JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JOHN BOXALL

Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variété abéliennes

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 7, nº 1 (1995), p. 111-119

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1995__7_1_111_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **7** *(1995), 111–119*

Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variété abéliennes

par John BOXALL

Introduction

Soit K un corps de nombres, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et soit A une variété abélienne définie sur K. Le celèbre théorème de Mordell-Weil affirme que le groupe abélien $A(K)$ est de type fini; cette assertion avait été démontrée par Mordell [Mo] en 1922 lorsque $K = \mathbf{Q}$ et A est de dimension un. Bientôt après, Weil a étendu le résultat aux jacobiennes des courbes propres et lisses de genre ≥ 1 définies sur un corps de nombres. Jusqu'ici, toutes les démonstrations connues reposent sur la notion de hauteur d'un point dans un espace projectif:– cette notion mesure la complexité arithmétique d'un point dans un espace projectif sur un corps de nombres. Cette idée a été poussée beaucoup plus loin par Nérȯn en 1965: à chaque diviseur D de A (défini sur $\overline{K}$) Néron a associé une hauteur h_D:– il s'agit d'une application de $A(\overline{K})$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ qui s'écrit comme la somme d'une forme quadratique q_D et d'une forme linéaire l_D. Parmi les propriétés les plus remarquables de h_D on peut citer les suivantes:–

(i) Lorsque D est ample, q_D s'étend en une forme définie positive sur $A(K') \otimes \mathbf{R}$ pour toute extension finie K' de K,

(ii) On a: $q_{[-1]^*D} = q_D$ et $l_{[-1]^*D} = -l_D$ pour tout diviseur D. En particulier l_D est identiquement nulle lorsque D est symétrique,

(iii) L'application $D \mapsto h_D$ est un homomorphisme du groupe des diviseurs définis sur $\overline{K}$ à valeurs dans le groupe additif des fonctions à valeurs réelles sur $A(\overline{K})$. Son noyau est le sous-groupe des diviseurs dont un multiple est le diviseur d'une fonction rationnelle sur A.

On a également $h_{\sigma D}(\sigma P) = h_D(P)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$. Comme nous considérons dans toute la suite que D est fixé, nous supposerons désormais que D est défini sur K et encore (bien que cela ne soit pas toujours nécessaire) que D est géométriquement irréductible.

Manuscrit reçu le 19 Mars 1994.

Outre ces propriétés, Néron a établi une décomposition de h_D comme somme de hauteurs locales. Afin de la décrire, pour tout corps de nombres F on désignera par S_F l'ensemble des places (archimédiennes et non-archimédiennes) de F. Pour tout $v \in S_F$ on désigne par F_v le complété de F en v. On désigne par p_v la place de $\mathbf{Q}$ en dessous de v:– lorsque v est une place finie de F on désigne également par p_v la caractéristique du corps résiduel de F en v. On note $\overline{F}_v$ une clôture algébrique fixée de F_v. La hauteur locale de Néron $h_{D,v}$ associée à une place $v \in S_K$ est alors une application de $A(\overline{K}_v) \setminus |D|$ dans $\mathbf{R}$ et la formule de décomposition de Néron peut s'écrire

$$(0,1) \qquad [K : \mathbf{Q}] h_D(P) = \sum_{v \in S_K} [K_v : \mathbf{Q}_{p_v}] h_{D,v}(P) + \kappa_D,$$

où κ_D est une constante et $P \in A(\overline{K})$ n'appartienne pas à $|D|$.

Lorsque v est une place non-archimédienne où A a bonne réduction, $h_{D,v}$ peut être définie ainsi:– soit $M \subseteq \overline{K}_v$ une extension de K_v sur lequel le point P est défini, soit $\mathfrak{O}_M$ l'anneau de valuation de M, soit π_M un générateur de l'idéal maximal de $\mathfrak{O}_M$ (on supposera que l'extension de v à M est discrète) et soit e_M le degré de ramification de M sur $\mathbf{Q}_{p_v}$. Désignons par $\mathcal{A}_v$ le modèle de Néron sur $\mathfrak{O}_v$. D'après les propriétés fondamentales de $\mathcal{A}_v$, le point P s'étend de manière unique en une section $\mathfrak{O}_M \to \mathcal{A}_v$ que nous désignerons également par P. De même, le diviseur D s'étend en un diviseur de Cartier $\mathcal{D}_v$ de $\mathcal{A}_v$. L'image réciproque de $\mathcal{D}_v$ par P s'identifie alors avec un sous $\mathfrak{O}_M$-module libre de rang un de M:– il existe alors un entier $\eta_M(P, D)$ tel que $P^*\mathcal{D}_v = \pi_M^{\eta_M(P,D)} \mathfrak{O}_M$. On a alors

$$(0,2) \qquad h_{D,v}(P) = (\log p_v)\, e_M^{-1} \eta_M(P, D).$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de M. En outre, comme D est défini sur K, alors $h_{D,v}(\sigma P) = h_{D,v}(P)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et pour tout $P \in A(\overline{K})$. Les fonctions $h_{D,v}$ en fait vérifient une liste de propriétés donnée par Néron qui les caractérisent à une constante additive près. Notons que pour P fixé, $h_{D,v}(P)$ ne peut être non-nul que pour un nombre fini de v; on en tire que la somme dans (0,1) est, en réalité, une somme finie.

Lorsque v est une place non-archimédienne où A a mauvaise réduction, cette définition est modifiée en rajoutant une fonction β qui se factorise par le quotient $\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_v^o$, $\mathcal{A}_v^o$ étant la composante neutre de $\mathcal{A}_v$. Enfin lorsque v est archimédienne, $A_{/\overline{K}_v}$ est isomorphe à un tore complexe $\mathbf{C}^g/\Lambda_v$ (avec Λ_v

un réseau convenable dans $\mathbf{C}^g$) et dans ce cas $h_{D,v}(P)$ peut être exprimée à l'aide de fonctions thêta associées au diviseur D. Pour les définitions détaillées, on consultera le travail original de Néron [Né] ou les livres de Lang [La] ou de Serre [Se].

Revenons à la formule (0,1) où il est intéressant de connaître la constante κ_D. Lorsque A est une courbe elliptique et $D = [0]$ cette question a été étudiée par Tate dans une lettre à Serre [Ta]. En réalité, dans la formule (0,1) il est commode de décomposer la constante κ_D comme somme de «constantes locales» $\kappa_{D,v}$ et de remplacer (0,1) par une formule de la forme

$$(0,1') \qquad [K:\mathbf{Q}]h_D(P) = \sum_v [K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]\big(h_{D,v}(P) + \kappa_{D,v}\big);$$

on peut alors se demander s'il existe un choix des $\kappa_{D,v}$ qui est plus naturel que les autres. On parle alors de «normalisation» des hauteurs locales. Dans [Ta], Tate a proposé (lorsque A est une courbe elliptique et $D = [0]$) de telles normalisations. Posons $\lambda_{D,v} = h_{D,v}(P) + \kappa_{D,v}$: parmi les caractérisations proposées par Tate figurent les suivantes:

$$(0,3\mathrm{a}) \qquad \text{si } v \text{ est archimédienne: } \int_{A(\overline{K}_v)} \lambda_{[0],v}(P)d\mu(P) = 0,$$

μ étant une mesure de Haar sur $A(\overline{K}_v)$;

$$(0,3\mathrm{b}) \qquad \text{si } v \text{ est finie: } \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{0\neq P\in A[N]} \lambda_{[0],v}(P) = 0,$$

où $A[N]$ désigne le groupe des points de N-torsion de A.

Il est clair que, si l'intégrale et la limite existent, elles déterminent uniquement les $\kappa_{D,v}$. L'existence de l'intégrale (0,3a) est facile à établir car la fonction $\theta_{[0]}(P, \Lambda_v)$ n'a qu'une singularité logarithmique en 0. En ce qui concerne (0,3b), il est également aisé d'établir l'existence de la limite à l'aide des formules explicites données par Tate: on montre notamment que dans le cas de bonne réduction la limite est nulle si l'on suppose $\kappa_{[0],v} = 0$ (i. e. $\lambda_{[0],v} = h_{[0],v}$). En fait, (0,3b) est valable même lorsque l'on remplace [0] par un diviseur quelconque, au moins si l'on suppose que la limite soit prise sur les N premiers à p_v.

Le but de cet article est d'établir un essai de généralisation de cette dernière observation aux variétés abéliennes de dimension quelconque. Afin d'en donner l'énoncé précis, fixons une place finie v de K où A a bonne réduction et posons $g = \dim A$. Notre but est de démontrer la formule suivante:–

THÉORÈME. *Avec les notations et les hypothèses qui viennent d'être introduites, on a :*

$$(0,4) \qquad \lim_{\substack{N\to\infty \\ p_v \text{ ne divise pas } N}} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P\in A[N], P\notin|D|} h_{D,v}(P) = 0.$$

Nous ignorons si la condition que p_v ne divise pas N peut être supprimée lorsque $\dim A > 1$. En outre, la question de l'existence de la limite (0,4) (et la valeur de l'intégrale analogue à (0,3a) pour les places infinies) reste en suspens pour les places de mauvaises réduction; de même, l'interprétation des valeurs des intégrales analogues à (0,3a) pour les places infinies reste à étudier. Par ailleurs, Hindry [Hi] a récemment démontré que κ_D est liée à la hauteur de D introduite par Philippon dans son travail [Ph].

Esquissons l'idée de la démonstration du théorème. Pour justifier (0,4), il suffit de considérer le cas où D est une variété irréductible sur K_v:– nous aurons besoin alors d'une deuxième interprétation de l'entier $\eta_M(P,D)$ introduit avant (0,2). Pour tout $n \in \mathbf{N}$ désignons par $R_n^{(M)}$ l'anneau artinien local $\mathfrak{O}_M/\pi_M^{n+1}\mathfrak{O}_M$. Si $\mathcal{X}$ est un objet géométrique défini sur $\mathfrak{O}_M$, on désigne par X_n l'objet sur $R_n^{(M)}$ obtenu à partir de $\mathcal{X}$ par extension de scalaires à $R_n^{(M)}$. L'interpretation envisagée de $\eta_M(P,D)$ est alors la suivante:– si D est effectif, alors $\eta_M(P,D)-1$ est le plus grand entier n tel que la section P_n de $A_n = \mathcal{A}\times_{\mathfrak{O}_M} R_n^{(M)}$ se factorise par l'inclusion $D_n \subseteq A_n$. Soit Σ (resp. Σ_n) la réunion des groupes $A[N]$ (resp. $A_n[N]$) des points de N-torsion de A (resp. A_n) pour tout N non-divisible par p_v. On montre, à l'aide d'une idée de Mumford, que le cardinal de $\Sigma_0 \cap D_0(\overline{k})$ est $O(N^{2g-2})$ lorsque N tend vers l'infini. Afin d'en déduire (0,4), il suffit donc de prouver que $\eta_M(P,D)$ est majoré lorsque P parcourt Σ avec $P \notin |D|$. Comme A a bonne réduction en v, tous les éléments de Σ sont définis sur l'extension maximale non-ramifiée K_v^{nr} de K_v. On peut alors prendre $M = K_v^{\mathrm{nr}}$ et considérer $R_n^{(M)}$ comme une algèbre locale de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. L'étude des sections sur $R_n^{(M)}$ peut ainsi être ramenée à l'étude des points rationnels sur $\overline{k}$ d'une variété abélienne définie sur k à l'aide du foncteur de Greenberg [Gr] en imitant une technique due à Raynaud [Ra]. Le § 1 est consacré aux rappels sur le foncteur de Greenberg et la démonstration elle-même est l'objet du § 2.

Dans ce qui suit, la place finie v étant fixée, nous la supprimerons de la notation: ainsi on écrira désormais K à la place de K_v, $\mathfrak{O}$ à la place *de $\mathfrak{O}_v$, p pour la caractéristique du corps résiduel k, $\mathcal{A}$ à la place de $\mathcal{A}_v$, M pour l'extension maximale non-ramifiée de K etc. Il n'y aura plus aucune référence directe au corps de nombres K introduit au début de cette introduction.*

Je remercie L Moret-Bailly et le référé de m'avoir signalé une erreur dans une version précédente de ce travail et d'avoir tiré mon attention au résultat de [Mu-Fo] utilisé dans le §2.

1. Le foncteur de Greenberg

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques résultats du travail de M. J. Greenberg [Gr]. Soit k le corps résiduel de K: pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ on désigne par W_n le schéma en anneaux des vecteurs de Witt de longueur $n+1$ sur k. Rappelons que en tant que schéma, W_n est spec $k[T_0, T_1, \dots T_n]$ muni de deux lois de composition telles que pour toute extension parfaite k' de k, $W_n(k')$ s'identifie avec l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n par rapport à k'. On peut alors considérer $R_n^{(K)}$ (que l'on désignera désormais tout simplement par R_n) comme une $W_n(k)$-algèbre de type fini. Le *foncteur de Greenberg* dont il y est question ici est un foncteur covariant $X \mapsto \overline{X}$ d'une certaine sous-catégorie pleine $\mathbf{Réal}_{/R_n}$ (dont les objets s'appellent les *schémas réalisables*) de la catégorie des schémas sur R_n dans la catégorie $\mathbf{Sch}_{/k}$ des schémas sur k. Ce foncteur satisfait aux propriétés suivantes (notre liste est essentiellement la même que celle donnée par Raynaud [Ra]):

I Si X est réalisable, alors $X\big(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k')\big)$ s'identifie canoniquement avec $\overline{X}(k')$ pour toute extension parfaite k' de k;

II Tout schéma de type fini sur R_n est réalisable et sa réalisation est de type fini sur k;

III Si $X \to Y$ est une immersion fermée et si Y est réalisable, alors X est réalisable et $\overline{X} \to \overline{Y}$ est une immersion fermée;

IV Si S est réalisable et si X et Y sont deux S-schémas qui sont réalisables, alors $X \times_S Y$ est réalisable et sa réalisation est canoniquement isomorphe à $\overline{X} \times_{\overline{S}} \overline{Y}$;

V Si X est un schéma en groupes commutatif, il en est de même pour $\overline{X}$; en plus, si $f : X \to Y$ est un homorphisme de groupes, il en est de même pour $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$; les groupes $X\big(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k')\big)$ et $\overline{X}(k')$ sont alors canoniquement isomorphes pour toute extension parfaite k' de k;

VI Si $X_n \in \mathbf{R\acute{e}al}_{/R_n}$ alors $X_{n-r} = X_n \times_{R_n} R_{n-r}$ est réalisable pour tout $r \leq n$ et il y a une surjection naturelle $\overline{X}_n \to \overline{X}_{n-r}$; tout morphisme $f_n : X_n \mapsto Y_n$ induit un diagramme commutatif:

$$
(1,1) \qquad
\begin{tikzcd}
\overline{X}_n \arrow[r, "\overline{f}_n"] \arrow[d] & \overline{Y}_n \arrow[d] \\
\overline{X}_{n-r} \arrow[r, "\overline{f}_{n-r}"] & \overline{Y}_{n-r}
\end{tikzcd}
$$

VII Si X_n et Y_n sont des schémas en groupes et f est un homomorphisme, alors toutes les flèches dans (1,1) sont des homomorphismes;

Soit $W_\infty(k')$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur infinie de l'extension parfaite k' de k:– on peut alors considérer $\mathfrak{O}$ comme une $W_\infty(k)$-algèbre de type fini et il en est de même pour $W_\infty(k')$ lorsque k' est une extension finie de k.

VIII Si $\mathcal{X}$ est un schéma sur l'anneau de valuation $\mathfrak{O}$ de K tel que $X_n = \mathcal{X} \times_{\mathfrak{O}} W_n(k)$ soit réalisable pour tout n, alors pour toute extension parfaite k' de k, $\mathcal{X}\big(\mathfrak{O} \otimes_{W_\infty(k)} W_\infty(k')\big)$ est en bijection canonique avec $\varprojlim X_n\big(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k')\big)$ et puis avec $\varprojlim \overline{X}_n(k')$, les applications étant les surjections de **VI**;

IX Si $\mathcal{X}$ est un schéma en groupes, les bijections canoniques de **VIII** sont des isomorphismes de groupes.

Notons que selon la propriété **I**, les éléments de $X\big(R_n \otimes W_n(k')\big)$ sont «réalisés» par les points sur k' de $\overline{X}$, ce qui explique la terminologie. En outre, si $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ opère sur $W_n(\overline{k})$ via l'opération naturelle sur $\overline{k}^{n+1}$ et la bijection standard entre $W_n(\overline{k})$ et $\overline{k}^{n+1}$. En prenant l'action triviale de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur R_n, on obtient une action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $X\big(R_n \otimes W_n(\overline{k})\big)$ et l'on en déduit que la bijection de **I** (lorsque $k' = \overline{k}$) est équivariante pour le groupe de Galois de $\overline{k}/k$. De même, si M désigne l'extension maximale non-ramifiée de K, alors les groupes de Galois de $\overline{k}/k$ et de M/K s'identifient canoniquement et les bijections de **VIII** et les isomorphismes de **IX** sont équivariants.

2. Démonstration du théorème

Dans ce paragraphe nous allons donner la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction. On supposera toujours que le diviseur D est une variété irréductible sur K car le cas général s'en déduit en utilisant la formule $\eta_M(P, D \pm D') = \eta_M(P, D) \pm \eta_M(P, D')$. Reprenons les notations déjà introduites vers la fin de l'introduction: sauf que si $P \in A(\overline{K})$ alors $M \subseteq \overline{K}_v$ désigne une extension de K_v sur laquelle P est défini (nous supprimons ainsi momentanément la supposition que M soit l'extension maximale non-ramifiée de K).

Vérifions d'abord que $\eta_M(P, D) - 1$ est bien égal au plus grand entier n tel que la section P_n se factorise par l'inclusion $D_n \subseteq A_n$. Soit $S = \operatorname{spec} \mathfrak{O}_v$ et soit $U = \operatorname{spec} B$ un ouvert affine de $\mathcal{A}$ contenant l'image de S par P et telle que $\mathcal{D}$ soit représenté sur U par un élément f de B. Alors P induit un homomorphisme de $\mathfrak{O}_v$-algèbres $\epsilon_P : B \to \mathfrak{O}_M$. Alors $P \in |D|$ si et seulement si $\epsilon_P(f) = 0$ et si $\epsilon_P(f) \neq 0$ alors $\eta_M(P, D) = \operatorname{ord}_{\pi_M}(\epsilon_P(f))$. L'assertion devient alors claire en tensorisant avec $R_n^{(M)}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Montrons ensuite que le nombre de termes de la somme dans (0,4) est $O(N^{2g-2})$ comme affirmé dans l'introduction. D'après ce qui précède, $\eta_M(P, D) > 0$ si et seulement si $P_0 \in D_0(\overline{k})$ et il suffit donc de montrer que le cardinal de $A_0[N] \cap D_0(\overline{k})$ est $O(N^{2g-2})$ lorsque N tend vers l'infini. Pour ceci on utilise une méthode semblable à la démonstration de la proposition 7.7 de [Mu-Fo]. Soit C une courbe dans A_0 coupant proprement D_0 et contenant l'origine. Alors $A[N] \subseteq N^*C$ et le cardinal de $A_0[N] \cap D_0(\overline{k})$ est donc majoré par la valeur de l'intersection $(N^*C.D_0)$. Or,

$$\begin{aligned} N^{2g}(C.D_0) = N^*(C.D_0) = (N^*C.N^*D_0) & \\ &= \big(N^*C.(\tfrac{N(N+1)}{2} D_0 + \tfrac{N(N-1)}{2} D_0^-)\big) = \\ &= \tfrac{N(N+1)}{2}(N^*C.D_0) + \tfrac{N(N-1)}{2}(N^*C.D_0^-), \end{aligned}$$

où $D_0^- = (-1)^* D_0$ et nous avons utilisé le fait que les diviseurs $N^* D_0$ et $\frac{N(N+1)}{2} D_0 + \frac{N(N-1)}{2} D_0^-$ sont linéairement équivalents [Mu] (p59). Comme D_0 est effectif il en est de même pour D_0^- et donc $(N^*C.D_0^-) \geq 0$. On en déduit immédiatement que le cardinal de $A_0[N] \cap D_0(\overline{k})$ est bien $O(N^{2g-2})$.

Afin de terminer la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction, il suffit alors de montrer que les entiers $\eta_D(P, D)$ demeurent bornés lorsque P parcourt Σ et $P \notin |D|$. Nous allons appliquer la théorie du foncteur de Greenberg aux schémas abéliens $A_n = \mathcal{A} \times_{\operatorname{spec} \mathfrak{O}} \operatorname{spec} R_n$. Soit $\overline{A}_n$ le schéma en groupes sur k correspondant à A_n et soit G_n le noyau de réduction modulo π^{n+1} dans $A(\overline{K})$. Alors on dispose d'isomorphismes:

$$\overline{A}_n(\overline{k}) \simeq A_n\big(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(\overline{k})\big) \simeq \Big(A(\overline{K})/G_n\Big)\,(K^{\mathrm{nr}}).$$

En identifiant $\mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{nr}}/K)$ avec $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$, ces isomorphismes deviennent des isomorphismes de $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$-modules. Désignons par $\overline{G}_n$ le noyau du morphisme $\overline{A}_n \to \overline{A}_0$ de **VI**. Puisque $\overline{A}_0 = A_0$ est une variété abélienne, $\overline{G}_n$ contient le sous-groupe maximal unipotent de $\overline{A}_n$: on sait par ailleurs que $\overline{G}_n$ est tué par multiplication par une certaine puissance p^{λ_n} de p, que l'on suppose minimale par rapport à cette propriété. On en tire que $[p^{\lambda_n}]\overline{A}_n$ est une variété abélienne que l'on désigne par A'_n. Lorsque $n > m$, le morphisme $\overline{A}_n \to \overline{A}_m$ de **VI** induit un morphisme $\rho_{n,m} : A'_n \to A'_m$.

Rappelons que Σ (resp. Σ_n) désigne la réunion des groupes de points de N-torsion de A (resp. de A_n) pour tout N non-divisible par p. Il convient de désigner par Σ'_n le même objet associé à A'_n (ou à $\overline{A}_n$). Notons que, comme A est à bonne réduction, tous les éléments de Σ sont définis sur K^{nr}: on en tire que les $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-modules Σ_n sont isomorphes à Σ pour tout n. On sait que Σ_n est isomorphe à Σ'_n pour tout n et l'on en déduit d'abord que tout les $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$-modules Σ, Σ_n et Σ'_n sont canoniquement isomorphes et ensuite que $\rho_{n,m}$ est une isogénie de A'_n sur A'_m de degré une puissance de p. Soit D'_n l'intersection de $\overline{D}_n$ et de A'_n. D'après **III**, $\overline{D}_n$ est fermé et on en déduit que D'_n est fermé dans A'_n. D'aprés la propriété **I**, $D_n\big(W_n(\overline{k})\big)$ est en bijection canonique avec $\overline{D}_n(\overline{k})$: on en tire que $D_n\big(W_n(\overline{k})\big) \cap \Sigma_n$ est en bijection avec $D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n$. Enfin $\rho_{n,m}$ envoie D'_n dans D'_m si $n > m$ et donc induit une injection de $D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n$ dans $D'_m(\overline{k}) \cap \Sigma'_m$. En particulier, le système d'ensembles $\rho_{n,0}(D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n)$ forme un système décroissant de parties de $D'_0(\overline{k}) \cap \Sigma'_0$.

Puisque tous les éléments de Σ sont définis sur K^{nr}, on peut prendre $M = K^{\mathrm{nr}}$ ce que nous ferons désormais. Notons alors que $R_n^{(M)} \simeq R_n \otimes_{\mathfrak{O}} W_n(\overline{k})$ pour tout n. Pour $n \geq 0$, soit E_n l'ensemble des $P \in \Sigma$ avec $\eta_M(P, D) = n$. Lorsque $n \geq 1$, on sait que $P \in E_n$ équivaut à $P_{n-1} \in D_{n-1}\big(W_{n-1}(\overline{k})\big) \cap \Sigma_{n-1}$ mais $P_{n-1} \notin D_n\big(W_n(\overline{k})\big) \cap \Sigma_n$. En utilisant les bijections qui précèdent, on en tire que E_n (pour $n \geq 1$) est en bijection avec le complémentaire de $\rho_{n,0}(D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n)$ dans $\rho_{n-1,0}(D'_{n-1}(\overline{k}) \cap \Sigma'_{n-1})$. La démonstration du théorème sera donc achevée par celle du lemme suivant:–

LEMME. *Le système $\rho_{n,0}(D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n)$ est stationnaire à partir d'un certain rang n_0, et $\rho_{n,0}(D'_n(\overline{k}) \cap \Sigma'_n)$ est en bijection avec $D(\overline{K}) \cap \Sigma$ pour $n \geq n_0$.*

Démonstration.

Puisque $\rho_{n,m}(D'_n) \subseteq D'_m$ lorsque $m \leq n$, le système $\rho_{n,0}(D'_n)$ de sous-variétés est décroissant. Puisque les variétés abéliennes sont des variétés propres et D'_n est un fermé de A'_n, $\rho_{n,0}D'_n$ est un fermé de $A'_0 = A_0$. Par noethérianité, la suite $\rho_{n,0}(D'_n)$ est donc stationnaire. Comme la restriction de $\rho_{n,0}$ à Σ_n est bijective, on obtient la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence du fait que la bijection de **VIII** induit une bijection entre Σ et Σ_n pour tout n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*, Ergebnisse de Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge **21**, Springer-Verlag (1990).

[2] M. J. GREENBERG, *Schemata over local rings*, Annals of maths. **73** (1961), 624–648.

[3] M. HINDRY, *Sur les hauteurs locales de Néron sur les variété abéliennes*, préprint.

[4] S. LANG, *Fundementals of Diophantine Geometry*, Springer (1983).

[5] D. MUMFORD, *Abelian varieties*, Oxford University Press, $2^{\text{ème}}$ édition (1974).

[6] D. MUMFORD, J. FOGARTY, *Geometric invariant theory*, $2^{\text{ème}}$ édition, Springer-Verlag (1982).

[7] A NÉRON, *Quasifonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Annals of math. **82** (1965), 249–331.

[8] P. PHILIPPON, *Sur les hauteurs alternatives, I*, Math. Annalen **289** (1991), 255–283.

[9] M. RAYNAUD, *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang*, dans Algebraic Geometry (Tokyo), Lecture notes in math. **1016**, Springer (1982) 1–20.

[10] J.-P. SERRE, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, translated by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, Aspects in Mathematics E15, Vieweg (1989).

[11] J. TATE, lettre à J-P Serre (juin 1968).

John BOXALL
Département de Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 Caen Cedex, France
e-mail : boxall@math.unicaen.fr