Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Marc Deléglise
Jean-Louis Nicolas

Sur les entiers inférieurs à x ayant plus de $\log(x)$ diviseurs

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 6, n° 2 (1994), p. 327-357

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1994__6_2_327_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **6** (1994), 327–357

Sur les entiers inférieurs à x ayant plus de $\log(x)$ diviseurs.

par MARC DELÉGLISE & JEAN-LOUIS NICOLAS

ABSTRACT. – Let $\tau(n)$ be the number of divisors of n; let us define

$$S_\lambda(x) = \begin{cases} Card\{n \le x; \tau(n) \ge (\log x)^{\lambda \log 2}\} & \text{if } \lambda \ge 1 \\ Card\{n \le x; \tau(n) < (\log x)^{\lambda \log 2}\} & \text{if } \lambda < 1. \end{cases}$$

It has been shown that, if we set

$$f(\lambda, x) = \frac{x}{(\log x)^{\lambda \log \lambda - \lambda + 1}\sqrt{\log \log x}}$$

the quotient $S_\lambda(x)/f(\lambda, x)$ is bounded for λ fixed.

The aim of this paper is to give an explicit value for the inferior and superior limits of this quotient when $\lambda \le 2$. For instance, when $\lambda = 1/\log 2$, we prove

$$\liminf \frac{S_\lambda(x)}{f(\lambda, x)} = 0.938\,278\,681\,143\ldots$$

and

$$\limsup \frac{S_\lambda(x)}{f(\lambda, x)} = 1.148\,126\,773\,469\ldots$$

1. Introduction

Soit $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n. On sait depuis Hardy et Ramanujan (cf. [9],chap. 18) que l'ordre de grandeur normal de $\tau(n)$ est $(\log n)^{\log 2 + o(1)}$, ce qui est nettement inférieur à la valeur moyenne

$$n^{-1} \sum_{m \le n} \tau(m) = \log n + \mathcal{O}(1).$$

Il parait donc naturel d'évaluer

$$S_\lambda(x) = Card\{n \le x; \tau(n) \ge (\log x)^{\lambda \log 2}\} \qquad \text{pour } \lambda \ge 1,$$
$$S_\lambda(x) = Card\{n \le x; \tau(n) \le (\log x)^{\lambda \log 2}\} \qquad \text{pour } \lambda < 1.$$

Manuscrit reçu le 18 février 1993.

Le cas particulier $\lambda = 1/\log 2$, $S(x) = Card\{n \leq x; \tau(n) \geq \log x\}$ a été soulevé par Steinig (cf. [10], p.684).

Lorsque $\lambda = 1$, il résulte des inégalités $2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)}$ (ou $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ désignent le nombre de facteurs premiers de n sans et avec multiplicité), et du théorème de Erdös et Kac (cf. [6], ch. 12) que $S_1(x) \sim x/2$.

Lorsque $\lambda \neq 1$, on trouvera dans [1], accompagné d'un historique du sujet le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5 \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers,*

$$h(n,\lambda) = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p|n}} \left(1+\frac{\lambda}{p}\right)^{-1} \qquad H(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\lambda} \left(1+\frac{\lambda}{p}\right)$$

et $q(\lambda) = \lambda log \lambda - \lambda + 1$. On désigne par $\chi(d)$ la fonction caractéristique des nombres quadratiquement saturés (c'est à dire la fonction multiplicative définie par $\chi(p) = 0$ et $\chi(p^\alpha) = 1$ pour $\alpha \geq 2$). On désigne par $\lfloor t \rfloor, \{t\}, \lceil t \rceil$ respectivement, la partie entière, la partie fractionnaire, et le plafond du nombre réel t.
Soit λ_0 et λ_1 vérifiant $1 < \lambda_0 < \lambda_1$ (resp. $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < 1$); on a uniformément pour $x \geq 3$ et $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$

$$S_\lambda(x) = \frac{H(\lambda)}{|\lambda-1|}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} K(\{\lambda \log\log x\}) \frac{x(1+\mathcal{O}(1/\log\log x))}{(\log x)^{q(\lambda)}\sqrt{\log\log x}}$$

où l'on a posé

$$K(\theta) = \lambda^\theta \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) \lambda^{\lfloor (\log(\tau(d))/\log 2 + 1 - \theta \rfloor}. \tag{1}$$

Posons

$$L(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) \tau(d)^s. \tag{2}$$

La série ci dessus se met sous forme de produit eulerien (cf. (36)), qui montre qu'elle converge pour tout λ positif, et tout s réel. Il est facile de montrer, en utilisant l'inégalité $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$, que l'on a :

$$K(\theta) \leq \max(\lambda, \frac{1}{\lambda}) L\left(\frac{\log\lambda}{\log 2}\right)$$

ce qui prouve que la série (1) est uniformément convergente pour $0 \leq \theta \leq 1$. Comme il a été observé dans [1], il s'ensuit que $K(\theta)$ est continue en tout point $\theta \neq \{\log k/\log 2\}$. En ces derniers points elle est continue à gauche mais pas à droite, et vérifie $K(\theta^+) < K(\theta)$ (lorsque $\lambda > 1$). Par ailleurs, K est périodique, de période 1. Nous avons :

$$\begin{aligned} K(0^+) &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) \lambda^{\lceil (\log(\tau(d)))/\log 2 \rceil}, \\ K(0) &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) \lambda^{\lfloor (\log(\tau(d)))/\log 2 + 1 \rfloor}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous nous proposons dans cet article de préciser les bornes supérieures et inférieures de $K(\theta)$ en démontrant :

THÉORÈME 2. *Pour* $1 \leq \lambda \leq 2$, *on a :*

$$\inf_{0 \leq \theta \leq 1} K(\theta) = K(0^+) \qquad \textit{et} \qquad \sup_{0 \leq \theta \leq 1} K(\theta) = K(0).$$

Pour $0 < \lambda \leq 1$, *on a :*

$$\inf_{0 \leq \theta \leq 1} K(\theta) = K(0) \qquad \textit{et} \qquad \sup_{0 \leq \theta \leq 1} K(\theta) = K(0^+).$$

Des théorèmes 1 et 2, nous déduisons :

COROLLAIRE 3. *Désignons par* $\ell_1(\lambda)$ *et* $\ell_2(\lambda)$ *les limites inférieures et supérieures de* $x^{-1} S_\lambda(x) (\log x)^{q(\lambda)} \sqrt{\log \log x}$. *On a, pour* $1 < \lambda \leq 2$,

$$\ell_1(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{\lambda - 1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} K(0^+) \quad \textit{et} \quad \ell_2(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{\lambda - 1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} K(0)$$

et, pour $0 < \lambda < 1$,

$$\ell_1(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} K(0) \quad \textit{et} \quad \ell_2(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} K(0^+).$$

En particulier, lorsque $\lambda = 1/log2$, *en posant*

$$S(x) = S_{1/\log 2}(x), \ \delta = q(\lambda) = 1 - \frac{1 + \log \log 2}{\log 2} = 0.086\ldots$$

$$C' = \frac{H(1/\log 2)}{1-\log 2}\sqrt{\frac{\log 2}{2\pi}} = 0.378318620988\ldots$$

on obtient :

$$\ell_1 = \lim\inf(x^{-1}S(x)(\log x)^\delta\sqrt{\log\log x}) = C'K(0^+) = 0.9382787\ldots$$
$$\ell_2 = \lim\sup(x^{-1}S(x)(\log x)^\delta\sqrt{\log\log x}) = C'K(0) = 1.1481268\ldots .$$

L'idée de la démonstration du théorème 2 est d'écrire (1) sous la forme $K = K_1 + K_2$ où la fonction K_1 n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[0,1]$ et atteint nettement son maximum en 0 et son infimum en 0^+ (lorsque $\lambda > 1$). Il reste à vérifier que l'ajout des termes de K_2 ne pertube pas cette situation. Une première idée était de regrouper dans K_1 les termes de (1) correspondant à $1 \le d \le D$. Mais la convergence de la série (1) est lente et il faut prendre une valeur de D grande (au moins 10^9) pour pouvoir conclure.

La méthode présentée consiste à regrouper dans la série (1) tous les termes pour lesquels le nombre des diviseurs de d prend une même valeur $\tau(d) = j$; on obtient ainsi une autre expression de K:

$$K(\theta) = \sum_{j=1}^{j=\infty} u_j \lambda^{\lfloor \frac{\log j}{\log 2}\rfloor} f_j(\theta)$$

avec

$$u_j = \sum_{\tau(d)=j} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) \qquad f_j(\theta) = \lambda^{\theta + \lfloor e_j + 1 - \theta\rfloor} \qquad e_j = \left\{\frac{\log j}{\log 2}\right\}. \quad (5)$$

(Les e_j pour j impair ≤ 75 figurent dans la table 3.)
On écrit alors :

$$K_1(\theta) = \sum_{j=1}^{j=j_0} u_j \lambda^{\lfloor \frac{\log j}{\log 2}\rfloor} f_j(\theta) \quad \text{et} \quad K_2(\theta) = \sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \frac{\log j}{\log 2}\rfloor} f_j(\theta). \quad (6)$$

Pour $\lambda > 1$ et j fixés, la fonction f_j est continue à gauche et ne dépend que de la partie impaire de j. f_1 est maximum en 0 et croît de 0^+ à 1. Si la partie impaire de j est plus grande que 1 la fonction f_j a un seul point de discontinuité en e_j. Elle atteint son maximum en e_j et son infimum en e_j^+.

La première partie de la démonstration, c'est à dire l'étude de K_1, se ramène essentiellement au calcul des u_j pour $1 \leq j \leq j_0$. Le calcul de u_j (qui se généralise au calcul de $\sum_{\tau(d)=j} f(d)$ où f est une fonction multiplicative quelconque) est fait par une méthode combinatoire expliquée au §3. Dans la deuxième partie, pour montrer que l'influence de K_2 est négligeable, on majore $\sum_{j>j_0} u_j$ par la méthode de Rankin.

Dans les deux parties on a besoin de calculer avec une bonne précision certains produits eulériens. On rappelle dans le §2 une technique de calcul de sommes eulériennes. Le §4 étudie les fonctions f définies et bornées de $[0,1]$ dans R telles que $\inf f = f(0^+)$ et $\sup f = f(0)$. Dans le §5, nous introduisons les notations, et démontrons la proposition (5-4) qui est la partie théorique de la preuve du théorème 2. Dans le §6, on fixe les paramètres introduits au paragraphe précédent, et on expose les calculs numériques prouvant le théorème 2 lorsque $\lambda = 2$. Le §7 contient des lemmes techniques nécessaires pour l'extension du résultat prouvé pour $\lambda = 2$, à toutes les valeurs de l'intervalle $[0,2]$. Le §8 présente les résultats numériques qui terminent la preuve. Le §9 donne des précisions sur la manière dont sont conduits les calculs numériques. Dans le §10 on montre que le calcul des u_j permet aussi de calculer les valeurs $K(0)$ et $K(0^+)$ avec une meilleure précision que l'évaluation des séries (3). Finalement, dans le §11, nous envisageons le cas $\lambda > 2$. La situation change sensiblement, puisque le minimum et le maximum de K_1 ne sont plus atteints en 0^+ et en 0. Il ne nous a pas paru possible d'établir une conjecture.

Nous remercions très vivement J.P. Massias dont les premiers calculs nous ont permis de voir que cette méthode aboutissait.

2. Calcul de sommes et produits eulériens

Soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On veut calculer des sommes (ou des produits) portant sur $p \in \mathcal{P}$. La méthode de calcul présentée ici est décrite dans [11] p.69 (cf. aussi [7]). La formule (7) était connue de Glaisher (cf.[8]).

On a d'abord :

PROPOSITION 2.1. *Soit s réel, $s \geq 2$ et $p_0 \in P$. On pose :*

$$P(s) = \sum_{p \in P} \frac{1}{p^s}, \qquad P_{p_0}(s) = \sum_{p \in P, p > p_0} \frac{1}{p^s}.$$

On a alors:

$$P(s) < \frac{1}{2^{s-1}} \quad P_{p_0}(s) < \frac{1}{(s-1)p_0^{s-1}} \quad \text{et} \quad P(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log(\zeta(ks)) \tag{7}$$

où μ est la fonction de Möbius, et ζ la fonction de Riemann, et de plus:

$$\sum_{k>k_0} \frac{|\mu(k)|}{k} \log(\zeta(ks)) \leq \frac{1}{2^{k_0 s}} \qquad \textit{pour} \quad k_0 \geq 2.$$

Démonstration. La fonction

$$2^s(\zeta(s)-1) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^s + \left(\frac{2}{4}\right)^s + \dots$$

est décroissante pour $s > 1$. Par conséquent, pour $s \geq 2$ on a

$$\zeta(s) - 1 \leq (\zeta(2)-1)2^{2-s} = \frac{4}{2^s}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) < \frac{3}{2^s}. \tag{8}$$

On a ensuite, par la formule d'Euler

$$\log\zeta(s) = -\sum_{p\in P} \log(1-p^{-s}) = \sum_{p\in P}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-ks} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P(ks)$$

et par la formule d'inversion de Möbius, on obtient la troisième partie de (7).

On déduit aussi de la formule ci-dessus que $P(s) \leq \log(\zeta(s))$ et comme $2^s P(s)$ est une fonction décroissante de s, on a pour $s \geq 2$

$$P(s) \leq 2^{2-s}P(2) \leq 4\log(\zeta(2))2^{-s} \leq 2^{1-s}.$$

De plus

$$P_{p_0}(s) \leq \sum_{n>p_0} \frac{1}{n^s} \leq \int_{p_0}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(s-1)p_0^{s-1}}$$

ce qui achève la preuve de (7). Il vient enfin par (8)

$$\begin{aligned}\sum_{k>k_0} \frac{|\mu(k)|}{k} \log\zeta(ks) &\leq \sum_{k>k_0} \frac{1}{k}(\zeta(ks)-1) \leq \sum_{k>k_0} \frac{3}{k2^{ks}} \\ &\leq \sum_{k\geq k_0+1} 2^{-ks} < 2^{-k_0 s}.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque de centre O et de rayon r.*

Soit $A = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, et soit p_0 un nombre premier tel que $p_0 r > 2$. Alors on a

$$\sum_{p>p_0} f(\frac{1}{p}) = \sum_{n\geq 2} a_n P_{p_0}(n)$$

où la série en n converge géométriquement; plus précisement:

$$|\sum_{p>p_0} f(1/p) - \sum_{2\leq n\leq n_0} a_n P_{p_0}(n)| \leq \frac{2A}{rn_0}\frac{1}{(p_0 r)^{n_0}}. \tag{9}$$

Démonstration. On a

$$\sum_{p>p_0} f(1/p) = \sum_{p>p_0}\sum_{n\geq 2} a_n p^{-n} = \sum_{n\geq 2} a_n P_{p_0}(n),$$

car la série ci-dessus est absolument sommable. En effet, par la formule de Cauchy, $|a_n| \leq Ar^{-n}$, et par (7), $P_{p_0}(n) \leq 1/((n-1)p_0^{n-1})$. Il vient ensuite:

$$\begin{aligned}|\sum_{p>p_0} f(\frac{1}{p}) - \sum_{2\leq n\leq n_0} a_n P_{p_0}(n)| &= |\sum_{n>n_0} a_n P_{p_0}(n)| \\ &\leq \sum_{n>n_0} \frac{Ar^{-n}}{(n-1)p_0^{n-1}} \\ &= \frac{A}{r}\sum_{n>n_0}\frac{u^{n-1}}{n-1}\end{aligned}$$

en posant $u = 1/p_0 r$. Comme $u \leq 1/2$, il s'ensuit :

$$\sum_{n>n_0}\frac{u^{n-1}}{n-1} = \sum_{m\geq n_0}\frac{u^m}{m} \leq \frac{1}{n_0}\frac{u^{n_0}}{1-u} \leq \frac{2u^{n_0}}{n_0}$$

ce qui achève la preuve de (9).

Il résulte de (9) que $\sum_{p\leq p_0} f(1/p) + \sum_{2\leq n\leq n_0} a_n P_{p_0}(n)$ est une valeur approchée de la somme eulérienne $\sum_{p\in\mathcal{P}} f(1/p)$ avec une erreur inférieure à $2A/(rn_0(p_0 r)^{n_0})$.

3. Calcul des u_j par une formule combinatoire

Pour éclairer la suite montrons sur un exemple la méthode utilisée pour le calcul des u_j. Prenons le calcul de u_{30} :

$$u_{30} = \sum_{\tau(d)=30} \frac{\chi(d)}{d} h(d, \lambda).$$

Les nombres ayant 30 diviseurs s'obtiennent à partir des factorisations de 30 en entiers ≥ 2. Ce sont les nombres de la forme:

$p_1 p_2^2 p_3^4$	$(30 = 2.3.5)$
$p_1 p_2^{14}$	$(30 = 2.15)$
$p_1^2 p_2^9$	$(30 = 3.10)$
$p_1^4 p_2^5$	$(30 = 5.6)$
p^{29}	$(30 = 30)$

Parmi ces nombres, seuls ceux de la forme $p_1^2 p_2^9$, $p_1^4 p_2^5$, p^{29} sont quadratiquement saturés, c'est à dire vérifient $\chi(d) = 1$. En utilisant la multiplicativité de h et la relation $h(p^\alpha, \lambda) = h(p, \lambda)$. il vient :

$$u_{30} = \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 \neq p_2}} \frac{h(p_1, \lambda)}{p_1^2} \frac{h(p_2, \lambda)}{p_2^9} + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 \neq p_2}} \frac{h(p_1, \lambda)}{p_1^4} \frac{h(p_2, \lambda)}{p_2^5} + \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^{29}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} u_{30} = & \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^2} \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^9} - \sum_p \frac{h^2(p, \lambda)}{p^{11}} \\ & + \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^4} \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^5} - \sum_p \frac{h^2(p, \lambda)}{p^9} + \sum_p \frac{h(p, \lambda)}{p^{29}} \end{aligned}$$

et le calcul de u_{30} est ramené à des calculs de sommes eulériennes.

Pour traiter le cas général il faut utiliser une généralisation à k facteurs de la formule

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_2 \neq p_2}} f_1(p_1) f_2(p_2) = \sum_p f_1(p) \sum_p f_2(p) - \sum_p f_1 f_2(p)$$

utilisée ci dessus dans le cas de 2 facteurs. Introduisons quelques notations pour cela.

Soit $\mathcal{D}$ une partie de N, et soit a une fonction réelle ou complexe définie sur $\mathcal{D}$. On dira que a est sommable si la série $\sum_{x\in\mathcal{D}} a(x)$ est absolument convergente et on notera

$$[a] = \sum_{x\in\mathcal{D}} a(x).$$

Si $a_1, \dots, a_k$ sont k fonctions sommables sur $\mathcal{D}$, on pose

$$\Delta(a_1, \dots, a_k) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_k\in\mathcal{D}\\ x_i\neq x_j}} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i(x_i)\right)$$

où la somme porte sur les k-uplets d'éléments distincts de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots d_q\}$ est un ensemble fini de cardinal q, une autre définition de $\Delta(a_1, \dots, a_k)$ est le permanent à k colonnes, dont la i-ème ligne est $a_1(d_i), a_2(d_i), \dots, a_k(d_i)$ (cf. [2], t.2, p.29).

Avec ces notations la formule utilisée ci dessus correspondant à deux facteurs est :

$$\Delta(f, g) = [f][g] - [fg].$$

Cette formule donne une somme avec autant de termes qu'il y a de partitions de l'ensemble $\{1, 2\}$. Pour 6 facteurs on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta(a, b, c, d, e, f) = {} & [a][b][c][d][e][f] - [ab][c][d][e][f][g] \\ & \dots + 6[acef][bd] \dots + 4[aef][bcd] \dots - 120[abcdef].\end{aligned}$$

C'est une somme composée de 203 termes correspondant aux 203 partitions de l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$. Chaque classe de la partition est précédée d'un coefficient numérique qui est $(-1)^{k-1}(k-1)!$ si k est le cardinal de cette classe. La formule générale est :

PROPOSITION 3.1 (Crapo [3], cf. aussi [5]). *Soit $\mathcal{D} \subset N$ et $a = (a_1, \cdots, a_k)$ un k-uplet de fonctions sommables sur $\mathcal{D}$. Soit $\sigma \subset \{1, 2, \dots, k\}$. On note σa la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $\sigma a(x) = \prod_{i\in\sigma} a_i(x)$. On a :*

$$\Delta(a_1, \dots, a_k) = \sum_{P=\{\sigma_1,\dots,\sigma_\ell\}} (-1)^{k-\ell} P! [\sigma_1 a][\sigma_2 a] \dots [\sigma_\ell a] \qquad (10)$$

où la somme porte sur les partitions ensemblistes $P = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_\ell\}$ *de* $\{1, 2, \dots, k\}$ *et*

$$P! = \prod_{i=1}^{\ell} Card(\sigma_i - 1)!\ .$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner la formule générale pour le calcul des u_j. Pour calculer u_j on énumère toutes les factorisations de j de la forme $j = (\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1)$ avec $2 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_k$. Chaque telle factorisation fournit une famille d'entiers quadratiquement saturés ayant j diviseurs, à savoir la famille des entiers de la forme $d = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_i \ge 2$, et tous les p_i distincts. Les α_i ne sont pas nécessairement distincts. S'ils prennent q valeurs distinctes $(1 \le q \le k)$, soit $n_1, \dots, n_q$ le nombre des α_i prenant respectivement chacune de ces q valeurs, et posons $C(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = n_1!n_2!\dots n_q!$. Alors la somme des $\chi(d)h(d,\lambda)/d$, pour les d de la forme $d = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, est

$$\sum_{d=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}} \frac{\chi(d)}{d} h(d,\lambda) = \left(\frac{1}{C(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}\right)\mathcal{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$$

avec

$$\mathcal{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k \\ p_i \ne p_j}} \frac{h(p_1,\lambda)}{p_1^{\alpha_1}}\dots\frac{h(p_k,\lambda)}{p_k^{\alpha_k}}$$

quantité qui est calculée au moyen de la proposition (3-1):

$$\mathcal{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \sum_{P=\{\sigma_1,\dots,\sigma_\ell\}} (-1)^{k-\ell} P! \prod_{i=1}^{\ell} T\left(Card(\sigma_i), \sum_{t\in\sigma_i}\alpha_t\right) \tag{11}$$

avec

$$T(a,b) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{h(p,\lambda)^a}{p^b}. \tag{12}$$

Finalement, on a :

$$u_j = \sum_{\substack{2\le\alpha_1\le\alpha_2\le\dots\le\alpha_k \\ (\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1)=j}} \frac{1}{C(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}\mathcal{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_k).$$

On verra au §9 que ces formules permettent de calculer les u_j avec une bonne précision, malgré le grand nombre de termes impliqués et les alternances de signe.

4. Les propriétés $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$

Si f est une fonction d'une variable réelle x on notera

$$f(a^+) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad f(a^-) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

DÉFINITION 4.1. *On dit que la fonction f définie et bornée sur $[0,1]$ vérifie la propriété $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) si $f(0^+)$ et $f(0^-)$ existent, et si l'on a :*

$$\inf_{0\le x\le 1} f(x) = f(0^+) \quad \textit{et} \quad \sup_{0\le x\le 1} f(x) = f(1^-)$$

$$(\textit{resp.} \qquad \sup_{0\le x\le 1} f(x) = f(0^+) \quad \textit{et} \quad \inf_{0\le x\le 1} f(x) = f(1^-)).$$

LEMME 4.2.

- *La somme de deux fonctions vérifiant $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) vérifie $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$).*
- *Soit f_n une suite de fonctions convergeant uniformément vers f et vérifiant $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$). Alors f vérife $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$).*
- *Soit u_n le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente sur $[0,1]$ et vérifiant chacune $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$). Alors $u = \sum u_n$ vérifie $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$).*

Démonstration. Considérons le cas de la propriété $\mathcal{P}^+$.

Le premier point est évident, et le dernier point résulte immédiatement des deux premiers. Démontrons donc le deuxième point. Classiquement la convergence uniforme entraine l'existence de $f(0^+)$ et $f(1^-)$ et les égalités:

$$f(0^+) = \lim_{n\to\infty} f_n(0^+) \quad \text{et} \quad f(1^-) = \lim_{n\to\infty} f_n(1^-).$$

Il suffit donc de démontrer que pour tout x on a $f(0^+) \le f(x) \le f(1^-)$, ce qui résulte de $f_n(0^+) \le f_n(x) \le f_n(1^-)$ par passage à la limite.

LEMME 4.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[0,1]$ et $(\epsilon_k)_{0\le k\le n}$ une suite finie de points tels que $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \ldots < \epsilon_n = 1$. On suppose que*

- *f est strictement croissante (resp. décroissante) et continue sur $]0,1]$, g est strictement croissante (resp. décroissante) sur chaque $]\epsilon_k, \epsilon_{k+1}]$, $(0 \le k \le n-1)$.*
- *$f(0) \ge f(0^+)$, $g(\epsilon_k) \ge g(\epsilon_k^+)$ (resp. $f(0) \le f(0^+)$, $g(\epsilon_k) \le g(\epsilon_k^+)$) pour tout k, $0 \le k \le n-1$.*

Alors il existe un plus petit réel positif α tel que $\alpha f + g$ vérifie $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$). Il est donné par $\alpha = 0$ si g vérifie $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) et sinon par

$$\alpha = \max_{0<k<n} \left(\max \left(\frac{g(0^+) - g(\epsilon_k^+)}{f(\epsilon_k) - f(0^+)}, \frac{g(\epsilon_k) - g(1)}{f(1) - f(\epsilon_k)} \right) \right).$$

Démonstration. Supposons f et g croissantes (pour l'autre cas il suffira de considérer $-f$ et $-g$). Soit $\mu \ge 0$, posons $F = \mu f + g$ et

$$M = \max_{0 \le k \le n} F(\epsilon_k) \qquad m = \min_{0 \le k \le n-1} F(\epsilon_k^+). \tag{13}$$

Par hypothèse F est croissante sur chacun des intervalles $]\epsilon_k, \epsilon_{k+1}]$, et le maximum de F sur l'intervalle $[\epsilon_k, \epsilon_{k+1}]$ est atteint en l'une des extrémités de cet intervalle, tandis que la borne inférieure de F sur cet intervalle est atteinte en ϵ_k^+. On a donc :

$$\sup_{0 \le x \le 1} F(x) = M \quad \text{et} \quad \inf_{0 \le x \le 1} F(x) = m. \tag{14}$$

Par (14) pour que F vérifie la propriété $\mathcal{P}^+$ il faut et il suffit que $F(0^+) = m$ et $F(1) = M$. Autrement dit que l'on ait :

$$\forall k \qquad 1 \le k \le n-1 \qquad F(0^+) \le F(\epsilon_k^+) \qquad F(\epsilon_k) \le F(1)$$

c'est à dire $\mu \ge \alpha$.

5. Démonstration du théorème 2 pour λ fixé

On part de la proposition évidente qui suit:

PROPOSITION 5.1. *La fonction f_1 et les fonctions f_j vérifient:*

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \lambda & si \;\; \theta = 0 \\ \lambda^\theta & si \; \theta > 0 \end{cases} \qquad f_j(\theta) = \begin{cases} \lambda^{1+\theta} & si \;\; 0 \le \theta \le e_j \\ \lambda^\theta & si \;\; e_j < \theta \le 1 \end{cases} \tag{15}$$

$f_j = f_1$ chaque fois que j est une puissance de 2.

PROPOSITION 5.2. *On pose*

$$\gamma_j = 0 \qquad \text{pour } j = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{16}$$

et, pour j différent d'une puissance de 2

$$\gamma_j = \max\left(\frac{\lambda - \lambda^{e_j}}{\lambda^{e_j} - 1}, \frac{\lambda - \lambda^{1-e_j}}{\lambda^{1-e_j} - 1}\right). \tag{17}$$

Alors $\gamma_j f_1 + f_j$ possède la propriété $\mathcal{P}^+$ si $\lambda > 1$ et la propriété $\mathcal{P}^-$ si $\lambda < 1$.

Démonstration. Il suffit dans le lemme (4-3) de prendre $f = f_1$, $g = f_j$, $n = 2, \epsilon_1 = e_j$, en remarquant que quand j est une puissance de 2, $f_j = f_1$.

Contribution de $K_1(\theta)$

On remarque que $f_j(\theta)$ ne dépend que de la partie impaire de j. Dans la somme qui donne $K_1(\theta)$ on regroupe les termes pour lesquels j prend une même partie impaire k; on pose donc

$$c_k = \sum_{\substack{j=1 \\ \text{imp}(j)=k}}^{j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j / \log 2 \rfloor} \qquad g(\theta) = {\sum_{k=3}^{j_0}}' c_k f_k(\theta) \tag{18}$$

(où le signe $'$ derrière le signe $\sum$ indique que la sommation ne porte que sur les entiers impairs). On peut alors écrire:

$$K_1(\theta) \ = \ c_1 f_1(\theta) + g(\theta). \tag{19}$$

PROPOSITION 5.3. *On pose*

$$\alpha' = \frac{g(0) - g(e_k^+)}{\lambda^{e_k} - 1} \qquad \alpha_k'' = \frac{g(e_k) - g(1)}{\lambda - \lambda^{e_k}}\ . \tag{20}$$

$$\alpha_k'' \ = \ \max_{\substack{3 \le k \le j_0 \\ k \text{ impair}}} \left(\max(\alpha', \alpha_k'')\right) \tag{21}$$

Alors la fonction $\alpha f_1(\theta) + g(\theta)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}^+$ ou $\mathcal{P}^-$ (selon que λ est plus grand ou plus petit que 1). Et α_k'' est le plus petit réel ayant cette propriété.

Démonstration. C'est une application du lemme (4-3) appliqué au couple f_1, g, en choisissant la suite (ϵ_k) égale à la suite des éléments e_k rangés dans l'ordre croissant.

PROPOSITION 5.4. *Posons*

$$Z = \sum_{j>j_0} \gamma_j u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor}.$$

Si la majoration

$$Z < c_1 - \alpha$$

est vérifiée, alors $K(\theta)$ possède la propriété $\mathcal{P}^+$ si $\lambda > 1$, et la propriété $\mathcal{P}^-$ si $\lambda < 1$.

Démonstration. On a successivement par (19) et (18)

$$\begin{aligned} K(\theta) &= (c_1 - \alpha_k'')f_1(\theta) + \alpha_k'' f_1(\theta) + g(\theta) + \sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} f_j(\theta) \\ &= \left(c_1 - \alpha_k'' - \sum_{j>j_0} \gamma_j u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} \right) f_1(\theta) \\ &\quad + \sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} (\gamma_j f_1(\theta) + f_j(\theta)) + \alpha_k'' f_1(\theta) + g(\theta). \end{aligned}$$

La série $\sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor}$ est convergente pour $\lambda > 1$, car elle est majorée par la série $\sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\log j/\log 2}$ dont la somme est $L(\log \lambda/\log 2) - \sum_{j \le j_0} u_j \lambda^{\log j/\log 2}$; pour $\lambda < 1$ elle est convergente car majorée par $\frac{1}{\lambda} \sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\log j/\log 2}$. La série $\sum_{j \ge j_0} u_j \gamma_j \lambda^{\lfloor \frac{\log j}{\log 2} \rfloor}$ est convergente par hypothèse. Comme les f_k sont uniformément majorées pour $0 \le \theta \le 1$ par $\max(\lambda^2, 1)$, la série de fonctions de θ

$$\sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} (\gamma_j f_1(\theta) + f_j(\theta))$$

est normalement convergente, et par le lemme (4-2) sa somme possède la propriété $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$). Ainsi K s'écrit comme une somme de trois fonctions qui vérifient chacune la propriété $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$), et le lemme (4-2) achève la démonstration.

Majoration de Z

DÉFINITION 5.5. *On pose $\beta = \frac{\log \lambda}{\log 2}$ et, pour tout entier j, $\delta_j = \lambda^{-e_j} \gamma_j$.*

On a alors le lemme :

LEMME 5.6. *On a pour tout* $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} &si\ e_j < 1/2, \qquad \gamma_j = \frac{\lambda - \lambda^{e_j}}{\lambda^{e_j} - 1} \\ &si\ e_j > 1/2, \qquad \gamma_j = \frac{\lambda - \lambda^{1-e_j}}{\lambda^{1-e_j} - 1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Soit a *un entier naturel* ≥ 1, *et* $j < 2^{a+1}$. *On a, si* $\lambda \geq 2$

$$\delta_j \leq \frac{\lambda - 1}{\log \lambda}(\log 2)2^a. \tag{23}$$

Remarque. La table 3 présente les valeurs de e_j, γ_j et δ_j pour j impair ≤ 75. On observera que la majoration (23) n'est très bonne que lorsque j est voisin d'une puissance de 2.

Démonstration. (22) provient de (17) et de ce que, pour $\lambda > 1$, la fonction $x \to \frac{\lambda - x}{x-1}$ est décroissante pour $1 < x \leq \lambda$. Pour $\lambda < 1$, cette fonction est croissante pour $\lambda \leq x < 1$.

Il suffit de démontrer (23) pour $2^a \leq j < 2^{a+1}$ et, par (16), pour $2^a < j < 2^{a+1}$. Supposons d'abord $e_j < 1/2$. On pose $j = 2^a + r$, avec $1 \leq r \leq 2^a - 1$, on a alors

$$e_j = \left\{ \frac{\log j}{\log 2} \right\} = \frac{\log(1 + r2^{-a})}{\log 2} = \frac{\log(1+u)}{\log 2}$$

en posant $u = r2^{-a}$. On a $0 < u < 1$. Il vient ensuite, pour $\lambda \geq 2$

$$\delta_j = \lambda^{-e_j} \frac{\lambda - \lambda^{e_j}}{\lambda^{e_j} - 1} \leq \frac{\lambda - \lambda^{e_j}}{\lambda^{e_j} - 1} \leq \frac{\lambda - 1}{\lambda^{e_j} - 1} \tag{24}$$

et comme on a

$$\lambda^{e_j} - 1 = (1+u)^\beta - 1,$$

le théorème des accroissements finis donne, puisque $\beta \geq 1$:

$$(1+u)^\beta - 1 \geq \beta u,$$

et (43) implique

$$\delta_j \leq \frac{\lambda - 1}{\beta u} = \frac{\lambda - 1}{\log \lambda} \log 2 \frac{2^a}{r} \leq \frac{\lambda - 1}{\log \lambda}(\log 2)2^a. \tag{25}$$

Supposons maintenant $e_j > 1/2$, et écrivons $j = 2^{a+1} - s$ avec $1 \leq s < 2^a$. On a

$$e_j = 1 + \frac{\log(1 - s2^{-a-1})}{\log 2} = 1 + \frac{\log(1-v)}{\log 2}$$

avec $v = s2^{-a-1}$. On a $0 < v < 1/2$ et

$$1 - e_j = -\frac{\log(1-v)}{\log 2}.$$

Par (22), on a

$$\delta_j = \lambda^{-e_j} \frac{\lambda - \lambda^{1-e_j}}{\lambda^{1-e_j} - 1} = \lambda^{-1} \frac{\lambda - \lambda^{1-e_j}}{1 - \lambda^{e_j - 1}} \leq \frac{\lambda^{-1}(\lambda - 1)}{1 - \lambda^{e_j-1}}. \tag{26}$$

Mais, $1 - \lambda^{e_j - 1} = 1 - (1-v)^\beta$ et la concavité de la fonction

$$t \to 1 - (1-t)^\beta - (2\beta 2^{-\beta})t$$

lorsque $\beta \geq 1$ montre qu'elle est positive pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. On déduit alors de (26)

$$\delta_j \leq \frac{\lambda^{-1}(\lambda-1)}{2\beta 2^{-\beta} v} = \frac{\lambda - 1}{\log \lambda} \log 2 \frac{2^a}{s} \leq \frac{\lambda - 1}{\log \lambda} (\log 2) 2^a$$

ce qui avec (25) achève la preuve de (22).

PROPOSITION 5.7. *Soit $\lambda \geq 2$ et Z défini dans la proposition (5-4) par:*

$$Z = \sum_{j > j_0} \gamma_j u_j \lambda^{\lfloor \log j / \log 2 \rfloor}.$$

En posant

$$R_j(\beta) = \sum_{k > j} u_k k^\beta = \sum_{\substack{d \\ \tau(d) > j}} \frac{\chi(d)}{d} h(d, \lambda) \tau(d)^\beta \tag{27}$$

on a, pour tout réel s plus grand que $\beta + 1$, lorsque $j_0 = 2^{a_0}$, la majoration

$$Z \leq \frac{(\lambda - 1) R_{j_0}(s)}{\beta 2^{(s-\beta-1)(a_0-1)} (2^{s-\beta-1} - 1)}. \tag{28}$$

Démonstration. Par la définition (5-3) Z s'écrit

$$Z = \sum_{a \geq a_0} \sum_{j = 2^a + 1}^{2^{a+1}} \delta_j u_j j^\beta,$$

et, par (23), on a

$$Z \leq \sum_{a \geq a_0} \frac{\lambda-1}{\beta} 2^a \sum_{j>2^a} u_j j^\beta \tag{29}$$

$$\leq \sum_{a \geq a_0} \frac{\lambda-1}{\beta} 2^a R_{2^a}(\beta) \tag{30}$$

Nous majorons $R_j(\beta)$ par la méthode de Rankin: soit $s > \beta$, nous avons pour tout k tel que $k > j$

$$k^\beta = k^s \frac{1}{k^{s-\beta}} \leq \frac{k^s}{j^{s-\beta}}$$

et cela donne $R_j(\beta) \leq j^{\beta-s} R_j(s)$. En particulier, pour tout $j \geq j_0$, on aura

$$R_j(\beta) \ \leq j^{\beta-s} R_j(s) \leq j^{\beta-s} R_{j_0}(s).$$

La majoration (30) entraine alors $Z \leq \frac{\lambda-1}{\beta} \sum_{a \geq a_0} 2^a 2^{a(\beta-s)} R_{j_0}(s)$, ce qui entraine (28).

6. Résultats numériques prouvant le théorème 2 pour $\lambda = 2$

Calcul de α

Explicitons un peu plus précisément la détermination de α. Il résulte de la formule (15) que si l'on pose pour k impair :

$$A_k = \sum_{\substack{3 \leq j \leq j_0 \\ e_j > e_k}}{}' c_j \quad \text{et} \quad B_k = \sum_{\substack{3 \leq j \leq j_0 \\ e_j < e_k}}{}' c_j, \tag{31}$$

on a :

$$\begin{aligned} g(0) = \ & g(1) = \ A_1 \lambda \ = (A_k + c_k + B_k)\lambda \\ g(e_k) = \ & (A_k + c_k)\, \lambda^{1+e_k} + B_k \lambda^{e_k} \\ g(e_k^+) = \ & A_k \lambda^{1+e_k} + (B_k + c_k)\, \lambda^{e_k}. \end{aligned}$$

La formule (20) donne alors :

$$\begin{aligned} \alpha_k^{'} &= -A_k \lambda + (B_k + c_k) \left(\frac{\lambda - \lambda^{e_k}}{\lambda^{e_k} - 1} \right) \\ \alpha_k^{''} &= (A_k + c_k) \left(\frac{\lambda - \lambda^{1-e_k}}{\lambda^{1-e_k} - 1} \right) - B_k. \end{aligned} \tag{32}$$

On choisit $a_0 = 11$, c'est à dire $j_0 = 2048$. On fixe $\lambda = 2$, et la définition (5-5) donne alors $\beta = 1$.

On calcule les u_j pour $j \leq j_0$, par la méthode exposée au §3. On calcule ensuite successivement les coefficients c_k par (18), puis A_k et B_k par (31), α'_k et α''_k par (32) et α par (21). On obtient lorsque $\lambda = 2$,

$$c_1 = 1.45243\ldots \qquad \alpha = 1.24486\ldots \qquad c_1 - \alpha > 0.207$$

La table 5 donne les c_k qui dépassent 10^{-5}, pour $1 \leq k \leq 100$.

Majoration de Z

On choisit $s = 3 = \beta + 2$; la majoration de Z dans (28) se simplifie et donne $Z \leq R_{j_0}(3)/2^{10}$.

Il faut calculer $R_{j_0}(3)$. On écrit pour cela :

$$R_{j_0}(3) = \sum_{j>j_0} u_j j^3 = L(3) - \sum_{j\leq j_0} u_j j^3.$$

La somme se déduit des valeurs des u_j. Elle est égale à $1258.7351\ldots$.

Le calcul de $L(3)$ est expliqué au §9. On obtient $L(3) = 1317.56758\ldots$ pour $\lambda = 2$. d'où $Z \leq \frac{59.5}{1024} = 0.058\ldots$ Cette valeur est inférieure à $0.207 < c_1 - \alpha$ et, par la proposition (5-4) cela achève la démonstration du théorème 2 dans le cas $\lambda = 2$.

7. Propriétés de monotonie

LEMME 7.1. *Les nombres c_k, A_k, B_k, introduits en (18) et (31), sont des fonctions croissantes de λ, pour $\lambda \geq 0$, ainsi que les fonctions $u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2\rfloor}$ où u_j est défini par (5).*

Démonstration. Par définition de c_k, (18), de A_k et B_k, (31), il suffit de montrer que pour tout entier j la fonction $\lambda \mapsto u_j\lambda^{\lfloor \frac{\log j}{\log 2}\rfloor}$, est une fonction croissante de λ. Par définition de u_j, (5) il suffit de montrer que, pour tout entier d, la fonction $h(d,\lambda)\lambda^{\lfloor \frac{\log(\tau(d))}{\log 2}\rfloor}$ est une fonction croissante de λ. Or cette fonction est égale à:

$$\lambda^{\lfloor \frac{\log(\tau(d))}{\log 2}\rfloor - \omega(d)} \prod_{p\mid d} \frac{\lambda}{1+\lambda/p}$$

qui est un produit de fonctions croissantes de λ.

LEMME 7.2. *Soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon < 1$. La fonction $y(\lambda)$: $\lambda \to \frac{\lambda-\lambda^\epsilon}{\lambda^\epsilon-1}$, à priori non définie pour $\lambda = 1$, se prolonge par continuité en une fonction continue et croissante de λ sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

Démonstration. On a $y(\lambda) = -1 + \frac{\lambda-1}{\lambda^\epsilon-1}$. La fonction $\lambda \to \lambda^\epsilon$ est concave pour $\lambda \geq 0$, et $\frac{\lambda^\epsilon-1}{\lambda-1}$ est la pente de la droite joignant les points $(\lambda, \lambda^\epsilon)$ et $(1,1)$.

LEMME 7.3. *Pour tout entier j le nombre γ_j introduit en (17), à priori non défini pour $\lambda = 1$, se prolonge en une fonction continue et croissante de λ sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

Démonstration. La démonstration résulte de (22), et du lemme (7-2).

8. Fin de la démonstration du théorème 2

Par la proposition (5-4) le théorème 2 est vrai pour une valeur de λ si, pour une valeur de j_0, on a :

$$\sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} \gamma_j < c_1(\lambda) - \alpha(\lambda).$$

Le premier membre de cette inégalité est une fonction croissante de λ par les lemmes (7-1) et (7-3). Si on démontrait que $c_1 - \alpha$ est une fonction décroissante de λ, la validité de l'inégalité ci dessus pour $\lambda = \lambda_0$ entrainerait donc sa validité pour toute valeur de λ inférieure à λ_0.

Nous ne savons pas démontrer que $c_1 - \alpha$ est une fonction décroissante de λ. Cependant, sur un intervalle donné $[\lambda_1, \lambda_2]$ nous pouvons minorer $c_1(\lambda) - \alpha(\lambda)$ en utilisant le

LEMME 8.1. *Définissons pour $\lambda_1 < \lambda_2$:*

$$\alpha_k'(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 A_k(\lambda_1) + (B_k(\lambda_2) + c_k(\lambda_2)) \frac{\lambda_2 - \lambda_2^{e_k}}{\lambda_2^{e^k} - 1} \tag{33}$$

$$\alpha_k''(\lambda_1, \lambda_2) = (A_k(\lambda_2) + c_k(\lambda_2)) \frac{\lambda_2 - \lambda_2^{1-e_k}}{\lambda_2^{1-e^k} - 1} - B_k(\lambda_1). \tag{34}$$

Alors, pour tout λ de l'intervalle λ_1, λ_2, on a :

$$\alpha = \alpha(\lambda) \leq \max_{\substack{3 \leq k \leq j_0 \\ k \text{ impair}}} \left(\max(\alpha'(\lambda_1, \lambda_2), \alpha''(\lambda_1, \lambda_2)) \right). \tag{35}$$

Démonstration. Le lemme découle des lemmes (7-1) et (7-2), et de (32) et (21).

Dans le §6, pour $\lambda = 2$, et $j_0 = 2048$ nous avons obtenu la majoration

$$Z = \sum_{j>j_0} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} \gamma_j \leq 0.058.$$

Par les lemmes (7-1) et (7-2), la même majoration vaut pour $\lambda \leq 2$. Compte tenu de la proposition (5-4) il suffit pour démontrer le théorème 2, d'exhiber une subdivision $\lambda_0 = 0, \lambda_2, \ldots \lambda_n = 2$ de l'intervalle $[0,2]$, telle que, sur chaque intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $c_1 - \alpha$ soit minoré par 0.058. Le tableau ci dessous présente une telle subdivision. Par le lemme (7-1), on minore $c_1(\lambda)$ sur l'intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ par $c_1(\lambda_i)$. Pour majorer α sur l'intervalle $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, on calcule $A_k(\lambda_i)$,$B_k(\lambda_i)$, $c_k(\lambda_i)$,$A_k(\lambda_{i+1})$, $B_k(\lambda_{i+1})$, $c_k(\lambda_{i+1})$ par la méthode exposée au §6. on en déduit $\alpha'_k(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ et $\alpha''_k(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ par (33) et (34), et la majoration de α est fournie par (35).

$[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$	minorant de c_1	majorant de α	minorant de $c_1 - \alpha$
$[0.00, 1.60]$	1.000	$\alpha'_9 = 0.622$	0.378
$[1.60, 1.85]$	1.304	$\alpha''_3 = 0.941$	0.363
$[1.85, 1.96]$	1.393	$\alpha''_3 = 1.191$	0.202
$[1.96, 2.00]$	1.436	$\alpha''_3 = 1.272$	0.164

9. Les calculs numériques

Tous les produits eulériens sont calculés en utilisant la proposition (2-2). On a choisi une fois pour toutes $p_0 = 229$ (le 50^{eme} nombre premier), et $n_0 = 12$. Les quantités $P_{p_0}(n)$ sont alors très petites. Comme elles sont calculées en soustrayant de $P(n)$, calculé par (7), la somme $\sum_{p \geq p_0} p^{-n}$, il faut effectuer ce calcul avec une grande précision. Il a été effectué à l'aide de MAPLE, avec 80 chiffres significatifs. La table 1 donne les résultats. Signalons que les tables de Davis (cf.[4], p. 249) donnent les sommes $\sum p^{-n}$, pour $n \leq 80$, avec une précision de 10^{-20}.

Calculs de $L(s)$

Comme les fonctions χ, h et τ sont multiplicatives, $L(s)$ est égal au produit eulérien convergent pour tout s réel

$$L(s)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\chi(d)}{d}h(d,\lambda)\tau(d)^s=\prod_{p\epsilon P}\Phi_s(\frac{1}{p}) \tag{36}$$

avec

$$\Phi_s(z)=1+\frac{1}{1+\lambda z}\sum_{r\geq 2}(r+1)^s z^r. \tag{37}$$

LEMME 9.1. *Pour $0\leq\lambda\leq 2$ et $0\leq s\leq 3$, la fonction $\log\Phi_s(z)$ est holomorphe dans le disque $\mid z\mid\leq 0.1$ et majorée en module par 3 dans ce disque.*

Démonstration. Posons $u=0.1$. On a pour $|z|\leq u$

$$\begin{aligned}|\sum_{r\geq 2}(r+1)^s z^r| &\leq \sum_{r\geq 2}(r+1)(r+2)(r+3)u^r\\ &= \frac{d^3}{du^3}(\frac{u^5}{1-u})\\ &= \frac{60u^2}{1-u}+\frac{60u^3}{(1-u)^2}+\frac{30u^4}{(1-u)^3}+\frac{6u^5}{(1-u)^4}\\ &\leq \frac{60uv}{1-v}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

avec $v=\frac{u}{1-u}=\frac{1}{9}$. On en déduit :

$$\mid\Phi_s(z)-1\mid\leq\frac{1}{\mid 1+\lambda z\mid}\frac{3}{4}\leq\frac{3}{0.8\times 4}=\frac{15}{16}<1;$$

$\log\Phi_s(z)$ est donc holomorphe, et enfin

$$\mid\log\Phi_s(z)\mid\leq-\log(1-\frac{15}{16})=\log 16<3.$$

Pour calculer $L(s)$, on calcule $\log L(s)=\sum_{p\in P}\log\Phi_s(1/p)$.

Pour $s=3$, on applique la proposition (2-2) avec $r=0.1, A=3, n_0=12, p_0=229$. Les coefficients a_n du développement en série de $\log\Phi_s(z)$ sont déterminés par Maple. On prend pour $\log(L(3))$ la valeur approchée:

$$\sum_{p\leq p_0}\log(\Phi_3(1/p))+\sum_{2\leq n\leq n_0}a_n P_{p_0}(n).$$

L'erreur donnée par (9) est inférieure a $5(22.9)^{-12} \leq 10^{-15}$. On obtient ainsi $L(3) = 1317.56758\ldots$

Calcul de $H(\lambda)$ et de la constante C'

Rappelons que C' et $H(\lambda)$ sont définis par:

$$C' = \frac{H(1/\log 2)}{1-\log 2}\sqrt{\frac{\log 2}{2\pi}} \qquad H(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{p}\right).$$

Ce calcul est effectué pour $\lambda = \frac{1}{\log 2} < 1.5$. On calcule

$$\log(\Gamma(\lambda+1)H(\lambda)) = \sum_p f(\frac{1}{p}) \quad \text{avec} \quad f(z) = \lambda\log(1-z) + \log(1+\lambda z).$$

Sur le cercle de rayon $r = 1/2, f(z)$ est majoré en module par $1.5\log 2 + |\log(0.25)| = 3.5\log 2 \leq 3$.

Par la formule (9) on a alors à 10^{-24} près :

$$H(1/log2) = 0.349514372853995019313023\ldots$$
$$C' = 0.378318620987879650907940\ldots .$$

Le calcul des $T(a,b)$

Ces sommes définies par (12) servent au calcul des u_j (cf. §3). Nous utiliserons ces sommes pour $1 \leq a \leq 8$ et $2 \leq b \leq 50$. Lorsque $b \geq 9$, on calcule la somme directement, en utilisant la proposition (2.1) pour majorer le reste, car $h(p,\lambda) \leq 1$.

Pour $b \leq 9$, on utilise la majoration (9), avec $f(z) = z^b/(1+\lambda z)^a$, $r = 0.1$. Comme $\lambda \leq 2$ et $a \leq 8$, A est majoré par $r^b(8/10)^{-8} \leq 6r^b$. Le membre de droite dans la formule (9) est donc majoré par $(22)^{-12}10^{-b+1}$. $T(a,b)$ étant minoré par $h(2,\lambda)^a 2^{-b}$, donc par 2^{-b-8}, l'erreur relative commise dans le calcul de $T(a,b)$ est donc majorée par $2^{8+b}(22)^{-12}10^{-b+1} < 10^{-14}$ pour $b \geq 2$. Lorsque $\lambda = 2$, les résultats sont dans la table 2.

Le calcul des u_j

La somme (11) donnant $\mathcal{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ est une somme de termes positifs et négatifs. Il est donc important de s'assurer que la précision obtenue reste bonne.

Remarquons d'abord que lorsque $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ est grand $\mathcal{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ est très petit. Précisons ceci : par (12) et (7), on sait que $T(a,b) \leq 1/2^{b-1}$. Dans la formule (11) ℓ est majoré par k et $P!$ est majoré par $(k-1)!$.

Appelons B_k le k-ième nombre de Bell, c'est à dire le nombre de partitions ensemblistes de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Les premiers B_k sont(cf. [2] vol. 2):

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15$$
$$B_5 = 52,\ B_6 = 203,\ B_7 = 877,\ B_8 = 4140.$$

On a alors la majoration $\mathcal{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \leq \frac{B_k(k-1)!}{2^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k-k}}$.

Lorsque $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k > 50$ on ne prendra pas la peine d'évaluer la somme (11) et on assimillera $\mathcal{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ à 0, avec une erreur absolue inférieure à $\overline{\mathcal{H}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = B_k(k-1)!2^{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$.

Cela accélère les calculs , et cela permet d'utiliser une table des valeurs de $T(a,b)$ limitée à $2 \leq b \leq 50$.

Chaque produit dans la formule (11) étant composé de ℓ facteurs, et l'erreur relative sur chaque facteur $T(a,b)$ étant majorée par 10^{-14}, l'erreur relative sur le produit est donc majorée par $\ell 10^{-14}$. On en déduit un majorant de l'erreur absolue sur chaque terme de la somme, puis un majorant de l'erreur absolue sur la somme. Ce calcul est fait en même temps que le calcul de u_j. La précision obtenue est tout à fait suffisante. La table 4 donne, pour $\lambda = 2$, les valeurs des u_j les plus significatives.

10. Calcul numérique de $K(0^+)$ et $K(0)$

Pour le calcul de $K(0)$ et $K(0^+)$ on part des formules (2) et (3) qui donnent

$$\frac{1}{\lambda}K(0) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \lambda^{\lfloor \log j/\log 2 \rfloor} \tag{38}$$

$$\frac{1}{\lambda}K(0^+) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \lambda^{\lceil \log j/\log 2 \rceil - 1} \tag{39}$$

$$L(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \lambda^{\log j/\log 2}. \tag{40}$$

Le reste d'ordre n des deux premières séries est majoré par le reste d'ordre n de la troisième. On calcule donc les sommes partielles de ces trois séries jusquà une valeur $jmax = 20000$. On calcule $L(\beta)$ (cf. §9); on en déduit le reste de la troisième série, qui fournit un majorant de l'erreur commise en attribuant à $K(0)$ et $K(0^+)$ les sommes partielles d'ordre 20000 des séries (38) et (39). Lorsque $\lambda = 1/\log 2$ on obtient:

$$K(0) = 3.034\,814\,333\,143\ldots \quad K(0^+) = 2.480\,128\,201\,708\ldots$$

ce qui donne les valeurs annoncées dans le corollaire 3 de l'introduction :

$$l_1 = C'K(0^+) = 0.938\,278\,681\,143\ldots \quad l_2 = C'K(0) = 1.148\,126\,773\,469\ldots$$

avec une erreur inférieure à 10^{-12}. Les séries (38) et (39) donnent une meilleure précision pour le calcul numérique de $K(0)$ et $K(0^+)$ que les séries (3). En effet, définissons

$$\rho(x,\lambda) = \sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{n} h(n,\lambda)\tau(n)^\beta$$

avec $\beta = (\log\lambda)/\log 2$. H. Delange nous a communiqué une démonstration de

$$\rho(x,\lambda) \sim C\frac{\log(x)^{3^\beta-1}}{\sqrt{x}} \tag{41}$$

pour λ fixé et $x \to \infty$, et la constante C vaut

$$C = \frac{1}{2^{3^\beta-1}\Gamma(3^\beta)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{1+\lambda/p}\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(r+1)^\beta}{p^{r/2}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{3^\beta}. \tag{42}$$

La relation (41) donne une assez bonne estimation de $\rho(x,\lambda)$. En effet, si l'on définit

$$C(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\sqrt{(}x)(\log x)^{1-3^\beta}$$

on obtient pour $\lambda = 1/\log 2$ les valeurs

x	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}
$C(x,\lambda)$	0.8738...	0.8712...	0.8699...	0.8691...	0.8687...

Et la valeur de C donnée par (42) est $C = 0.86\ldots$

Nous avons calculé

$$R_{20000}(\beta) = \sum_{j>20000} u_j \lambda^{\log j/\log 2} = 6.10^{-13}.$$

D'après la formule (42), pour obtenir la même précision par le calcul direct des sommes des séries (3), en s'arrétant à $d = x$, il faudrait avoir $\rho(x, 1/\log 2) = 6.10^{-13}$, donc x de l'ordre de 5.10^{22}. Cela nécessiterait l'énumération de tous les entiers quadratiquement saturés $< x$, dont le nombre est de l'ordre de 2.10^{11}.

Le cas $\lambda > 2$.

Lorsque λ prend de plus grandes valeurs il n'est plus vrai que le minimum et le maximum de $K(\theta)$ sont atteints en 0 et 0^+. Soit e_{kmax} le point où $K_1(\theta)$ atteint son maximum; les calculs montrent que, selon les valeurs de λ, les principaux concurrents pour *kmax* sont 1,3,9; de même pour *kmin* tel que $K(\theta)$ atteint son infimum en e^+_{kmin}. La méthode exposée pour $\lambda \leq 2$ permet dévaluer les bornes supérieures et inférieures de $K(\theta)$ pour des valeurs de λ plus grandes que 2, mais elle manque de précision au voisinage des valeurs de λ où *kmax* ou *kmin* change. Il ne nous a pas paru possible de faire une conjecture lorsque $\lambda \to \infty$.

TABLE 1

TABLE DES VALEURS DE P(229,n)

$$P[n] := \sum_{p \ premier > 229} 1/p^n.$$

$$P[2] := 0.00066677372487911726183097127268245705011904503909307187852593610519\,60$$

$$P[3] := 0.1541771890310165884686800743338585419799813174024242327058905\,5 * 10^{-5}$$

$$P[4] := 0.457742515718517393709546646104927606728348714194848868726926\,17 * 10^{-8}$$

$$P[5] := 0.15137134626924806947448864502770988988919108225753882406867\,60 * 10^{-10}$$

$$P[6] := 0.53170489206284446121510307407507413340011040637659635126751\,26 * 10^{-13}$$

$$P[7] := 0.1940876173060495846885272794912664930732676458526645597078\,10 * 10^{-15}$$

$$P[8] := 0.727541410600092736355826173608085637045885147700519277264\,45 * 10^{-18}$$

$$P[9] := 0.278061235183990148718231259658144512372730829521683102601\,60 * 10^{-20}$$

$$P[10] := 0.10785480851702801961121534335270581267862113294792865521\,63 * 10^{-22}$$

$$P[11] := 0.42324470222636196883333794637528014812544622387835553512\,76 * 10^{-25}$$

$$P[12] := 0.16766068173436639316309689324361405004048784351849598405\,93 * 10^{-27}$$

$$P[13] := 0.6693469689968512644715409071258283155178555610324409968 * 10^{-30}$$

$$P[14] := 0.268978688387259674003624571730427975781527265284167928 * 10^{-32}$$

$$P[15] := 0.10869694049280881399441404540056834093882314566781501 * 10^{-34}$$

$$P[16] := 0.44138924294860398966725828358247978747978288493926\,4 * 10^{-37}$$

$$P[17] := 0.17999725887999433727171072248267227185144113640\,66 * 10^{-39}$$

$$P[18] := 0.73676905437756787731955468149357634657131693389 * 10^{-42}$$

$$P[19] := 0.30257682420783218285316788784165395905063048 * 10^{-44}$$

$$P[20] := 0.12463045552969472938750998851199412931948\,96 * 10^{-46}$$

TABLE 2

Tables des T(a,b) pour $\lambda = 2$ cf. (12).

b	$a=1$	$a=2$	$a=3$
2	2.6367206176115^{-01}	1.6003984933015^{-01}	1.0178040567656^{-01}
3	9.4287679139956^{-02}	5.1816106215503^{-02}	2.9129721826791^{-02}
4	4.0237480079744^{-02}	2.1235786462226^{-02}	1.1343192194356^{-02}
5	1.8377829842252^{-02}	9.5008468087586^{-03}	4.9462971339351^{-03}
6	8.6885938208363^{-03}	4.4384915167465^{-03}	2.2772748374117^{-03}
7	4.1907465149001^{-03}	2.1250511520449^{-03}	1.0806083396674^{-03}
8	2.0465431706168^{-03}	1.0328476814276^{-03}	5.2222140618878^{-04}
9	1.0074310979505^{-03}	5.0684774459459^{-04}	2.5531313761940^{-04}
10	4.9851823850596^{-04}	2.5029167667798^{-04}	1.2576730348759^{-04}

b	$a=4$	$a=5$	$a=6$
2	6.8116399904678^{-02}	4.8025014112813^{-02}	3.5585138925374^{-02}
3	1.6832002885944^{-02}	1.0045692895932^{-02}	6.2199375937196^{-03}
4	6.1488594704237^{-03}	3.3931549950056^{-03}	1.9128776511064^{-03}
5	2.5971663619662^{-03}	1.3778522377091^{-03}	7.4013867194961^{-04}
6	1.1745653859845^{-03}	6.0965706212858^{-04}	3.1885678287972^{-04}
7	5.5135472571364^{-04}	2.8245416192794^{-04}	1.4540013962443^{-04}
8	2.6462680697687^{-04}	1.3445028189285^{-04}	6.8527011151754^{-05}
9	1.2879729960596^{-04}	6.5088262542009^{-05}	3.2961635370547^{-05}
10	6.3257919006722^{-05}	3.1854518531973^{-05}	1.6063313585731^{-05}

b	$a=7$	$a=8$	$a=9$
2	2.7568343064933^{-02}	2.2182943493023^{-02}	1.8413840519850^{-02}
3	4.0083979302203^{-03}	2.6926997859552^{-03}	1.8845514865866^{-03}
4	1.1057698317496^{-03}	6.5784907213255^{-04}	4.0407414968431^{-04}
5	4.0355390967837^{-04}	2.2396037980855^{-04}	1.2688746122412^{-04}
6	1.6829238113562^{-04}	8.9796764934912^{-05}	4.8536459292212^{-05}
7	7.5282200872053^{-05}	3.9247808100353^{-05}	2.0630152821350^{-05}
8	3.5058969376188^{-05}	1.8017196385849^{-05}	9.3088276395010^{-06}
9	1.6734020887783^{-05}	8.5208864951696^{-06}	4.3541843731739^{-06}
10	8.1138072413821^{-06}	4.1065671963066^{-06}	2.0833510609978^{-06}

TABLE 3

Pour $\lambda = 2.0$, les $\epsilon_k, \delta_k, \gamma_k$
cf. (5), (22) et définition (5.5).

k	e_k	δ_k	γ_k	k	e_k	δ_k	γ_k
1	0.00000	0.00000	0.00000	39	0.28540	2.93040	3.57143
3	0.58496	1.33333	2.00000	41	0.35755	1.99458	2.55556
5	0.32193	2.40000	3.00000	43	0.42626	1.42072	1.90909
7	0.80735	3.42857	6.00000	45	0.49185	1.03932	1.46154
9	0.16993	6.22222	7.00000	47	0.55459	1.20150	1.76471
11	0.45943	1.21212	1.66667	49	0.61471	1.48027	2.26667
13	0.70044	2.05128	3.33333	51	0.67243	1.83409	2.92308
15	0.90689	7.46667	14.00000	53	0.72792	2.30532	3.81818
17	0.08746	14.11765	15.00000	55	0.78136	2.97374	5.11111
19	0.24793	3.64912	4.33333	57	0.83289	4.01003	7.14286
21	0.39232	1.67619	2.20000	59	0.88264	5.85763	10.80000
23	0.52356	1.08213	1.55556	61	0.93074	10.14208	19.33333
25	0.64386	1.64571	2.57143	63	0.97728	31.49206	62.00000
27	0.75489	2.60741	4.40000	65	0.02237	62.03077	63.00000
29	0.85798	4.78161	8.66667	67	0.06609	19.42289	20.33333
31	0.95420	15.48387	30.00000	69	0.10852	10.94493	11.80000
33	0.04439	30.06061	31.00000	71	0.14975	7.34004	8.14286
35	0.12928	8.83810	9.66667	73	0.18982	5.35769	6.11111
37	0.20945	4.67027	5.40000	75	0.22882	4.11152	4.81818

TABLE 4

Pour $\lambda = 2$ et $1 <= j <= 2048$, les u_j plus grands que 10^{-5}.

j	u_j	j	u_j
1	$1.0000000e+00$	3	$2.6367206e-01$
4	$9.4287679e-02$	5	$4.0237480e-02$
6	$1.8377830e-02$	7	$8.6885938e-03$
8	$4.1907465e-03$	9	$2.6190128e-02$
10	$1.0074311e-03$	11	$4.9851824e-04$
12	$1.5607723e-02$	13	$1.2320230e-04$
14	$6.1412085e-05$	15	$6.2016510e-03$
16	$2.2411381e-03$	18	$2.7244885e-03$
20	$1.6698016e-03$	21	$1.2585688e-03$
24	$1.2981499e-03$	25	$2.9313337e-04$
27	$1.3039920e-03$	28	$3.1238333e-04$
30	$3.7414890e-04$	32	$1.4484432e-04$
33	$6.9730755e-05$	35	$9.9315473e-05$
36	$9.9904635e-04$	39	$1.7150866e-05$
40	$7.7785446e-05$	42	$4.4102369e-05$
44	$1.6260324e-05$	45	$3.4828193e-04$
48	$2.3873219e-04$	54	$1.4610034e-04$
60	$1.5646726e-04$	63	$6.5721628e-05$
64	$1.7164539e-05$	72	$9.2700541e-05$
75	$2.4739342e-05$	80	$1.5530942e-05$
81	$3.7189292e-05$	84	$2.7386702e-05$
90	$2.6050366e-05$	96	$1.8348116e-05$
108	$3.3455648e-05$	144	$1.0388506e-05$

TABLE 5

Pour $\lambda = 2$.

Les c_k vérifiant $1 <= k <= 100$ et $0.00001 < c_k$

k	c_k
1	1.452428
3	0.755490
5	0.199329
7	0.040660
9	0.292561
11	0.004541
13	0.001119
15	0.061364
17	0.000139
19	0.000035
21	0.023471
25	0.005316
27	0.028123
33	0.002520
35	0.003461
39	0.000618
45	0.013666
49	0.000234
51	0.000038
55	0.000161
63	0.002436
65	0.000077
75	0.001805
77	0.000034
81	0.003085
99	0.000252

Références

[1] M. Balazard, J.-L. Nicolas, C. Pomerance, G. Tenenbaum, *Grandes déviations pour certaines fonctions arithmétiques*, J. Number Theory **40** (1992), 146–164.

[2] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, Tomes 1 et 2. Presses universitaires de France, 1970.

[3] H. H. Crapo, *Permanent by Möbius inversion*, Journal of Combinatorial Theory **4** (1968), 198–200.

[4] H. T. Davis, *Table of the higher mathematical functions*, The principia Press, Bloomington, Indiana, 1935, vol. 2.

[5] M. Deléglise, *Applications des ordinateurs à la théorie des nombres*, Thèse Université de Lyon 1, 1991.

[6] P.D.T.A. Elliot, Probabilistic number theory, vol I and II, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 239–240, Springer-Verlag, 1979.

[7] P. Flageolet, I. Vardi, *Numerical evaluation of Euler products*, Prepublication.

[8] W. L. Glaisher, *On the sums of the inverse powers of the prime numbers*, Quartely Journal of Math **25** (1891), 347–362.

[9] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford at the Clarendon Press 1962.

[10] K.K. Norton, *On the number of restricted prime factors of an integer*, Illinois J. Math **20** (1976), 681–705.

[11] H. Riesel, *Prime numbers and computer methods for factorization*, Birkhaüser, 1985.

M. Deléglise et J.-L. Nicolas
Mathématiques, Bat. 101
Université Claude Bernard, Lyon 1
F-69622 Villeurbanne Cedex