

HERVÉ THOMAS

## Trivialité du 2-rang du noyau hilbertien

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 6, n° 2 (1994),  
p. 459-483

<[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1994\\_\\_6\\_2\\_459\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1994__6_2_459_0)>

© Université Bordeaux 1, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TRIVIALITÉ DU 2-RANG DU NOYAU HILBERTIEN.

HERVÉ THOMAS

ABSTRACT. – We give exhaustive list of biquadratic fields  $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{m})$  and  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  without 2-exotic symbol, i.e. for which the 2-rank of the Hilbert kernel (or wild kernel) is zero. Such  $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{m})$  are logarithmic principals  $[J_3]$ . We detail an exemple of this technical numerical exploration and quote the family of theories and results we utilize. The 2-rank of tame, regular and wild kernel of K-theory are connected with local and global problem of embedding in a  $\mathbb{Z}_2$ -extension. Global class field theory can describe the 2-rank of the Hilbert kernel and reveals existence of symbols on  $K$  not given by local class field theory.

### Introduction

Les 2-rangs des noyaux modérés, réguliers et hilbertiens de la K-théorie sont reliés à des problèmes locaux ou globaux de plongement dans une  $\mathbb{Z}_2$ -extension. La théorie globale du corps de classes peut décrire le 2-rang du noyau hilbertien, grâce entres autres à des résultats de Tate ( $[T_1]$ ,  $[T_2]$ ) sur le groupe  $K_2K$  des symboles sur un corps de nombres  $K$ , et révéler ainsi l'existence de symboles qui ne sont pas donnés par la théorie locale. Nous isolons ici des phénomènes révélateurs de la présence de tels symboles dits exotiques. L'explicitation concrète de telles applications se révélerait sans aucun doute très intéressante et permettrait de relier divers aspects arithmétiques d'un corps de nombres.

Nous sommes amenés à nous préoccuper de 2-extensions vivant dans le schéma de la 2-ramification abélienne, cadre dans lequel la ramification restreinte laisse un espoir de parvenir à une théorie du corps de classes explicite. C'est ainsi que G. Gras (cf.  $[G_1]$ ,  $[G_2]$ ) a réussi à déterminer le radical initial de la composée des  $\mathbb{Z}_2$ -extensions grâce à un logarithme ad hoc. Ici, ce sont les idéles que nous utilisons (et plus précisément le 2-adifié du groupe des idéles construit par J.-F. Jaulent  $[J_1]$ ). En effet, nous mettons l'accent sur la notion « localement partout  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable » introduite par F. Bertrandias et J.-J. Payan il y a une vingtaine d'années dans le but de trouver une condition suffisante à la conjecture de Leopoldt (cf.  $[BP]$ , ou encore  $[Gi]$ ).

La trivialité de la 2-partie du noyau régulier  $R_2K$  dans  $K_2K$  fournit une telle condition suffisante et conduit à la notion de corps 2-régulier ou 2-rationnel : pour de tels corps de nombres  $K$ , la 2-extension abélienne 2-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale  $M_K^\oplus$  coïncide avec la composée  $Z_K$  des  $\mathbb{Z}_2$ -extensions de  $K$  et on a  $\text{Gal}(M_K^\oplus/K) \simeq \mathbb{Z}_2^{1+r_2}$ . Nous renvoyons à [CH],[GJ],[MN] et à leurs références pour la résolution de tels problèmes. De plus, rappelons que pour  $K$  totalement réel, la torsion de  $\text{Gal}(M_K/K)$  a un aspect analyse 2-adique donné par J. Coates dans [Co].

Ici, les corps trouvés avec un 2-rang du noyau hilbertien trivial appartiennent à une famille plus vaste que les corps 2-réguliers. Lorsque les racines quatrièmes de l'unité sont dans  $K$ , de tels corps ont un groupe des classes logarithmiques  $[J_3]$  trivial en 2 et vérifient les conjectures de Leopoldt et de Gross (en 2).

Pour arriver à des résultats numériques de calcul du 2-rang du noyau hilbertien, la théorie des idéles doit être explicite. Plus précisément, factoriser dans les localisés du corps de nombres en les premiers divisant 2, connaître numériquement les classes et les unités de  $K$  sont à la base de nos résultats. Le groupe  $\text{Gal}(M'_K/Z'_K)$  correspondant aux sous-extensions 2-élémentaires  $M'_K$  et  $Z'_K$  de  $M_K$  et  $Z_K$  (cf. §2) est un sous-groupe du groupe de classes de rayon  $\text{Gal}(M'_K/K)$  (cf. §2) mais les calculs visant à sa connaissance ne peuvent se cantonner à des congruences « traditionnelles » intervenant dans la théorie des classes de rayon. Il est essentiel d'obtenir des renseignements basés sur des écritures locales de certains éléments globaux (cf. §2, §3 et [Th]).

Un autre aspect est le théorème relatif à l'ex-conjecture de Birch-Tate lorsque  $K$  est totalement réel  $\#K_2\mathcal{O}_K = \omega_2(K)|\zeta_K(-1)|$  (selon Wiles ([Wi]), il reste à montrer en toute généralité la 2-partie de l'égalité). Signalons que des chercheurs de Bordeaux (citons H. Cohen et l'un de ses étudiants E. Tollu) calculent pour certains corps de nombres des valeurs de la fonction zêta de Dedekind en particulier aux entiers négatifs ce qui nous a permis de vérifier nos affirmations pour  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  sur de nombreuses valeurs de  $m$ .

## Notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations et résultats que nous utilisons.

### *Notations globales :*

Pour  $K$  un corps de nombres,  $(r_1, r_2)$  est sa signature,  $\mu_K$  le groupe des racines de l'unité contenues dans le groupe multiplicatif  $K^\times$ .

$S$  représente l'ensemble des places divisant 2.  $Cl_K$  et  $Cl_K^S$  sont les groupes

des classes d'idéaux et de  $S$ -classes d'idéaux au sens ordinaire.  $Cl_K^+$  et  $Cl_K^{S+}$  s'entendent au sens restreint.

$E_K^+$  (resp.  $E_K^{S+}$ ) représente les unités (resp. les  $S$ -unités) totalement positives de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ ;  $E_K$  (resp.  $E_K^S$ ) est le groupe des unités (resp. des  $S$ -unités) au sens ordinaire de  $\mathcal{O}_K$  (les signatures n'interviennent pas).

Pour un groupe  $G$  de torsion quelconque,  $G(2)$  est son 2-sous-groupe de Sylow et  ${}_2G$  le sous-groupe des éléments annulés par 2.

$m = 2^{0ou1} \prod_{i=1}^{i=g} \ell_i$  est un entier naturel sans facteur carré, les  $\ell_i$  sont impairs,  $m > 1$ .

*Notations locales :*

Pour un corps local  $K_{\mathfrak{P}}$  avec  $\mathfrak{P}$  une place au dessus d'un  $p$  de  $\mathbb{Z}$ , nous notons  $\mu_{\mathfrak{P}}$  le groupe des racines de l'unité locales.  $2(\mathfrak{P})$  est la partie 2-primaire de  $m_{\mathfrak{P}} = (N\mathfrak{P} - 1) \cdot p^{r_{\mathfrak{P}}}$ , le cardinal de  $\mu_{\mathfrak{P}}$  qui a deux sous-groupes dissemblables  $\mu_{\mathfrak{P}}^0 = \langle \zeta_{N\mathfrak{P}-1} \rangle$  et  $\mu_{\mathfrak{P}}^1 = \langle \zeta_{p^{r_{\mathfrak{P}}}} \rangle$ .  $\pi_{\mathfrak{P}}$  est une uniformisante locale qui d'un point de vue théorie du corps de classes est envoyée par l'application d'Artin locale  $\omega_{\mathfrak{P}}$  sur le « Frobenius » arithmétique.  $U_{\mathfrak{P}}^1$  désigne le sous-groupe des unités principales, elles sont congrues à 1 modulo l'idéal de la valuation noté  $\mathfrak{P}$ . La possibilité de factorisation multiplicative existe dans un corps local :

$K_{\mathfrak{P}}^{\times} = \mu_{\mathfrak{P}}^0 \oplus U_{\mathfrak{P}}^1 \oplus \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$  et  $U_{\mathfrak{P}}^1 \simeq \mu_{\mathfrak{P}}^1 \oplus (U_{\mathfrak{P}}^1)^{libre}$  si  $(U_{\mathfrak{P}}^1)^{libre}$  désigne un sous  $\mathbb{Z}_p$ -module libre maximal de  $U_{\mathfrak{P}}^1$ .

Pour  $\mathfrak{P} \nmid 2$ ,  $\log_{\mathfrak{P}}$  représente le prolongement du logarithme  $\mathfrak{P}$ -adique défini sur  $U_{\mathfrak{P}}^1$  nul sur la torsion et sur  $2^{\mathbb{Z}}$  (normalisation d'Iwasawa).

*Notations liées à la théorie locale du corps de classes :*

Ici, l'étude menée nous conduit à regarder des 2-extensions abéliennes. Pour chaque place  $\mathfrak{P}$ , nous notons  $K_{\mathfrak{P}}^{ab(2)}$  la 2-extension abélienne maximale de  $K_{\mathfrak{P}}$ .

Si  $\mathfrak{P}$  est finie, nous avons d'après [Jau<sub>1</sub>] :

$$\begin{aligned} Gal(K_{\mathfrak{P}}^{ab(2)}/K_{\mathfrak{P}}) &\stackrel{\omega_{\mathfrak{P}}}{\simeq} \varprojlim_n (K_{\mathfrak{P}}^{\times}/(K_{\mathfrak{P}}^{\times})^{2^n}) \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{K_{\mathfrak{P}}^{\times}} \\ &= \begin{cases} \mu_{\mathfrak{P}}^0(2) \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}_2} & \text{lorsque } \mathfrak{P} \nmid 2 \\ \mu_{\mathfrak{P}}^1 \cdot (U_{\mathfrak{P}}^1)^{libre} \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}_2} & \text{lorsque } \mathfrak{P} \mid 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\mathfrak{P}$  est réelle, il vient de même :

$$Gal(K_{\mathfrak{P}}^{ab(2)}/K_{\mathfrak{P}}) = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \stackrel{\omega_{\mathfrak{P}}}{\simeq} \varprojlim (\mathbb{R}^{\times}/(\mathbb{R}^{\times})^{2^n}) \simeq \{\pm 1\}$$

En chaque place finie  $\mathfrak{P}$ , nous considérons le symbole de Hilbert de profondeur maximale défini par :

$$\left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{P}}\right) \left\{ \begin{array}{ll} K_{\mathfrak{P}}^{\times} \times K_{\mathfrak{P}}^{\times} & \longrightarrow \mu_{\mathfrak{P}} = \mu_{\mathfrak{P}}^0 \oplus \mu_{\mathfrak{P}}^1 \\ (x, y) & \longmapsto \left(\frac{x, y}{\mathfrak{P}}\right) = \sqrt[m_{\mathfrak{P}}]{x^{\omega_{\mathfrak{P}}(y)} - 1} \end{array} \right.$$

$\mu_{\mathfrak{P}}$  est de cardinal  $m_{\mathfrak{P}} = (N\mathfrak{P} - 1) \cdot p^{r_{\mathfrak{P}}}$  et  $\omega_{\mathfrak{P}}$  est l'application d'Artin locale.

Et le symbole régulier correspondant est :

$$(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{P}} = \left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{P}}\right)^{p^{r_{\mathfrak{P}}}} \left\{ \begin{array}{ll} K_{\mathfrak{P}}^{\times} \times K_{\mathfrak{P}}^{\times} & \longrightarrow \mu_{\mathfrak{P}}^0 \simeq (\mathbb{Z}_F/\mathfrak{P})^{\times} \\ (x, y) & \longmapsto \left((-1)^{v_{\mathfrak{P}}(x) \cdot v_{\mathfrak{P}}(y)} \cdot \frac{x^{v_{\mathfrak{P}}(y)}}{y^{v_{\mathfrak{P}}(x)}}\right) \bmod \mathfrak{P}. \end{array} \right.$$

Pour une place réelle,  $\mu_{\mathfrak{P}} = \mu_{\mathfrak{P}}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, +1\}$  et nous avons  $(x, y)_{\mathfrak{P}} = \left(\frac{x, y}{\mathfrak{P}}\right) = 1$  pour  $x > 0$  ou  $y > 0$ ; si les deux réels sont négatifs, la valeur est  $-1$ .

Pour  $m|m_{\mathfrak{P}}$ , le symbole de Hilbert de profondeur  $m$  est :  $\left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{P}}\right)_m \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{P}}\right)^{m_{\mathfrak{P}}/m}$ . De même, nous notons pour les places finies  $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{P}, m} \stackrel{\text{def}}{=} (\cdot, \cdot)_{\mathfrak{P}}^{\frac{N\mathfrak{P}-1}{m}}$ .

Dans la théorie locale du corps de classes, les places (devenues) complexes de  $K$  n'interviennent pas. Ainsi, dans les diagrammes qui suivent,  $\mathfrak{P}$  ne représente jamais une place complexe. Il en est de même dans la théorie globale, lorsque nous utilisons tout comme dans [Th] le  $\ell$ -adifié du groupe des idéles construit par J.-F. Jaulent ([Jau<sub>1</sub>]).

## 1. Énoncé du problème et lien avec la 2-ramification abélienne

Pour un corps de nombres  $K$ , la description du groupe  $K_2K$  via les symboles, démontrée par Matsumoto [Mat] amène à se préoccuper des noyaux suivants qui mesurent ce qui échappe respectivement aux symboles modérés, réguliers ou sauvages : on compare le groupe  $K_2K$  qui factorise tous les symboles sur  $K$  aux groupes représentant les familles de symboles déjà connus donnés par la théorie locale du corps de classes. Le noyau

hilbertien est ainsi révélateur de l'existence de symboles dits exotiques.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & H_2K & \longrightarrow & K_2K & \xrightarrow[\text{symboles de Hilbert}]{\{x,y\} \mapsto ((\frac{x,y}{\mathfrak{p}}))_{\mathfrak{p}}} & \tilde{\bigoplus}_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \text{inj.} & & \downarrow = & & \downarrow \text{surj. } (p \text{ puis } p^r)_{\mathfrak{p}} \\
 1 & \longrightarrow & R_2K & \longrightarrow & K_2K & \xrightarrow[\text{symboles « réguliers »}]{\{x,y\} \mapsto ((x,y)_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}} & \bigoplus_{\mathfrak{p}}^0 \mu_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \text{inj.} & & \downarrow = & & \downarrow \text{surj. restriction} \\
 1 & \longrightarrow & K_2\mathcal{O}_K & \longrightarrow & K_2K & \xrightarrow[\text{symboles modérés}]{\{x,y\} \mapsto ((x,y)_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \nmid \infty}} & \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \infty}^0 \mu_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 1
 \end{array}$$

$H_2K$  est le noyau hilbertien ou sauvage,  $R_2K$  est le noyau dit régulier et  $K_2\mathcal{O}_K$  le noyau modéré. Les places complexes n'interviennent pas.

Localement, les symboles de Hilbert factorisent chaque symbole continu à valeur dans un groupe fini. Le tilde signifie que l'image ne peut excéder l'ensemble des familles de racines de l'unité liées par la loi de réciprocité. Et la surjectivité (Moore puis Chase-Waterhouse) affirme que c'est la seule liaison. Ces noyaux sont finis d'après H. Garland ([*Gar*]) et nous connaissons leurs générateurs ([*Bas - Tat*]). Malgré cela, sauf cas particuliers, la connaissance explicite de ces noyaux nous échappe car nous ne savons pas trouver, en toute généralité, les relations de liaison entre deux éléments du groupe  $K_2K$  qui est un groupe de torsion d'après le résultat de Garland.

Nous regardons maintenant tous ces groupes de torsion en leur 2-Sylow.

Les résultats de Tate (cf. [*Tat*<sub>1</sub>], [*Tat*<sub>2</sub>]) montrent que le morphisme naturel  $\langle -1 \rangle \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times} \rightarrow_2 K_2K$  induit par le symbole universel  $\{-1, \cdot\}$  est surjectif et que son noyau  $\mathfrak{U}_K$ , le radical de Tate, est un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension  $1 + r_2$  :

$$\mathfrak{U}_K \stackrel{\text{déf}}{=} \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2}, \{-1, x\} = 1 \text{ dans } K_2K\}.$$

Ainsi, nous avons un dictionnaire entre les éléments annulés par 2 dans ces noyaux de la  $K$ -théorie et certains radicaux kummeriens du schéma de la 2-ramification abélienne de  $K$  que nous allons étudier plus précisément au §2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{U}_K & \longrightarrow & \mathfrak{M}_K & \xrightarrow{\bar{x} \mapsto \{-1, x\}} & {}_2K_2\mathcal{O}_K \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{injection} & & \uparrow \text{injection} \\
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{U}_K & \longrightarrow & \mathfrak{M}_K^{\oplus} & \xrightarrow{\bar{x} \mapsto \{-1, x\}} & {}_2R_2K \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{injection} & & \uparrow \text{injection} \\
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{U}_K & \longrightarrow & \mathfrak{H}_K & \xrightarrow{\bar{x} \mapsto \{-1, x\}} & {}_2H_2K \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Les radicaux kummeriens  $\mathfrak{M}_K$ ,  $\mathfrak{M}_K^\oplus$ ,  $\mathfrak{H}_K$  sont définis au chapitre 2;  $\bar{x} \in \mathfrak{H}_K$  signifie que  $K(\sqrt{x})$  est localement partout  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable aux places finies et  $x$  est totalement positif.

Par ailleurs, le radical kummerien  $\mathfrak{Z}_K$  correspondant aux extensions  $K(\sqrt{x})$  globalement  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable est de  $\mathbb{F}_2$ -dimension égale à  $1+r_2$  sous la conjecture de Leopoldt pour le couple (corps  $K$ , premier 2). Citons aussi  $\mathfrak{N}_K$  le radical construit sur les unités logarithmiques (cf. [Jau<sub>2</sub>]); il est intéressant de comparer ce dernier à  $\mathfrak{Z}_K$  lorsque  $i \in K^\times$  (voir §2 pour tous ces radicaux kummeriens et §3 – 2 pour  $\mathfrak{N}_K$ ). Nous avons :

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{U}_K \stackrel{\text{Tate}}{=} 1 + r_2 \stackrel{\text{sous Leopoldt}}{=} \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{Z}_K \stackrel{\text{sous Gross}}{=} \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{N}_K.$$

Ainsi, nous sommes tout naturellement conduit à étudier minutieusement la différence précise entre le localement partout et le globalement  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable. Comme le 2-rang du noyau hilbertien est donné par :

$$rg_2(H_2K) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{H}_K - \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{U}_K, \text{ nous avons en particulier :}$$

**THÉOREME 1.** *Critère de trivialité pour la 2-partie du noyau hilbertien. Sous la conjecture de Leopoldt en 2 pour  $K$  (i.e.  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{Z}_K = 1 + r_2$ ), il vient :*

$$rg_2(H_2K) = 0 \iff \mathfrak{H}_K = \mathfrak{Z}_K.$$

*Sous la conjecture de Gross en 2 pour  $K$  (i.e.  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{N}_K = 1 + r_2$ ) en présence des racines 4<sup>ièmes</sup> de l'unité, on a :*

$$rg_2(H_2K) = 0 \iff \mathfrak{H}_K = \mathfrak{N}_K.$$

Comme on va le voir, toutes les 2-extensions abéliennes intervenant ci-dessus à travers leurs radicaux sont 2-ramifiées. Aussi, en vue des calculs explicites, nous allons répertorier les principales 2-extensions abéliennes comptant parmi celles 2-ramifiées de  $K$ .

## 2. Principales pro-2-extensions abéliennes 2-ramifiées

Le but de ce paragraphe est de préciser le type de calculs locaux à entreprendre. La description idélique de l'inventaire ci-dessous de radicaux kummeriens est certes technique mais c'est le prix pour arriver aux résultats explicites du §4.

### 2.a. Description kummérienne

Une 2-extension  $E$  de  $K$  et plus généralement une pro-2-extension contient un sous-corps maximal à groupe de Galois sur  $K$  d'exposant 2 : nous le notons  $E'$ . Ce corps admet une description kummérienne sur  $K$  et nous disons que le radical correspondant est attaché à  $E$ . Une 2-extension de  $K$  est dite « 2-ramifiée » lorsque la ramification est cantonnée au dessus de

2 (et qu'à l'infini la complexification de places réelles est possible). Cette fenêtre de ramification permet à une variété importante de 2-extensions de prendre place dans le schéma de la 2-ramification abélienne et bien souvent, seules des propriétés locales permettent de caractériser les radicaux correspondants. Nous donnons successivement pour chacune des 2-extensions étudiées sa définition, son radical et le mode d'obtention de celui-ci. Nous désignons par  $u_{\mathfrak{p}}$  une unité  $\mathfrak{p}$ -adique,  $\square_{\mathfrak{p}}$  un carré de  $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$  et  $a_{\mathfrak{p}}$  un entier relatif.

\*  $M_K$  est la 2-extension abélienne de  $K$ , 2-ramifiée et maximale. Les seules places finies autorisées à s'y ramifier sont celles divisant 2 et les places réelles peuvent se complexifier.

Le radical kummérien associé se note  $\mathfrak{M}_K$ . Les conditions locales le caractérisant sont les suivantes :

$$\mathfrak{M}_K = \begin{cases} \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2} \mid \forall \mathfrak{p} \nmid (2, \infty), v_{\mathfrak{p}}(x) \equiv 0[2]\} \\ \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2} \mid \forall \mathfrak{p} \nmid (2, \infty), \left(\frac{x_{\mathfrak{p}}, \zeta_{2(\mathfrak{p})}}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1\} \\ \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2} \mid (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)}\} \end{cases}$$

Le calcul pratique de  $\mathfrak{M}_K$  repose sur la suite exacte scindée ci-après qui indique ce qu'il est nécessaire de connaître numériquement et donne la  $\mathbb{F}_2$ -dimension de  $\mathfrak{M}_K$  :

$$1 \longrightarrow {}^2E_K^S \longrightarrow \mathfrak{M}_K \xrightarrow{\bar{x} \mapsto cl \left( \sqrt[2]{\prod_{\mathfrak{p} \mid 2} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x)}} \right)} {}^2Cl_K^S \longrightarrow 1.$$

\*  $M_K^{\oplus}$  est la 2-extension abélienne maximale de  $K$  avec les caractéristiques suivantes : les seules places finies pouvant se ramifier sont celles divisant 2 et aucune des  $r_1$  places réelles de  $K$  ne se complexifie.

Le radical associé :

$$\mathfrak{M}_K^{\oplus} = \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2}, (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (\square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid \infty}\}$$

Son obtention numérique s'effectue en sélectionnant les représentants totalement positifs de  $\mathfrak{M}_K$ .

\*  $H_K$  est la composée des 2-extensions abéliennes de  $K$  localement partout  $\mathbb{Z}_2$ -plongeables (en ce qui concerne les places réelles, elles restent réelles), de radical associé  $\mathfrak{H}_K$ .

$$\mathfrak{H}_K = \{\bar{x} \in \frac{K^{\times}}{(K^{\times})^2} \mid \forall \mathfrak{p} (\mathfrak{p} \text{ place de } K), \left(\frac{x_{\mathfrak{p}}, \zeta_{2(\mathfrak{p})}}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1, \}$$



Sa méthode d'obtention repose sur une sélection des représentants de  $\mathfrak{M}_K^\oplus$  en tenant compte des nouvelles conditions à vérifier aux places sauvages. Ce tri est basé sur des formules explicites pour calculer la partie sauvage de symboles de Hilbert aux places divisant 2. Lorsque  $2(\mathfrak{P}) > 2$ , rappelons la formulation très utile suivante (on trouve celle de droite dans [J<sub>4</sub>]) :

$$\text{Si } \mathfrak{P}|2, \left( \frac{x, \zeta_{2(\mathfrak{P})}}{\mathfrak{P}} \right)_{2(\mathfrak{P})} = \zeta_{2(\mathfrak{P})}^{-\frac{\text{Trace}_{F_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_2}(\log_{\mathfrak{P}}(x))}{2(\mathfrak{P})}} = \zeta_{2(\mathfrak{P})}^{-\frac{\log_2(N_{F_{\mathfrak{P}}/\mathbb{Q}_2}(x))}{2(\mathfrak{P})}}.$$

\*  $Z_K$  est le composé des  $\mathbb{Z}_2$ -extensions de  $K$ . Rappelons que, sous la conjecture de Leopoldt, le corps de nombres  $K$  possède  $(1 + r_2)$   $\mathbb{Z}_2$ -extensions linéairement disjointes (et pas plus).

Le radical kummerien associé  $\mathfrak{Z}_K$  est dans la chaîne d'inclusion :  $\mathfrak{Z}_K \subset \mathfrak{H}_K \subset \mathfrak{M}_K^\oplus \subset \mathfrak{M}_K$ . Il est obtenu numériquement grâce à la théorie du corps de classes :  $\mathfrak{Z}_K$  ne saurait être décrit par les seules conditions locales qui ont atteint leur apogée lors de l'approche par  $\mathfrak{H}_K$  (cf [Th]);  $\mathfrak{Z}_K$  est l'orthogonal de  $\text{Gal}(H'_K/Z'_K)$  dans la dualité kummérienne donnée par les symboles de Hilbert :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_K \times \text{Gal}(H'_K/Z'_K) \longrightarrow < -1 > \\ \left( \overline{x}, \overline{(i_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}}} \right) \mapsto \sqrt{x}^{\omega((i_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}})-1} = \prod_{\mathfrak{P}|2} (x, i_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P},2} \cdot \prod_{\mathfrak{P}|2} \left( \frac{x, i_{\mathfrak{P}}}{\mathfrak{P}} \right)_2 \end{array} \right.$$

\* Nous groupons quatre 2-extensions de  $K$  incluses dans  $C_K$  le 2-corps de classes de Hilbert.  $C_K$  est la 2-extension abélienne maximale de  $K$  sous les conditions suivantes : aucune place finie de  $K$  ne se ramifie mais les places réelles peuvent se complexifier. Apparaissent aussi  $C_K^\oplus$  le 2-corps de classes absolu de Hilbert (les places réelles de  $K$  restent réelles),  $D_K$  (resp.  $D_K^\oplus$ ) le sous-corps maximal de  $C_K$  (resp. de  $C_K^\oplus$ ) avec les places divisant 2 de  $K$  totalement décomposées.

En termes de radicaux kummériens, nous avons, en respectant l'ordre

d'apparition :

$$\mathfrak{C}_K = \{\bar{x} \in \frac{K^\times}{(K^\times)^2} \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} ((u_{\mathfrak{p}}^{n_r})^{a_{\mathfrak{p}}} \cdot \square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \mid \infty}\},$$

$$\mathfrak{C}_K^{\oplus} = \{\bar{x} \in \frac{K^\times}{(K^\times)^2} \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} ((u_{\mathfrak{p}}^{n_r})^{a_{\mathfrak{p}}} \cdot \square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (\square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid \infty}\},$$

avec  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{C}_K = rg_2(Cl_K^+)$  et  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{C}_K^{\oplus} = rg_2(Cl_K)$ ,

$$\mathfrak{D}_K = \{\bar{x} \in \frac{K^\times}{(K^\times)^2} \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} (\square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \mid \infty}\},$$

$$\mathfrak{D}_K^{\oplus} = \{\bar{x} \in \frac{K^\times}{(K^\times)^2} \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} (\square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (\square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid \infty}\},$$

avec  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K = rg_2(Cl_K^{S+})$  et  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K^{\oplus} = rg_2(Cl_K^S)$ .

Ici,  $u_{\mathfrak{p}}^{n_r}$  désigne une unité adéquate que l'on détermine lors des calculs explicites: pour une place  $\mathfrak{p}$  divisant 2,  $K_{\mathfrak{p}}(\sqrt{u_{\mathfrak{p}}^{n_r}})$  est la seule extension quadratique de  $K_{\mathfrak{p}}$  qui est non ramifiée; c'est aussi le premier étage de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension non ramifiée de  $K_{\mathfrak{p}}$ .

\* Enfin, des considérations de dualité amènent à introduire la 2-extension abélienne de  $K$  localement partout cyclotomique aux places finies et maximale sous cette condition.

Il lui correspond un radical kummérien que nous notons  $\widehat{\mathfrak{G}}_K$ , donné par :

$$\widehat{\mathfrak{G}}_K = \left\{ \bar{x} \in \frac{K^\times}{(K^\times)^2} \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = (u_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{2a_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \mid (2, \infty)} (\zeta_{2(\mathfrak{p})}^{a_{\mathfrak{p}}} \square_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \mid 2} (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \mid \infty} \right\}.$$

Considérons maintenant le sous-groupe de  $\widehat{\mathfrak{G}}_K$ , noté  $\Omega_K$  défini par :

$$\Omega_K = \left\{ \bar{x} \in \widehat{\mathfrak{G}}_K \mid (x\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \right\}.$$

Remarquons que les différences entre  $\widehat{\mathfrak{G}}_K$  et  $\mathfrak{D}_K$  reposent sur celles existant entre  $\prod_{\mathfrak{p} \mid 2} \mu_{\mathfrak{p}}^1$  et  $\mu_K(2)$  (voir lemme 3 §3 pour des exemples).

Nous sommes intéressé par le quotient  $\mathfrak{G}_K \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathfrak{G}}_K / \Omega_K$ . En effet, comme expliqué dans [J<sub>2</sub>], sa  $\mathbb{F}_2$ -dimension égale le 2-rang de  $\text{Gal}(H_K/Z_K)$  (cf. §2.b pour la description idélique de ce groupe de Galois). En particulier, nous avons :

**THÉORÈME 2.** *Expression du 2-rang du noyau hilbertien. Sous la conjecture de Leopoldt en 2 pour  $K$  (i.e. sous la condition  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{Z}_K = 1 + r_2$ ), il vient :*

$$rg_2(H_2K) = rg_2(\text{Gal}(H_K/Z_K)) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K.$$

Ainsi, le calcul du 2-rang du noyau hilbertien qui indique s'il y a des symboles sur  $K$  non donnés par la théorie locale du corps de classes revient

au calcul du 2-rang d'un groupe de Galois obtenu grâce à la théorie globale du corps de classes.

On voit que les définitions de tous les radicaux kummériens ci-dessus font appel aux mêmes conditions aux places finies étrangères à 2. Mis à part  $\mathfrak{N}_K$ ,  $\mathfrak{Z}_K$ ,  $\mathfrak{U}_K$ , les différences entre tous les autres radicaux reposent sur des conditions locales spécifiques à chacun aux places sauvages et réelles.

## 2.b. Détermination idélique du groupe $\text{Gal}(H_K/Z_K)$

La description idélique des groupes de Galois intervenant ici est éclairée par la construction de J.-F. Jaulent du 2-adifié du groupe des idèles de  $K$ . Le sous-groupe 2-divisible du groupe des idèles classiques est supprimé et les  $\widehat{K_{\mathfrak{p}}^{\times}}$  (voir les notations) remplacent les  $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ . Nous renvoyons à  $[J_1]$  (et à  $[Th]$  pour son utilisation dans un contexte similaire). Ici, rappelons que  $\mathcal{R}_K$  représente les idèles principaux  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$  envoyés dans  $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{rest.}} \widehat{K_{\mathfrak{p}}^{\times}}$ .

Nous avons successivement ici (sous la conjecture de Leopoldt en 2 pour  $K$ ):

$$\begin{aligned} \text{Gal}(M_K/K) &\simeq \overbrace{\text{Gal}(Z_K/K)}^{\text{partie libre}} \oplus \overbrace{\text{Gal}(M_K/Z_K)}^{\text{torsion finie}}, \quad \text{puis :} \\ \text{Gal}(M_K/M_K^{\oplus}) &\simeq \frac{\{-1, +1\}^{r_1(F)}}{\text{signature}(\mathfrak{D}_K)}, \quad \text{Gal}(M_K^{\oplus}/H_K) \simeq \frac{\prod_{\mathfrak{p}|2} \mu_{\mathfrak{p}}(2)}{\text{Im}(\mu_K(2))}, \\ \text{Gal}(H_K/Z_K) &\simeq \frac{\sqrt{\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K}}{\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K}, \quad \text{Gal}(Z_K/K) \simeq \frac{\mathcal{J}_K}{\sqrt{\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K}}. \end{aligned}$$

Les groupes à droite des signes d'isomorphisme, obtenus grâce à la théorie du corps de classes, sont numériquement à calculer pour éclaircir les problèmes qui nous préoccupent: la théorie des idèles doit être explicite sur le corps  $K$ . Chacun de ces quatre groupes de Galois ayant un aspect arithmétique particulier, leurs obtentions numériques sont de difficultés inégales.

Concernant  $\text{Gal}(H_K/Z_K)$  qui mesure par dualité la différence de nature entre être « localement partout  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable » et être « globalement  $\mathbb{Z}_2$ -plongeable » (passage de  $\mathfrak{H}_K$  à  $\mathfrak{Z}_K$ ), notons qu'un idèle de  $\sqrt{\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K}$  est en relation avec des idèles principaux dont les valuations aux places finies sont des multiples de 2. Plus précisément, considérons un idèle  $(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$

dont la classe modulo  $\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K$  engendre une composante cyclique de profondeur  $2^n$  de  $Gal(H_K/Z_K)$  ( $n$  un entier naturel). Nous avons  $(\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}^{2^n})_{\mathfrak{p}} = (\zeta_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \cdot (\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  où  $(\zeta_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  est une famille de racines de l'unité et  $(\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  un idéal principal. Ainsi, concrètement, nous recherchons les écritures idéliques à une précision adéquate d'un système d'unités fondamentales de  $K$  et de certains générateurs d'idéaux. Ces derniers sont notés ici  $(\alpha_i)_i$ ; ce sont des éléments de  $\mathcal{O}_K$  qui interviennent dans une décomposition en somme de composantes cycliques du 2-Sylow du groupe des classes.

$$Cl_K(2) = \bigoplus_{1 \leq i \leq r_{g2}(Cl_K)} \langle cl(\sqrt[2^i]{\alpha_i}) \rangle.$$

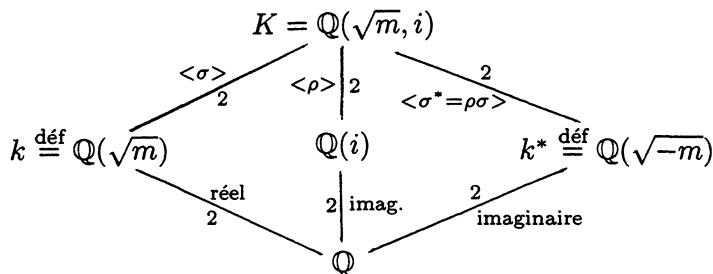
Une fois que nous disposons de cet ensemble d'idèles principaux  $(\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ , nous sommes à même d'explicitier les générateurs de  $Gal(H_K/Z_K)$  (cf. [Th] pour un algorithme d'obtention de ce groupe de Galois dans le cas de la recherche du radical initial des  $\mathbb{Z}_3$ -extensions d'un corps biquadratiques  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{m})$ ). Par dualité, ceux-ci nous permettent alors de sélectionner ceux des éléments de  $\mathfrak{H}_K$  qui sont en fait dans  $\mathfrak{Z}_K$ . Nous voyons que la théorie des idèles doit être explicite pour d'éventuels calculs et qu'il nous faut principalement factoriser dans les localisés au dessus de 2.

### 3. Résultats explicites pour des corps biquadratiques

Dans ce paragraphe, nous énonçons les résultats explicites obtenus pour des corps biquadratiques  $\mathbb{Q}(i, \sqrt{m})$  ou  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  et, en particulier, nous donnons la liste exhaustive de tels corps sans 2-symbole exotique. Le lecteur prend connaissance des conclusions, il dispose de démonstrations pour le cas numéro 8 relatif à  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$ . Les autres calculs sont du même type, nous ne pouvons donner toutes les démonstrations, faute de place. Rappelons qu'il s'agit principalement de calculer le 2-rang du groupe de Galois  $Gal(H_K/Z_K)$ , que cela amène à se préoccuper de calculs locaux très précis avec des idèles.

#### 3.a. Etude des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, i)$ .

Cette étude s'appuie et englobe celle des sous-corps quadratiques réels et imaginaires  $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm m})$  déjà menée par Browkin & Schinzel (cf. [BS]). Dans le schéma galoisien suivant, nous avons  $Gal(K/\mathbb{Q}) \simeq \langle \rho \rangle \times \langle \sigma \rangle \simeq C_2 \times C_2$ ,  $Gal(F/k) \simeq \langle \sigma \rangle$ ,  $Gal(F/\mathbb{Q}(i)) \simeq \langle \rho \rangle$ .



Citons deux lemmes préliminaires, leur preuve étant essentiellement basée sur la formule des classes ambiges évoquée au §4 :

LEMME 1. On a  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{M}_K = 1 + \text{rg}_Z(E_K^S) + \text{rg}_2(Cl_K^S) \geq 3$ , dans tous les cas, et l'égalité  $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{H}_K$  pour  $m \equiv \pm 3[8]$  ou  $m \equiv \pm 6[16]$ .

De plus, on a  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{M}_K = 3 \iff \begin{cases} \text{ou bien } m = \ell_1 \equiv \pm 3[8] \\ \text{ou bien } m = 2\ell_1 \equiv \pm 6[16]. \end{cases}$

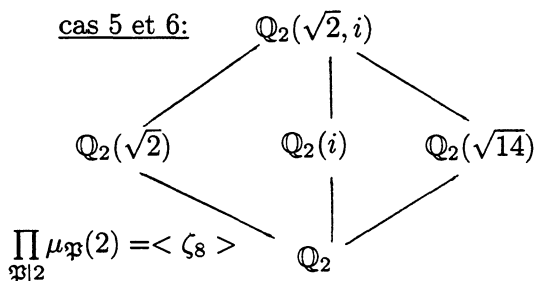
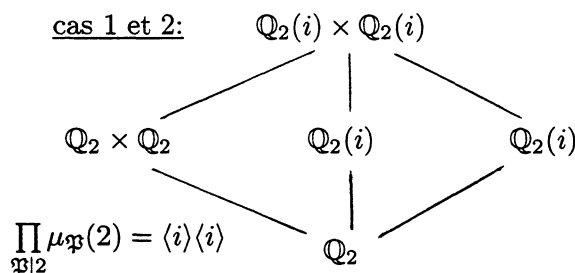
LEMME 2. La quantité  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{H}_K$  est susceptible d'être inférieure à  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{M}_K$  d'une unité pour  $m \equiv \pm 1[8]$  ou  $m \equiv \pm 2[16]$ . Parmi ces valeurs de  $m$ , il y a 8 cas, étudiés ci-dessous, pour lesquels  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{M}_K = 4$  et ainsi le 2-Sylow du noyau hilbertien est susceptible d'être trivial. Enumérons ces huit cas pour  $m$ ,

- |   |   |              |
|---|---|--------------|
| { | ou bien $m = \ell_1 \equiv 1[8], (-4)^{\frac{\ell_1-1}{8}} \neq 1[\ell_1]$    | <b>cas 1</b> |
|   | ou bien $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 1[8], \ell_1 \equiv \ell_2 \equiv 3[8]$     | <b>cas 2</b> |
|   | ou bien $m = \ell_1 \equiv 7[8]$  | <b>cas 3</b> |
|   | ou bien $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 7[8], \ell_1 \equiv -\ell_2 \equiv 3[8]$    | <b>cas 4</b> |
|   | ou bien $m = 2\ell_1 \equiv 2[16], (-4)^{\frac{\ell_1-1}{8}} \neq 1[\ell_1]$  | <b>cas 5</b> |
|   | ou bien $m = 2\ell_1 \ell_2 \equiv 2[16], \ell_1 \equiv \ell_2 \equiv 3[8]$   | <b>cas 6</b> |
|   | ou bien $m = 2\ell_1 \equiv 14[16],$  | <b>cas 7</b> |
|   | ou bien $m = 2\ell_1 \ell_2 \equiv 14[16], \ell_1 \equiv -\ell_2 \equiv 3[8]$ | <b>cas 8</b> |

*Justification des lemmes :* nous avons accès à la  $\mathbb{F}_2$ -dimension de  $\mathfrak{M}_K$ , donnée §2.a, via la formule des classes ambiges rappelée au paragraphe 4 et après les calculs locaux qui en découlent (§4). De plus, pour les  $m$  du lemme 1,  $\text{Gal}(M_K/H_K)$  est trivial (cf. §2.b) d'où  $\mathfrak{H}_K = \mathfrak{M}_K$ ; pour  $m \equiv \pm 1[8]$ , nous avons  $\text{Gal}(M_K/H_K) \simeq C_4$  et pour  $m \equiv \pm 2[16]$ ,  $\text{Gal}(M_K/H_K) \simeq C_2$  (cf. §2.b) ce qui veut dire  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{H}_K = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{M}_K - (0 \text{ ou } 1)$ . Tout ceci permet de sélectionner les huit cas cités.

Nous avons étudiés minutieusement ces huit cas. L'anneau des entiers puis le discriminant de  $K$  sont donnés suivant certaines congruences pour

$m$  dans  $[Wh]$ . La partie impaire du groupe des classes d'idéaux s'identifie à la somme directe de celles des sous-corps quadratiques  $k_r$  et  $k$ . Contraste pour le 2-Sylow de  $Cl_K$  qui a lui un 2-rang calculable grâce à la formule des classes ambiges mais de la capitulation ou de la création de nouvelles classes peuvent modifier la profondeur des composantes cycliques de  $Cl_K(2)$  par rapport à celles de  $Cl_{k_r}(2)$  et  $Cl_k(2)$ . Notons  $\varepsilon$  une unité fondamentale de  $K$  et  $\varepsilon_r$  celle  $> 1$  de  $k$ .  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_r$  peuvent coïncider ou alors être liées par  $\varepsilon^2 = i^a \varepsilon_r$  avec  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Deux renseignements primordiaux sont le diagramme des localisés de  $K$  et de ses sous-corps en les places au dessus de 2 et les 2-groupes de racines de l'unité dans les  $K_{\mathfrak{P}}$  où  $\mathfrak{P} \mid 2$  dans  $\mathcal{O}_K$ .



Donnons les résultats détaillés pour les quatre premiers cas. Les calculs pour arriver à ces conclusions sont similaires à ceux décrits pour le cas 8 de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  (voir plus loin).

PROPOSITION 1. Dans les quatre premiers cas ci-dessus, nous avons :

• CAS 1 ET 2.

*Hypothèses* :  $m = \ell_1 \equiv 1[8]$  avec  $(-4)^{\frac{\ell_1-1}{8}} \not\equiv 1[\ell_1]$  (cas 1)

$m = \ell_1 \ell_2 \equiv 1[8]$  avec  $\ell_1 \equiv \ell_2 \equiv 3[8]$  (cas 2).

*Conclusions* :  $Cl_{k^*}(2) \simeq C_4$  (cas 1),  $Cl_{k^*}(2) \simeq C_2 \times C_2$  (cas 2),  $\varepsilon = \varepsilon_r$ .

$\log_{\mathfrak{p}_{II}}(\varepsilon_r) \notin \mathfrak{p}_{II}^3$  et ainsi nous avons  $rg_2(H_2k) = 0$ .

$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{H}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon_r} \rangle \langle \overline{\alpha} \rangle$  où  $\alpha \in k$ ,  $\alpha \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_{II}^{1+2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$Gal(M_K/Z_K) \simeq (\dots, 1, (1+i), \frac{1}{\mathfrak{p}_{II}}, 1, \dots) \bmod \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K (\simeq C_8)$ .

$\mathfrak{Z}_K = \mathfrak{N}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon_r^{0ou1} \alpha} \rangle$  avec  $\log_{\mathfrak{p}_{II}}(\varepsilon_r^{0ou1} \alpha) \in \mathfrak{p}_{II}^3$ .

$C_K \cap Z_K = K$ .

$\widetilde{Cl}_K = \langle cl(\frac{1}{2}div(\varepsilon)) \rangle = \langle cl(\frac{1}{2}\tilde{v}_{\mathfrak{p}_{II}}(\varepsilon) \cdot \mathfrak{p}_{II} - \frac{1}{2}\tilde{v}_{\mathfrak{p}_{II}^o}(\varepsilon) \cdot \mathfrak{p}_{II}^o) \rangle \simeq C_2$ , où  $div(\varepsilon)$  est le diviseur logarithmique associé à  $\varepsilon$  et  $\tilde{v}$  représente les valuations logarithmiques (cf [J<sub>3</sub>]).

• CAS 3.

*Hypothèses* :  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$ . *Notations* :

$\varepsilon_r = u + v\sqrt{\ell_1}$ ,  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  et  $1 + 2h = | \langle cl(\mathfrak{p}_{II}) \rangle |$  dans  $Cl_{k^*}$ .

*Conclusions* :

$\varepsilon^2 = \pm i\varepsilon_r$ ,  $\mathfrak{M}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon} \rangle \langle \overline{\alpha} \rangle$  où  $\alpha \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_{II}^{1+2h}$ .

Si  $16 \nmid u$ , nous avons :

$$\begin{cases} Gal(M_K/Z_K) \simeq (\dots, 1, \frac{i}{\mathfrak{p}_{II}}, \frac{1}{\mathfrak{p}_{II}^o}, 1, \dots) \bmod \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K, & (\simeq C_4), \\ \mathfrak{H}_K = \mathfrak{Z}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon} \rangle & \text{et ainsi } rg_2(H_2K) = 0. \end{cases}$$

Si  $16 \mid u$ , nous avons :

$$\begin{cases} Gal(M_K/Z_K) \simeq (\dots, 1, (1+2), \frac{1}{\mathfrak{p}_{II}^o}, 1, \dots) \bmod \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2} \mu_{\mathfrak{p}}(2) \cdot \mathcal{R}_K, \\ Gal(M_K/Z_K) \simeq C_{2^{n+2}} \text{ où } 2^{n+3} \parallel u, & n \in \mathbb{N}, \\ \mathfrak{M}_K = \mathfrak{H}_K, \quad \mathfrak{Z}_K = \mathfrak{N}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon} \rangle, \\ \widetilde{Cl}_K = \langle cl(\frac{1}{2^n}div(\alpha)) \rangle \simeq C_{2^n}. \end{cases}$$

• CAS 4.

*Hypothèses* :  $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 7[8]$  avec  $\ell_1 \equiv 3[8]$ ,  $\ell_2 \equiv 5[8]$ .

*Conclusions* :  $\varepsilon = \varepsilon_r$ ,  $\mathfrak{Z}_K = \mathfrak{H}_K = \langle \bar{i} \rangle \langle \overline{1+i} \rangle \langle \overline{\varepsilon_r} \rangle$ ,  $C_K \subset Z_K$ .

Nous résumons maintenant les résultats obtenus pour le noyau hilbertien. Nous avons donné les conditions les plus simples à vérifier numériquement. Par exemple, dans le cas  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$ ,  $\varepsilon = \pm i\varepsilon_r$  et la condition «  $16 \nmid u$  » correspond à un type d'écriture locale aux places divisant 2 pour l'unité

fondamentale  $\varepsilon$ . Cela a une répercussion ensuite pour la trivialité ou non de  $\text{Gal}(H_K/Z_K)$  qui est construit en examinant certains idéaux principaux (cf §2). Les conditions obtenues reposent sur la théorie du corps de classes, il s'agit de congruences. Nous informons que maintes vérifications ont été faites sur ordinateur grâce en particulier aux variables du système informatique Pari. De plus, toutes les démonstrations sont disponibles pour le lecteur curieux, elles sont du même type que celle fournie pour le cas dit 8 de  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$ .

**THÉOREME 2.** *Les corps biquadratiques  $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, i)$  et leurs sous-corps quadratiques réels  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  et imaginaires  $k^* = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$  donnant lieu à un 2-noyau hilbertien trivial sont les suivants :*

- Corps  $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{m})$  avec  $(H_2K)(2)$  trivial :
  - (i)  $m = 2^{\text{ou}1} \ell_1, \ell_1 \equiv \pm 3[8]$
  - (ii)  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$  et  $16 \nmid u$  où  $\varepsilon_r = u + v\sqrt{\ell_1}$
  - (iii)  $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 7[8], \ell_1 \equiv -\ell_2 \equiv 3[8]$
  - (iv)  $m = 2\ell_1 \equiv 14[16]$  et  $8 \nmid v$  où  $\varepsilon_r = u + v\sqrt{2\ell_1}$
  - (v)  $m = 2\ell_1 \ell_2 \equiv 14[16], \ell_1 \equiv -\ell_2 \equiv 3[8]$  et  $|Cl_K(2)| = 4$ .
- Corps  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  avec  $(H_2k)(2)$  trivial :
  - (vi)  $m = 2^{\text{ou}1} \ell_1, \ell_1 \equiv \pm 3[8]$
  - (vii)  $m = \ell_1 \equiv 1[8], \log_{\mathfrak{p}_{\text{II}}}(\varepsilon_r) \notin \mathfrak{p}_{\text{II}}^3$
  - (viii)  $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 1[8], \ell_1 \equiv 3[8]$ .
- Corps  $k^* = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$  avec  $(H_2k^*)(2)$  trivial :
  - (ix)  $m = 2^{\text{ou}1} \ell_1, \ell_1 \equiv \pm 3[8]$
  - (x)  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$
  - (xi)  $m = \ell_1 \ell_2 \equiv 7[8], \ell_1 \equiv 3[8]$ .

Rappelons que  $H_2\mathbb{Q}$  et  $H_2\mathbb{Q}(i)$  sont triviaux (cf. [BT]). Concernant le noyau modéré  $K_2\mathcal{O}_K$ , en respectant l'ordre des cas ci-dessus, nous avons :

**COROLLAIRE.** *Dans chacun des cas précédents, la 2-partie du  $K_2$  de l'anneau*



des entiers est donnée par :

- (i)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) = 1$
- (ii)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) = \langle \{i, \alpha\} \rangle \simeq C_4$  avec  $\alpha\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_{\text{II}}^{1+2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$  minimal)
- (iii)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) = \langle \{i, \alpha\} \rangle \simeq C_4$  avec  $\alpha\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_{\text{II}}^{2^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$  minimal)
- (iv)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) = \langle \{-1, \alpha\} \rangle \simeq C_2$ ,  $\alpha\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_{\text{II}}\mathfrak{P}^2$ ,  $\langle cl(\mathfrak{P}) \rangle \simeq C_4$
- (v)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) = \langle \{-1, \alpha\} \rangle \simeq C_2$ ,  $\alpha\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}^2$ ,  $Cl_K(2) = \langle cl(\mathfrak{P}_{\text{II}}) \rangle \langle cl(\mathfrak{P}) \rangle$
- (vi)  $(K_2\mathcal{O}_k)(2) = C_2^2 = \begin{cases} \langle \{-1, -1\}, \{-1, \alpha\} \rangle, \alpha\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_{\text{II}}, \ell_1 \equiv 3[8] \\ \langle \{-1, -1\}, \{-1, \varepsilon_r\} \rangle \text{ si } \ell_1 \equiv 5[8] \end{cases}$
- (vii)  $(K_2\mathcal{O}_k)(2) = \langle \{-1, -1\}, \{-1, \varepsilon_r\}, \{-1, \alpha\} \rangle \simeq C_2^3$ ,  $\alpha\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_{\text{II}}^{1+2n}$
- (viii)  $(K_2\mathcal{O}_k)(2) = \langle \{-1, -1\}, \{-1, \varepsilon_r\}, \{-1, \alpha\} \rangle \simeq C_2^3$ ,  $\alpha\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_{\text{II}}^{1+2n}$
- (ix)  $(K_2\mathcal{O}_{k^*})(2) = 1$
- (x)  $(K_2\mathcal{O}_{k^*})(2) = \langle \{-1, -1\} \rangle \simeq C_2$
- (xi)  $(K_2\mathcal{O}_{k^*})(2) = \langle \{-1, -1\} \rangle \simeq C_2$

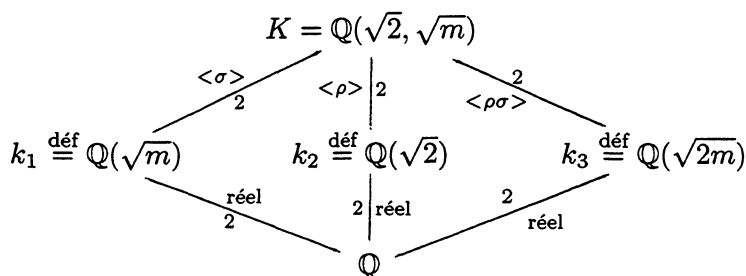
En effet, lorsque le 2-Sylow du noyau hilbertien est nul, les structures des 2-Sylow des noyaux réguliers et modérés sont données par les isomorphismes :

$$(R_2K)(2) \simeq \frac{\bigoplus_{\mathfrak{P}|2} \mu_{\mathfrak{P}}^1}{\text{Image}(\mu_K)} \quad \text{et} \quad (K_2\mathcal{O}_K)(2) \simeq \frac{\{-1; +1\}^{r_1(K)} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{P}|2} \mu_{\mathfrak{P}}^1}{\text{Image}(\mu_K)}.$$

Celui de droite est donné par les signatures et les parties sauvages des symboles de Hilbert.

### 3.b. Etude des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$ .

Ces corps totalement réels (rappelons qu'ici  $m > 2$ ) offrent une palette plus variée aux conditions arithmétiques regardées compte tenu du rôle des signatures.  $m = \prod_{\ell|m} \ell$  est un entier impair, sans facteur carré,  $m > 1$ .



$$E_{k_i} = \langle -1 \rangle \varepsilon_i^{\mathbb{Z}}, \quad E_K^S = \begin{cases} \langle -1 \rangle \hat{\varepsilon}_1^{\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}_2^{\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}_3^{\mathbb{Z}} \pi_1^{\mathbb{Z}} & \text{si } m \not\equiv 1[8], \\ \langle -1 \rangle \hat{\varepsilon}_1^{\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}_2^{\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}_3^{\mathbb{Z}} \pi_1^{\mathbb{Z}} \pi_2^{\mathbb{Z}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme précédemment, une étude préliminaire avec la formule des  $T$ -classes ambiges de  $[J_1]$  (voir aussi §4) permet de sélectionner neufs cas. Nous énonçons simultanément les principales conclusions.

PROPOSITION 2. *Résultats pour les corps biquadratiques réels  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  :*

1.  $m = \ell_1 \equiv 3[8]$   $r_2 = 0$ ,  $C_2.C_2.C_2.C_2 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
2.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 3[8], \ell_1 \equiv 7[8]$   $r_2 = 2$ ,  $C_4.C_4.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
3.  $m = \ell_1 \equiv 5[8]$   $r_2 = 0$ ,  $C_2.C_2.C_2.C_2 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
4.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 5[8], \ell_1 \equiv 7[8]$   $r_2 = 2$ ,  $C_4.C_4.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
5.  $m = \ell_1 \equiv 1[8]$  et (\*)  $r_2 = 1$ ,  $C_4.C_2.C_2.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
6.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 1[8], \ell_1 \equiv 3[8]$   $r_2 = 1$ ,  $C_4.C_2.C_2.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
7.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 1[8], \ell_1 \equiv 5[8]$   $r_2 = 1$ ,  $C_4.C_2.C_2.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
8.  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$  et (\*\*)  $r_2 = 1$ ,  $C_{16}.C_2.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
9.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 7[8], \ell_1 \equiv 3[8]$   $r_2 = 1$ ,  $C_{16}.C_2.C_2.C_2 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .

$r_2$  signifie ici  $rg_2(H_2K)$ . Concernant les cas 5 et 8, (\*) signifie que nous imposons : « un seul des deux nombres  $\sqrt{2}$  et  $1 + \sqrt{2}$  est norme de  $K$  à  $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  » ( $m = 41, 73, 89, 137, \dots, 457, \dots$ ), et (\*\*) «  $2 + \sqrt{2}$  n'est pas norme de  $K$  à  $k_2$  » ce qui arrive par exemple pour ( $m = 7, 23, 71, \dots, 311, \dots$ ).

*Justification des résultats annoncés :* Quelques notations :  $\mathfrak{p}_{II}$  divise 2 dans un des trois corps quadratiques que le contexte permet de déterminer,  $\mathfrak{P}_{II}$  divise 2 dans  $\mathcal{O}_K$ . Nous oublions les barres qui signifient modulo les carrés dans l'écriture des radicaux kummeriens.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est 2-régulier (cf introduction) et la transmission de cette propriété à  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{m})$  ne s'opère que pour les cas 1 et 3. La valeur des symboles de Hilbert  $\left(\frac{m, 1+\sqrt{2}}{\mathfrak{p}_{II}}\right)_2, \left(\frac{m, 2+\sqrt{2}}{\mathfrak{p}_{II}}\right)_2$  égale à -1 pour de tels  $m$ , la vérification  $(m)_{\mathfrak{p}_{II}} \notin \langle -1 \rangle (k_2)_{\mathfrak{p}_{II}}^{\times 2}$ , la connaissance des groupes locaux de racines de l'unité permettent d'affirmer cela. De façon plus précise :

LEMME 3. *Soit  $m > 1$  un entier impair sans facteur carré,  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  un corps biquadratique réel.*

*Si  $m \equiv \pm 3[8]$ ,  $\prod_{\mathfrak{p}_{II}|2} \mu_{\mathfrak{p}_{II}}^1 = \mu_K(2)$ ,  $rg_2(H_2K) = rg_2(Cl_K^{S+})$ .*

*Si  $m \equiv 1[8]$ ,  $\prod_{\mathfrak{p}_{II}|2} \mu_{\mathfrak{p}_{II}}^1 = \langle -1 \rangle \langle -1 \rangle$ ,  $rg_2(H_2K) = rg_2(Cl_K^{S+}) + (0 \text{ ou } 1)$ .*

Si  $m \equiv 7[8]$ ,  $\prod_{\mathfrak{p}_{II}|2} \mu_{\mathfrak{p}_{II}}^1 = \langle \zeta_8 \rangle$ ,  $rg_2(H_2K) = rg_2(Cl_K^{S+}) - (0oul)$ .

En effet, la théorie du corps de classes donne  $rg_2(Cl_K^{S+}) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K$ . Les inégalités entre  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K$  et  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K$  résultent des différences éventuelles entre les groupes de racines de l'unité d'ordre 2-primaire locales et globales d'après les définitions idéliques de ces radicaux kummériens (§2.a). Compte tenu de la liste de ces groupes de racines de l'unité suivant les cas, nous avons ainsi : (pour  $m \equiv \pm 3[8]$ ,  $\mathfrak{G}_K \simeq \mathfrak{D}_K$ ), (pour  $m \equiv 1[8]$ ,  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K + (0oul)$ ), (pour  $m \equiv 7[8]$ ,  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{D}_K - (0oul)$ ). Et comme la  $\mathbb{F}_2$ -dimension de  $\mathfrak{G}_K$  égale ici le 2-rang du noyau hilbertien (§2.a), le lemme 3 est montré.

Le lemme 4 suivant a le même but que le lemme 3, à savoir encadrer  $rg_2(Gal(H_K/Z_K)) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K$  avec des « objets classiques ».

LEMME 4.  $rg_{\mathbb{Z}_2}(E_K) + rg_2(Cl_K) - rg_{\mathbb{Z}_2} \left( \prod_{\mathfrak{p}_{II}|2} (U_{\mathfrak{p}_{II}}^1)^{libre} \right) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K = rg_2(H_2K) \leq rg_{\mathbb{Z}_2}(E_K) + rg_2(Cl_K)$

En effet, les éléments globaux pouvant fournir, à travers leurs écritures locales, des générateurs de  $Gal(H_K/Z_K)$  sont les unités et certains générateurs d'idéaux (se reporter aux explications de la fin du §2). Ceci donne l'inégalité de droite. Dans un second temps, nous regardons ces idéles principaux en les localisés de  $K$  au dessus de 2. Puis, par des produits adéquats entre ces idéles principaux, nous construisons les générateurs de  $\mathfrak{G}_K$  conformément à sa définition. Le nombre minimal de tels générateurs donne l'inégalité de gauche. Notons que pour ce lemme 4,  $K$  est un corps de nombres quelconque.

Jusqu'à présent, seules les conclusions relatives aux cas 1 et 3 ont été établies. Maintenant, détaillons les calculs du cas 8, les autres se traitent dans le même esprit, idem pour les corps  $Q(i, \sqrt{m})$ . Cet exemple illustre les calculs entrepris sur tous les autres cas. La majeure partie des calculs idéliques s'effectue en le ou les localisés de  $K$  en les places de  $S$  où nous exploitons la possibilité de factorisation.

$$K_{\mathfrak{p}_{II}}^\times \simeq \zeta_8 = \left\langle \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cdot (U_{\mathfrak{p}}^1)^{libre} \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{2} + i}{\sqrt{2}} \right)^{\mathbb{Z}}$$

$$\text{avec } (U_{\mathfrak{p}}^1)^{libre} = (2 + i)^{\mathbb{Z}_2} (1 + \sqrt{2})^{\mathbb{Z}_2} (1 + \sqrt{14})^{\mathbb{Z}_2} (1 + 2)^{\mathbb{Z}_2}$$

Remarquons qu'une  $\mathbb{Z}_2$  base multiplicative des unités principales n'est pas toujours aussi simple à trouver suivant les cas. Des calculs préliminaires avec la formule des classes ambiges montrent que nous avons ici :

$$rg_2(Cl_K^+) = 2, rg_2(Cl_K) = 0, rg_2(Cl_K^{S+}) = 1, rg_2(Cl_K^S) = 0.$$

Répertorions quelques renseignements numériques :

LEMME 5. *Avec les notations précédentes nous avons :*

- Dans  $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_1})$  :

$$\mathfrak{M}_{k_1} = \langle -1 \rangle \langle 2 \rangle \langle \pi_{k_1} \rangle \text{ avec } (\pi_{k_1}) = \mathfrak{p}_{II} \text{ et } \pi_{k_1}^2 = 2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \square.$$

$$(\varepsilon_1)_{\mathfrak{p}_{II}} = i^{1+\dots} \cdot (2+i)^{2^{n+1}+\dots} \cdot (1+2)^{2^n+\dots}. \quad Gal(H_{k_1}/Z_{k_1}) \simeq C_{2^n}.$$

$$\mathfrak{C}_{k_1} = \mathfrak{D}_{k_1} = \langle -1 \rangle, \quad {}_2K_2\mathcal{O}_{k_1} = \langle \{-1, -1\}, \{-1, \pi_{k_1}\} \rangle. \quad rg_2(H_2k_1) = 1,$$

$$C_8 \cdot C_2 \leq K_2\mathcal{O}_{k_1}.$$

- Dans  $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2\ell_1})$  :

des phénomènes comparables.

- Dans  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_1}, \sqrt{2})$  :

$$\mathfrak{M}_K = \langle -1 \rangle \langle \sqrt{\varepsilon_1} \rangle \langle \varepsilon_2 \rangle \langle \sqrt{\varepsilon_3} \rangle \langle \pi_K \rangle \text{ avec } (\pi_K) = \mathfrak{P}_{II}.$$

Nous regardons maintenant les écritures locales des éléments intéressants pour bâtir  $Gal(H_K/Z_K)$  (cf §2). Ici (le cas 8 est simple), ce sont uniquement un système d'unités fondamentales.

$$(\sqrt{\varepsilon_1})_{\mathfrak{p}_{II}} = \zeta_8^{1+\dots} (2+i)^{2^n+\dots} (1+2)^{2^{n-1}+\dots} \quad (\varepsilon_2)_{\mathfrak{p}_{II}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$(\sqrt{\varepsilon_3})_{\mathfrak{p}_{II}} = \zeta_8^{2+\dots} (1 + \sqrt{14})^{2+\dots} (1+2)^{1+\dots}.$$

Quant aux deux autres nombres intervenant dans  $\mathfrak{M}_K$  ( $\pi_k$  définie modulo  $E_K$ ), nous avons :

$$(-1)_{\mathfrak{p}_{II}} = \zeta_8^4 \quad (\pi_K)_{\mathfrak{p}_{II}} = \zeta_8^{\dots} (2+i)^{2^{n-1}+\dots} (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{14})(1+2) \cdot \square \cdot (1-\zeta_8).$$

EXEMPLE. Pour  $m = 311$ ,  $2 + \sqrt{2} \notin N_{K/k_2}(K^\times)$ , il vient :

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \frac{4109\sqrt{2}+233\sqrt{622}}{2} = \zeta_8(2+i)^{2+2^5+2^7+\dots} (1+2)^{1+2^2+2^7+\dots},$$

$$\sqrt{\varepsilon_3} = 58746\sqrt{2} + 4711\sqrt{311} = \zeta_8^2(1+\sqrt{14})^{2+2^2+2^4+2^7+\dots} (1+2)^{1+2^3+2^6+\dots}.$$

Nous nous apercevons que pour les valeurs de  $m$  de ce cas 8, nous pouvons construire un générateur de  $Gal(H_K/Z_K)$  en formant l'idèle principal  $\left( (\sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_3}^{0_{ou}1})_{\mathfrak{p}} \right)$ , en gommant ses composantes relativement aux groupes

de racines de l'unité puis en extrayant une racine  $2^h$ -ième pour  $h$  un nombre entier adéquat. Par suite,  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K = rg_2(Gal(H_K/Z_K)) = rg_2(H_2K) = 1$ ,  $\mathfrak{H}_K = \mathfrak{M}_K^\oplus = \langle 2 + \sqrt{2} \rangle \langle \sqrt{\varepsilon_1} \varepsilon_2 \rangle$ ,  $\mathfrak{J}_K = \langle 2 + \sqrt{2} \rangle$ ,  $\mathfrak{C}_K = \langle -1 \rangle \langle \sqrt{\varepsilon_3} \rangle$ ,  $\mathfrak{D}_K = \langle -1 \rangle$ ,  $\mathfrak{C}_K^\oplus = \mathfrak{D}_K^\oplus = 1$ ,  $\frac{\{-1, +1\}^4}{signature(E_K)} \simeq C_2 \cdot C_2$ . La démonstration des résultats annoncés pour le cas 8 des corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$  est achevée.

Les écritures locales des éléments susceptibles de bâtir  $\mathfrak{G}_K$  suivent des scénarios en parties prévisibles vus les impératifs amenés par les 2-rangs

connus des groupes  $Cl_K^+, Cl_K, Cl_K^{S+}, Cl_K^S$ . Néanmoins, les nombres utilisent tous les degrés de liberté possibles laissés par le fait que ce seul type de renseignements donnés par des objets liés aux valuations ordinaires est insuffisant. Ainsi, il y a plusieurs possibilités parfois (voir les résultats); la spécificité des corps biquadratiques, principalement allure de leurs  $\mathbb{Z}_2$ -bases multiplicatives des unités principales des localisés en 2, contrôle de la provenance des unités, permet de conclure. Ceci justifie la vision des radicaux selon le §2, en utilisant la structure multiplicative d'un corps local mais malheureusement des cas amènent des calculs plus compliqués, il est prudent de programmer informatiquement pour éclaircir ces problèmes. Le système Pari, originaire de Bordeaux, offre l'utilisation de variables adaptées à de tels problèmes, en particulier des entiers extrêmement grands. Cet aspect important pour la vérification ne sera pas abordé ici car trop long à décrire.

Avec ce cas 8, nous visualisons aisément la structure galoisienne des unités qui est l'un des arguments utilisés par Brumer pour établir la validité de la conjecture de Leopoldt dans le cas absolument abélien.

#### 4. Familles d'arguments utilisées au cours de cette recherche effective

Comme le lecteur a pu s'en apercevoir, le travail est technique. Il s'agit de théorie du corps de classes effective avec le calcul du 2-rang de  $Gal(H_K/Z_K)$  et le maître mot est congruence (ou écriture locale). Nos investigations utilisent principalement des théories et résultats que nous citons maintenant.

Pour obtenir les 2-rangs des groupes de classes  $Cl_K, Cl_K^+, Cl_K^S, Cl_K^{S+}$ , nous utilisons la formule des  $T$ -classes ambiges de  $[J_1]$  relativement à une extension cyclique  $K$  d'un corps de nombres  $k$  :

$$|(Cl_K^T)^{\text{Gal}(K/k)}| = |Cl_k^T| \cdot \frac{\prod_{p \notin T_f} e_p \cdot \prod_{p \in T_f} e_p f_p \cdot 2^{T(K/k)_\infty}}{[K:k] \cdot (E_k^T : E_k^T \cap N_{K/k}(K^\times))}$$

où  $T_f$  désigne les places finies de  $k$  qui appartiennent à  $T$ ,  $T(K/k)_\infty$  celles des places réelles de  $k$  mises dans  $T$  qui se complexifient dans  $K$ .  $E_k^T$  désigne les  $T$ -unités.

Les calculs des différents facteurs intervenant dans la formule des classes ambiges sont locaux et interviennent le principe de Hasse, la formule du produit pour les symboles de Hilbert (la loi de réciprocité dans le cadre d'extensions kummeriennes), des calculs de congruences. Le rôle de  $k$  est joué par  $\mathbb{Q}(i)$  ou  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  et celui de  $K$  par  $\mathbb{Q}(i, \sqrt{m})$  ou  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{m})$ .

La théorie du corps de classes proprement dite est omniprésente, en particulier les lien entre le 2-rang de certains groupes de classes qui sont des groupes de Galois et les  $\mathbb{F}_2$ -dimensions des radicaux kummeriens correspondants.

Nous utilisons la spécificité des corps biquadratiques, une partie des calculs se ramenant aux sous-corps quadratiques. Mais comme le premier est 2, des phénomènes perturbateurs empêchent de tout déduire de calculs dans les sous-corps quadratiques.

Où l'on s'aperçoit que l'on a besoin de formules explicites de symboles de Hilbert sauvage, c'est à dire relatives à la partie 2-primaire aux places divisant 2. La partie modérée d'un symbole de Hilbert est analogue à l'action d'un Frobenius mais la partie sauvage est beaucoup plus délicate. Dans les travaux préliminaires avec les sous-corps quadratiques, nous avons trouvé de telles formules en étudiant le plongement kummerien dans une  $\mathbb{Z}_2$ -extension d'un corps quadratique (imaginaire). Ces travaux ont été effectués dans le cadre de la thèse de de l'auteur mais sont trop longs pour être rappelés ici. Le type de formule trouvée est le suivant : pour  $-m \equiv 14[16]$ ,  $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-m}) = \mathbb{Q}_2(\sqrt{14})$ , puis nous choisissons  $\mathbb{Q}_2(\sqrt{14})^\times = \langle -1 \rangle (1 + \sqrt{14})^{\mathbb{Z}_2} (1 + 2)^{\mathbb{Z}_2} \sqrt{14}^{\mathbb{Z}}$ .  $\mathfrak{p}_{11}$  représente l'idéal de la valuation dans  $\mathbb{Q}_2(\sqrt{14})$  et nous calculons, grâce aux travaux précédemment évoqués :

$$\left( \frac{-1, 1 + \sqrt{14}}{\mathfrak{p}_{11}} \right)_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{14}, 1 + 2}{\mathfrak{p}_{11}} \right)_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{14}, 1 + \sqrt{14}}{\mathfrak{p}_{11}} \right)_2 = -1.$$

Nous factorisons dans un corps local en privilégiant sa structure multiplicative, et pour cela nous fixons une forme explicite d'une  $\mathbb{Z}_2$ -base des unités principales. Nous utilisons ainsi pleinement la possibilité de rendre la théorie du corps de classes effective, le 2-adifié du groupe des idèles construit par J.-F. Jaulent se révélant particulièrement bien adapté ici, surtout avec la notion « localement partout plongeable » qui se marie bien avec une description idélique du groupe de Galois  $\text{Gal}(H_K/Z_K)$ . Au §3 se trouve déjà un corps local « factorisé ». Un autre exemple : pour  $m \equiv 1[8]$  et  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, i)$ , il vient :

$$\prod_{\mathfrak{p}_{11}|2} K_{\mathfrak{p}_{11}}^\times = \mathbb{Q}_2(i)^\times \times \mathbb{Q}_2(i)^\times \text{ et } \mathbb{Q}_2(i)^\times = \langle i \rangle (2 + i)^{\mathbb{Z}_2} (1 + 2)^{\mathbb{Z}_2} (1 + i)^{\mathbb{Z}}.$$

Notons que les écritures locales des éléments globaux regardés sont en parties prévisibles compte tenu de leurs normes absolues, mais aucun scénario n'est écarté a priori. De plus, pour les corps totalement réels, la situation

se complique et il nous faut utiliser les différences fines issues des signatures entre certains radicaux kummeriens.

## 5. Remarques sur la transmission de « $\text{rg}_2(H_2k) = 0$ » à des extensions $K$ de $k$

Soit  $k$  avec  $\text{rg}_2(H_2k) = 0$ , ce que nous appelons avoir la propriété (sdse) (sans 2-symbole exotique). Quelles sont les extensions  $K$  de  $k$  qui bénéficient de (sdse) ?

**PROPOSITION 3.** *Si  $F$  est une extension de  $k$  de degré impair, vérifiant la conjecture de Leopoldt en 2, les composantes cycliques de  $\text{Gal}(H_k/Z_k)$  se conservent dans  $\text{Gal}(H_F/Z_F)$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathfrak{r} \in \mathcal{J}_k$  avec  $\mathfrak{r}^2 \in \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2)\mathcal{R}_k$  mais  $\mathfrak{r} \notin \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2)\mathcal{R}_k$ . Si l'on avait

$\mathfrak{r} \in \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2)\mathcal{R}_K$  dans  $\mathcal{J}_K$ , nous aurions un idéal principal  $\frac{\eta^2}{\mathfrak{z}}$  avec  $\eta \in \mathcal{J}_K$

et  $\mathfrak{z} \in \mathcal{J}_k$  qui appartiendrait à  $\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}(2)\mathcal{R}_K$  sans être dans l'image de  $\mu_K(2)$

dans  $\mathcal{J}_K$ . La conjecture de Leopoldt étant valide pour  $K$  (et pour  $k$ ), ceci ne peut se réaliser que si  $y^2 = \zeta_{2^n} \cdot z$  où  $y$  correspond à  $\eta$  et  $z$  à  $\mathfrak{z}$ , avec  $\zeta_{2^n} \in \mu_K(2)$ . Mais  $[K : k]$  ne serait plus impair.

Dans la suite, nous regardons seulement le cas où  $K = k(\sqrt{x})$ ,  $x \in k$ .

Comme nous le rappelons dans l'introduction, le problème de la transmission de la 2-régularité (i.e. de la trivialité de  $\text{rg}_2(R_2k)$ ) est complètement résolu par les travaux de [GJ] et [MN]. Des chercheurs (voir début du §3) ont résolu le problème de la transmission de la « 2-régularité ». Cette propriété se traduit ici par les conditions équivalentes suivantes :

(i)  $\dim_{\mathbb{K}_2} \mathfrak{M}_K^{\oplus} = 1 + r_2(K)$  (ou  $\text{Gal}(M_K^{\oplus}/K) \simeq \mathbb{Z}_2^{1+r_2(K)}$ )

(ii)  $(K_2\mathcal{O}_K)(2) \simeq \overbrace{C_2 + \cdots + C_2}^{r_1(K) \text{ fois}}$  (ou  $(R_2K)(2) = 1$ ).

(iii)  $Cl_K^{S+}$  a un 2-sylow nul et  $\prod_{\mathfrak{p}_{\text{II}}|2} \mu_{\mathfrak{p}_{\text{II}}}^1 = \mu_K(2)$ .

(iv)  $K$  n'a qu'un idéal premier,  $\mathfrak{P}_{\text{II}}$ , au dessus de 2,  $Cl_K(2) = \langle cl(\mathfrak{P}_{\text{II}}) \rangle(2)$  et les  $S$ -unités réalisent toutes les signatures.

Pour la propriété (sdse), des phénomènes plus fins localement sont à regarder. On peut voir en particulier que ce n'est plus une propriété héréditaire (si un corps la possède, il n'en est pas forcément de même pour les sous-corps). Rappelons qu'interviennent dans son expression les écritures locales en 2 d'un système d'unités fondamentales de  $K$  et de générateurs d'idéaux en rapport avec  $Cl_K(2)$  (§2), ceci modulo les carrés locaux. Notons que si nous possédons ces renseignements, il nous est

alors possible de vérifier numériquement la conjecture de Leopoldt dans le corps  $K$  pour le premier 2, qu'entraîne la propriété (sdse). Bien entendu, les couples  $(k, K)$  avec même nombre de Dirichlet (ceci n'arrive que si  $K = k(\sqrt{x})$ ,  $x \in k^\times$ ,  $K$  tot. complexe et  $k$  tot. réel) voire mêmes unités sont ceux dont l'étude est la plus aisée.

Pour illustrer ces propos, nous avons traité l'exemple des corps  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  et  $K = k(\sqrt{-m})$ , où  $m$  est comme au §3.

PROPOSITION 4. *Résultats pour les corps imaginaires  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-m})$  :*

1.  $m = \ell_1 \equiv 3[8]$   $rg_2(H_2K) = 0$ ,  $1 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
2.  $m = \ell_1 \equiv 5[8]$   $rg_2(H_2K) = 0$ ,  $1 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
3.  $m = \ell_1 \equiv 7[8]$  et  $(*)$   $rg_2(H_2K) = 0$ ,  $C_2 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
4.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 7[8]$ ,  $\ell_1 \equiv 3[8]$   $rg_2(H_2K) = 0$ ,  $C_2 = (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
5.  $m = \ell_1 \equiv 1[8]$  et  $(*)$   $rg_2(H_2K) = 1$ ,  $C_8 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .
6.  $m = \ell_1\ell_2 \equiv 1[8]$ ,  $\ell_1 \equiv \pm 3[8]$   $rg_2(H_2K) = 1$ ,  $C_8 \leq (K_2\mathcal{O}_K)(2)$ .

où  $(*)$  signifie que nous imposons la condition  $2 + \sqrt{2} \notin N_{K/k}(K^\times)$ .

NOTA. Dans le cas 3 et 4 ci-dessus la 2-partie du  $n$ -noyau modérée  $K_2\mathcal{O}_K(2)$  est engendrée par le symbole  $\{-1, 1 + \sqrt{2}\}$ .

*Justifications de ces résultats :* pour les cas 1 et 2, il est aisé de voir grâce à la formule des classes ambiges citée au §5 que  $k$  transmet sa 2-régularité à  $K$ . Les autres cas amènent des calculs analogues à ceux décrits au §4 mais grandement facilités par la persistance de  $1 + \sqrt{2}$  à être encore l'unité fondamentale de  $K$ .

De plus, notons que pour les cas 4 à 6,  $Cl_K \geq C_4 \cdot C_2$ . En restant dans ces cas particuliers:

LEMME 6. *Soient comme ci-dessus  $K$  et  $k$  avec le même nombre de Dirichlet noté  $r$ . Ecrivons  $E_k = \mu_k \prod_{i=1}^{i=r} \varepsilon_i^{\mathbb{Z}}$ . Supposons de plus  $(\varepsilon_i)_{\mathfrak{p}_{II}} \in$*

*$(k_{\mathfrak{p}_{II}}^\times)^8$  pour chaque  $\mathfrak{p}_{II} \mid 2$ . On a alors  $rg_2(H_2K) \geq \dim_{\mathbb{F}_2} \mathfrak{G}_K \geq r$  (et de même pour  $k$ ), avec égalité à gauche sous la conjecture de Leopoldt.*

*Preuve.* De telles écritures locales d'un système d'unités fondamentales font apparaître autant de composantes cycliques dans le groupe de Galois  $Gal(H_K/Z_K)$ .

Les espoirs de ne pas traiter que des cas particuliers (cf lemme 5) lorsque l'on ne s'autorise que des calculs dans  $k$  sont minces. Les arguments « traditionnels » à base de théorie du corps de classes, de classes d'idéaux



ambiges ne fournissent qu'une première approximation en nous indiquant si une extension  $K = k(\sqrt{x})$  de  $k$  ayant (sdse) ou n'en étant pas trop éloignée est susceptible de posséder cette propriété (sdse). Après ce travail, *en toute généralité*, nous ne proposons pas d'alternative à l'action de travailler dans  $K$  pour vérifier numériquement la conjecture de Leopoldt, pour calculer des dimensions de radicaux kummériens tels que  $\widehat{\mathfrak{G}}_K, \mathfrak{G}_K, \mathfrak{D}_K$ .

# RÉFÉRENCES.

- [BT] H. Bass and J. Tate, *The Milnor ring of a global field*, (with an appendix by J. Tate), in Algebraic K-theory II. Lecture Notes in Mathematics, **342**, Springer-Verlag, 1973. Berlin-Heidelberg-New York.
- [BP] F. Bertrandias et J.-J. Payan,  $\Gamma$ -extensions et invariants cyclotomiques, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **5** (1972), 517–548.
- [BS] J. Browkin and A. Schinzel, *On Sylow 2-subgroups of  $K_2O_F$  for quadratic number fields  $F$* , J. reine angew. Math. **331** (1982), 104–113.
- [Br] A. Brumer, *On the units of algebraic number field*, Mathematika **14** (1967), 121–124.
- [Co] J. Coates, *p-adic L-functions and Iwasawa theory*, in Durham symposium in algebraic number field, (A. Frölich editor), Academic Press, 1977. New York, London.
- [CH] P.E. Conner and J. Hurrelbrink, *A comparison theorem for the 2-rank of  $K_2\mathcal{O}$* , Contemporary Mathematics **55**, Part II (1986), 411–420.
- [Ga] H. Garland, *A finiteness theorem for  $K_2$  of a number field*, Annals of Math. **94** (1971), 534–548.
- [Gi] R. Gillard, *Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante*, Abh. Math. Sem. Hambourg **48** (1979), 125–138.
- [G<sub>1</sub>] G. Gras, *Groupe de Galois de la p-extension abélienne p-ramifiée maximale d'un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **333** (1982), 86–132.
- [G<sub>2</sub>] G. Gras, *Plongements kummeriens dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, Compositio Math. **55** (1985), 383–396.
- [GJ] G. Gras et J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [J<sub>1</sub>] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des  $\ell$ -extensions*, (thèse) Pub. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nombres 1984-1985 & 1985-1986 (1986), 1–348.
- [J<sub>2</sub>] J.-F. Jaulent, *Sur les conjectures de Leopoldt et Gross*, in Journées arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.
- [J<sub>3</sub>] J.-F. Jaulent, *La théorie de Kummer et le  $K_2$  des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994).
- [J<sub>4</sub>] J.-F. Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arith. **67** (1994), 335–348.
- [KC] K. Kramer et A. Candiotti, *On  $K_2$  and  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of numbers fields*, Amer. J. Math. **100** (1978), 177–196.

- [Ma] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **4** 2 (1969), 1–62.
- [MN] A. Movahhedi & T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres  $p$ -rationnels*, Sémin. Th. des Nbres Paris (1987/1988), Prog. Math. **102** (1990), 155–197.
- [T<sub>1</sub>] J. Tate, *Symbols in arithmetics*, Actes Congrès intern. math., Tome 1 (1970), 201–211.
- [T<sub>2</sub>] J. Tate, *Relation between  $K_2$  and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
- [Th] H. Thomas, *Premier étage d'une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension*, Manuscripta Math. **81** (1993), 413–435.
- [Wh] K.S. Williams, *Integers of biquadratic fields*, Canad. Math. Bull. **13** (1970), 519–528.
- [Wi] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Annals of Math. **131** (1990), 493–540.

Hervé THOMAS  
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux  
Université de Bordeaux I  
351 , cours de la Libération  
33405 Talence Cedex, France.