. On sait (Bergé, [B]) que les réseaux dual-extrêmes sont algébriques. Il serait intéressant d'exhiber des réseaux dual-

extrêmes qui soient algébriques irrationnels. Noter ([B-M]) que de tels réseaux n'existent pas en dimension $n \leq 4$.

Voici les principaux invariants de réseaux Λ_c . Comme il s'agit de réseaux rationnels, on peut considérer la plus petite norme N qui les rend entiers, et l'invariant de Smith $\text{Smith}(\Lambda)$ de Λ , suite des diviseurs élémentaires du quotient Λ^*/Λ une fois Λ renormalisé à $N(\Lambda) = N$; le produit de m_1 groupes cycliques d'ordre a_1 , de m_2 groupes cycliques d'ordre a_2 , ... est noté $a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \dots$, et r désigne le rang de perfection de Λ , dimension du sous-espace de $\text{End}^s(E)$ engendré par les projections orthogonales sur les s directions de vecteurs minimaux. Enfin, on note s^* , r^* , N^* les quantités analogues relatives à Λ^* .

Invariants de Λ_c	$s = 2n$	$r = 2n - 1$	$s^* = \frac{n(n-1)}{2} + 1$	$r^* = s^*$
	d impair :	$N = \frac{3d-1}{2}$	Smith = d^{n-1}	$N^* = 2$.
	d pair :	$N = 3d - 1$	Smith = $4d \cdot (2d)^{n-2}$	$N^* = 4$.

On a $\gamma'(\Lambda_c)^2 = \frac{3d-1}{d} = 3 - \frac{2}{n}$ pour tout $d \geq 3$, valeur conjecturale de $\gamma_6'^2$ dans le cas $d = 3$, mais modeste dans les dimensions supérieures en comparaison avec les exemples de [C-S2] ou de [Mar], ch. XIV. Toutefois, cet exemple surpasse \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_n , pour lesquels on a $\gamma'(\mathbb{A}_n)^2 = \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$ et $\gamma'(\mathbb{D}_n)^2 = 2$.

6. L'étude des réseaux Λ_b (i.e., pour $\theta = b = \frac{d-2}{2(d-1)}$) présente quelque intérêt. Il résulte de 2.1 et de la démonstration de la prop. 3.2 que l'on a $s = \frac{n(n+3)}{2}$, les couples de vecteurs minimaux étant représentés par les vecteurs e_i , $e - e_i$ et $e - e_j - e_k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j < k \leq n$. On a $s^* = 1$ (c'est le cas $\lambda < 1$), et l'hyperplan H orthogonal à cette unique direction de vecteurs minimaux coupe Λ suivant un réseau Λ' de dimension $n - 1$, dont le dual Λ'^* est la projection orthogonale de Λ^* sur H . C'est donc un réseau semblable au réseau obtenu en supprimant dans les vecteurs de $\varphi(L^*)$ la composante portée par ε_n . On reconnaît là le réseau \mathbb{A}_{n-1}^2 de Coxeter (les réseaux \mathbb{A}_m^r , $r|m+1$ sont décrits dans [M], ch. V, § 2). Il en résulte que Λ' est semblable au réseau $\mathbb{A}_{n-1}^{n/2}$ de Coxeter, réseau parfait, avec $s = \frac{n(n-1)}{2}$, de groupe d'automorphismes $\{\pm \text{Id}\} \times S_n$, dont les vecteurs minimaux sont les $\pm(e - e_i - e_j)$, $i < j$. On en déduit que Λ lui-même est parfait, vu qu'il possède n vecteurs minimaux indépendants en dehors de l'hyperplan de Λ' , par exemple les n vecteurs e_i .

D'autre part, comme il y a au plus deux orbites de vecteurs minimaux, on peut, compte tenu du lemme 5.1, tester l'eutaxie en recherchant des

relations de la forme

$$\text{Id} = \alpha \sum_{i < j} p_{e - e_i - e_j} + 2\beta \sum_i p_{e_i}.$$

La trace fournit la relation $n = \frac{n(n-1)}{2}\alpha + 2n\beta$; en déterminant β par composition avec la projection sur e (vecteur orthogonal aux $e - e_i - e_j$), on obtient la relation

$$\text{Id} = \frac{2\theta}{1 + (n-1)\theta} \sum_{i < j} p_{e - e_i - e_j} + \frac{1}{2(1 + (n-1)\theta)} \sum_i p_{e_i} + p_{e - e_i},$$

qui montre que Λ_b est eutactique, donc extrême.

Ce résultat est encore valable pour $d = 3$, où Λ' est semblable à \mathbb{A}_5^3 et Λ à \mathbb{E}_6^* . Pour $d = 4$, Λ' est semblable à \mathbb{E}_7^* , et Λ à l'unique réseau parfait qui le contient comme section hyperplane de même norme (réseau P_8^7 de Laihem, [L]).

Les invariants des réseaux Λ_b , avec les notations utilisées au numéro 5 pour Λ_c , sont $s = \frac{n(n+3)}{2}$, $r = \frac{n(n+1)}{2}$, $s^* = r^* = 1$, $N = 2d - 2$, $N^* = 2d$ si $d \equiv \pm 1 \pmod 3$ et $N^* = \frac{2d}{3}$ si $d \equiv 0 \pmod 3$; l'invariant de Smith dépend de d modulo 6.

L'énoncé suivant résume l'essentiel de ce qui précède :

6.1. THÉORÈME. *Pour tout $n \geq 6$, le réseau Λ_b est un réseau extrême dont les sections hyperplanes les plus denses sont semblables au réseau $\mathbb{A}_{n-1}^{n/2}$ de Coxeter.*

Appendice : un calcul de rang de perfection

Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , soit $d \in [2, n]$ un entier, et soit $e = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{d}$. On se propose de calculer le rang de perfection de la famille $e_i, e - e_i$, justifiant la remarque qui accompagne le lemme 5.1.

A1. PROPOSITION. *Le rang de perfection de t vecteurs pris parmi les $2n$ vecteurs $e_i, e - e_i$ est égal à t , sauf si $t = 2n = 4d$, cas dans lequel il est égal à $t - 1 = 2n - 1$.*

Démonstration. On note X_i et Y_i les vecteurs-colonnes des composantes dans \mathcal{B} des vecteurs e_i et $e - e_i$. Le rang de perfection est le rang dans

$\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ du sous-espace engendré par les matrices $X_i^t X_i$ et $Y_i^t Y_i$. Les coefficients $\alpha_{i,j}$ de $X_i^t X_i$ sont nuls sauf $\alpha_{i,i} = 1$, et ceux de $Y_i^t Y_i$ sont $\beta_{i,i} = \frac{(d-1)^2}{d^2}$, $\beta_{i,k} = \beta_{k,i} = \frac{-(d-1)}{d^2}$ pour $k \neq i$ et $\beta_{k,\ell} = \frac{1}{d^2}$ si $k \neq i \neq \ell$.

On considère une relation de dépendance $\sum_{i=1}^n x_i X_i^t X_i + \sum_{i=1}^n y_i Y_i^t Y_i = 0$.

Le calcul des termes diagonaux donne les équations

$$x_i + \frac{(d-1)^2}{d^2} y_i + \frac{1}{d^2} \sum_{j \neq i} y_j = 0$$

et celui des termes non diagonaux les équations

$$-\frac{(d-1)}{d^2} (y_i + y_j) + \frac{1}{d^2} \sum_{k \neq i,j} y_k = 0.$$

En introduisant l'inconnue supplémentaire $y = \sum_{k=1}^n y_k$, on transforme l'équation ci-dessus en $y - d(y_i + y_j) = 0$. En faisant les différences deux à deux de ces équations, on voit que les inconnues y_i doivent être égales, et, finalement, le système de départ est équivalent au système suivant de $2n + 1$ équations à $2n + 1$ inconnues :

$$x_i = -\frac{1}{2d^2} y,$$

$$y_i = \frac{1}{2d} y,$$

$$y = y_1 + \dots + y_n.$$

En remplaçant dans la dernière équation y_i par sa valeur tirée de la relation précédente, on obtient $(1 - \frac{n}{2d})y = 0$.

Si $n \neq 2d$, on a $y = 0$, donc $x_i = y_i = 0$ pour tout i , d'où le résultat dans ce cas. Sinon, la dernière équation est conséquence des précédentes, lesquelles se résolvent en fonction du paramètre y . On a donc dans ce cas une relation de dépendance, qui est unique à proportionnalité près, ce qui prouve d'abord que le rang de perfection de la famille des $2n$ vecteurs $e_i, e - e_i$ est $2n - 1$, puis, vu que cette relation est à coefficients non nuls, que, pour $t < 2n$, le rang de t quelconques d'entre eux est exactement t . \square

REMERCIEMENTS. L'auteur remercie Anne-Marie Bergé pour les discussions qu'il a eues avec elle sur la caractérisation des réseaux dual-extrêmes, ainsi que Jean-Luc Baril et Christian Batut, dont les programmes ont été d'une grande utilité au cours de la phase expérimentale de ce travail ; il remercie également chaleureusement le rapporteur (*referee*) pour sa lecture détaillée de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] A.-M. Bergé, *Minimal vectors of pairs of dual lattices*, J. Number Theory **52** (1995), 284–298.
- [B-M] A.-M. Bergé, J. Martinet, *Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres*, J. Number Theory **32** (1989), 14–42.
- [C-S] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, Grundlehren n°290, Heidelberg, 1988, (seconde édition : 1993).
- [C-S1] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Low-dimensional lattices. III. Perfect forms*, Proc. Royal Soc. London **A 418** (1988), 43–80.
- [C-S2] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *On Lattices Equivalent to Their Duals*, J. Number Theory **48** (1994), 373–382.
- [L] M. Laïhem, *Thèse, Bordeaux*, 1992.
- [M] J. Martinet, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*, Masson, Paris, 1996.
- [W] G.L. Watson, *On the minimum points of a positive quadratic form*, Mathematika **18** (1971), 60–70.
- [Z] N.V. Zahareva, *Centerings of 8-dimensional lattices that preserve a frame of successive minima*, Proc. Steklov Inst. math. **152** (1982), 107–134, (original en russe : 1980).

Jacques MARTINET
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques
351, cours de la Libération
F-33405 TALENCE cedex
e-mail : martinet@math.u-bordeaux.fr