Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Cornelius Greither

# Sur les normes universelles dans les $Z_p$-extensions

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 6, n° 2 (1994), p. 205-220

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1994__6_2_205_0>

*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **6** *(1994), 205–220*

# Sur les normes universelles dans les $\mathbf{Z}_p$-extensions

par Cornelius GREITHER

## Introduction

L'origine de ce travail était l'observation suivante : d'une part, la structure galoisienne du groupe des unités (ou des $p$-unités) dans le $n$-ième étage d'une tour cyclotomique $F_\infty/F$ n'est connue qu'à un groupe fini près. D'autre part, les groupes des unités cyclotomiques par exemple sont mieux connus du point de vue de la structure galoisienne, et on remarque que ces unités "spéciales" sont souvent des normes universelles: elles proviennent de tous les étages supérieurs de la tour par la norme. Cela nous a amené à étudier les normes universelles dans un cadre plus général, ce qui nous permettra un grand choix d'applications dans la suite de l'article. Pour tout foncteur $A$ en $\mathbf{Z}_p$-modules, défini sur la catégorie des corps de nombres, et muni de morphismes normiques (cela sera précisé au §1), et pour toute $\mathbf{Z}_p$-extension $F_\infty/F$ d'un corps de nombres $F$, nous définissons le foncteur des normes universelles $\nu A$ associé au foncteur $A$ en posant :

$$(\nu A)(F_n) \;=\; \bigcap_{m\geq n} \mathrm{Im}(N_{F_m/F_n}) \subset A(F_n).$$

*Remarque sur la terminologie :* Dans la théorie du corps de classes, les "norme universelles" sont les éléments qui sont normes dans *toute* extension finie. La définition des normes universelles que nous venons de donner est évidemment différente: elle dépend du choix d'un foncteur $A$, et aussi de l'extension $F_\infty/F$. Cela dit, aucune confusion terminologique ne résultera de notre emploi du terme.

Bien sûr, l'exemple canonique sera toujours $A(F) =$ $p$-complétion du groupe des ($p$-)unités de $F$. Nous exhibons quelques autres axiomes tels que tout foncteur $A$ soumis à ces axiomes satisfasse à la conclusion: pour tout $n$, le groupe des normes universelles modulo torsion, soit $\nu(A/A_{\mathrm{tor}})(F_n)$, est libre sur l'anneau de groupe $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$, avec un rang qui est calculable. Bien que la preuve ait besoin des $\Lambda$-modules dans le style d'Iwasawa, elle n'est pas trop compliquée. Les axiomes dont nous venons de parler sont

Manuscrit reçu le 10 Juin 1994.

assez évidents, sauf peut-être le quatrième, qui est de nature cohomologique (il impose des conditions sur certains groupes $\mathrm{H}^1$).

Dans la 2ème section, on trouve maintes applications. Pour $A$ = $p$-complété du groupe des $p$-unités, les axiomes seront satisfaits, et on aura démontré un résultat qui remonte à KUZ'MIN (1972) pour la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique. Une légère modification est valable pour les unités à la place des $p$-unités. Ceci généralise un résultat de DE SHALIT (1989). A priori, il n'est même pas clair si le groupe des normes universelles dans, disons, $E'(F) \otimes \mathbf{Z}_p$ est non trivial, si l'on ne dispose pas d'un système d'unités spéciales, voire cyclotomiques ou elliptiques. Finalement, nous obtiendrons des résultats analogues pour le $p$-complété du foncteur $\mathrm{K}_3$, à l'aide de nombre de résultats profonds de LEVINE, MERKUR'EV - SUSLIN, BOREL et KAHN.

A la fin du présent article, on trouvera quelques compléments: une version algébrique de la formule analytique des nombres de classes dans quelques cas particuliers (on rédémontre un résultat de KIM, BAE et LEE); et un lien avec la conjecture $p$-adique de Gross, ce qui permet, à titre conjectural, de déterminer les groupes de normes universelles de façon encore plus précise.

Cet article a été achevé pendant un séjour à l'université de Bordeaux. Je tiens à remercier cet établissement et en particulier Ph. Cassou-Noguès. Je suis aussi très reconnaissant à Th. Nguyen Quang Do pour une lettre sur le sujet de cet article, dont j'ai tiré grand profit. Enfin, je veux remercier A. Jehanne pour sa lecture critique de ce texte.

## 1. Résultats généraux

On considère un foncteur $A$ de la catégorie des corps de nombres dans la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules de génération finie, $p$ étant un nombre premier fixé. Pour toute extension $L/K$ de corps de nombres on a une application naturelle $A(K) \to A(L)$, image de l'inclusion $K \subset L$ sous le foncteur $A$. On suppose en outre que ce foncteur satisfait aux conditions suivantes:

**P1)** Il existe un homomorphisme normique $N = N^A_{L/K} : A(L) \to A(K)$ pour toute extension $L/K$, et au cas où $L/K$ est galoisienne avec groupe $G$, l'application composée $A(L) \to A(K) \to A(L)$ (la seconde étant l'application naturelle) coïncide avec la multiplication par la somme normique $s_G = \sum_{\sigma \in G} \sigma$.

**P2)** $A$ satisfait à la descente galoisienne: Pour toute extension $G$-galoisienne $L/K$, l'application $A(K) \to A(L)$ est injective d'image $A(L)^G$. On peut alors la considérer comme une inclusion.

De plus, on se donne une $\mathbf{Z}_p$-extension $F_\infty = \bigcup_n F_n$ d'un corps de nombres $F$. Le groupe de Galois de $F_\infty$ sur $F_n$ sera noté $\Gamma_n$, et $\Gamma$ sera le groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Nous introduisons alors deux autres conditions: Abrégeons $\bigcup_n A(F_n)$ en $A_\infty$.

**P3)** Pour $n$ assez grand, le $\mathbf{Z}_p$-rang de $A(F_n)$ peut être écrit sous la forme $sp^n + t$, avec des entiers $s$ et $t$ indépendants de $n$.

**P4)** Les ordres des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, A_\infty)$ sont bornés, et les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, (A_\infty)_{\mathrm{tor}})$ sont tous réduits à zéro.

Pour tout foncteur $A$, notons $\widetilde{A}$ le foncteur qui associe à chaque $F$ le module $A(F)/A(F)_{\mathrm{tor}}$.

*Remarque.* La condition (P4) entraîne que $\widetilde{A}$ satisfait à la descente dans la tour $F_\infty/F$: en d'autres termes $\widetilde{A}_\infty^{\Gamma_n}$ coïncide avec $\widetilde{A}(F_n)$. Le résultat principal de cette section s'énonce alors ainsi:

THÉORÈME. *Pour tout foncteur $A$ et toute $\mathbf{Z}_p$-extension $F_\infty/F$ tels que les conditions (P1) à (P4) soient satisfaites, on a pour tout $n \geq 0$:*

*a) Le sous-module $\nu\widetilde{A}(F_n)$ des normes universelles dans $\widetilde{A}$ au niveau $n$ est libre de rang $s$ sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$, avec $G_n = \mathrm{Gal}(F_n/F)$.*

*b) La limite projective $\varprojlim_{n\to\infty} \widetilde{A}(F_n)$ est libre de rang $s$ sur l'algèbre $\Lambda$ d'Iwasawa.*

PREUVE : Comme la limite projective du système $(\widetilde{A}(F_n))$ n'est autre que la limite du système $(\nu\widetilde{A}(F_n))$, la partie (b) est une conséquence facile de la partie (a).

Pour démontrer (a), nous commençons par quelques suites exactes. Nous rappelons que le tilde signale qu'on a quotienté par la torsion. Ecrivons $A_n$ pour $A(F_n)$ et $\widetilde{A}_n$ pour $\widetilde{A}(F_n)$.

Prenons un entier $i$ et considérons la suite exacte :

$$0 \to \widetilde{A}_\infty \xrightarrow{p^i} \widetilde{A}_\infty \to \widetilde{A}_\infty/p^i \to 0.$$

En prenant les éléments fixés sous $\Gamma_n$ et en appliquant la suite exacte de cohomologie, on trouve

$$0 \to \widetilde{A}_n/p^i \to (\widetilde{A}_\infty/p^i)^{\Gamma_n} \to \mathrm{H}^1(\Gamma_n, \widetilde{A}_\infty)[p^i] \to 0,$$

et par passage à la limite sur $i$:

$$0 \to \widetilde{A}_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to (\widetilde{A}_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^{\Gamma_n} \to \mathrm{H}^1(\Gamma_n, \widetilde{A}_\infty) \to 0.$$

Or, le module $\widetilde{A}_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ n'est autre que $A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, et de même pour $A_\infty$. Si l'on écrit $C_n$ pour le groupe $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, \widetilde{A}_\infty)$, on obtient une suite de la forme

$$0 \to A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to (A_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^{\Gamma_n} \to C_n \to 0. \tag{1}$$

Les ordres des groupes $C_n$ sont *bornés* par (P4): il suffit de constater qu'on a une suite $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, A_\infty) \to \mathrm{H}^1(\Gamma_n, \widetilde{A}_\infty) \to \mathrm{H}^2(\Gamma_n, (A_\infty)_{\mathrm{tor}})$, et le terme $\mathrm{H}^2$ est nul.

Nous allons utiliser la dualité de Pontryagin: soit $D$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(-, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ de la catégorie des $\Lambda$-modules discrets dans celle des $\Lambda$-modules compacts. Définissons $J$ par :

$$J = D(A_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

Evidemment, $J$ est sans $\mathbf{Z}_p$-torsion. On va voir tout de suite que $J$ est de génération finie sur $\Lambda$. Alors l'invariant $\mu$ de $J$ est forcément nul.

LEMME 1. *a) Il y a une suite exacte naturelle*

$$0 \to D(C_n) \to J_{\Gamma_n} \to D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \to 0.$$

*b) $J$ est de génération finie sur $\Lambda$.*

PREUVE : La partie (a) s'obtient en appliquant le foncteur $D$ exact à la suite (1).

Pour établir (b) fixons $n$ quelconque. Comme $A_n$ est de génération finie sur $\mathbf{Z}_p$, il en est de même pour $D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. Par la finitude de $D(C_n)$, on voit que $J_{\Gamma_n}$ est de génération finie sur $\mathbf{Z}_p$. Comme $J$ est compact, on conclut par le lemme de Nakayama.

Nous allons appliquer la théorie structurale d'Iwasawa au module $J$. Il existe alors un nombre naturel $r$ et des polynômes distingués $f_1, \ldots, f_k \in \Lambda$ tels qu'il y ait une suite courte exacte sur $\Lambda$ avec un conoyau $K$ *fini*:

$$0 \to J \to \Lambda^r \oplus \Lambda/(f_1) \oplus \cdots \oplus \Lambda/(f_k) \to K \to 0. \tag{2}$$

Calculons $r$ et les $f_i$, comme dans IWASAWA (1973). Par le lemme 1a, la $\mathbf{Z}_p$-torsion des $J_{\Gamma_n}$ est bornée, ce qui montre que tous les $f_i$ doivent être diviseurs d'un élément $1 - \sigma^{p^j}$ convenable ($\sigma$ étant un générateur topologique de $\Gamma$, choisi une fois pour toutes). Maintenant, examinons le rang de $D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. Il est égal au rang de $A_n$, qui vaut, par la condition (P3), $sp^n + t$, pour $n$ assez grand. Mais le rang de $J_{\Gamma_n}$ est $rp^n + d$ pour $n \geq j$, où l'on a posé $d = \sum_{i=1}^k deg(f_i)$. Par comparaison, on obtient $s = r$ et $t = d$.

Pour $n$ assez grand, en prenant les $\Gamma_n$-coinvariants dans (2) on trouve en utilisant l'égalité $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_{\Gamma_n}, K) = K$ la suite exacte :

$$K \to J_{\Gamma_n} \to \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \to K \to 0.$$

Définissons $B_n$ par $J_{\Gamma_n}/(J_{\Gamma_n})_{\mathrm{tor}}$. La dernière suite donne alors:

$$0 \to B_n \to \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \to K \to 0. \tag{3}$$

Mais par le lemme (1a), nous avons $B_n \cong D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$. Par conséquent, on trouve:

$$0 \to D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\alpha_n} \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \to K \to 0. \tag{4}$$

Il nous faut alors comprendre ce qui se passe quand on fait varier $n$ dans cette suite. Quelles sont les "bonnes applications verticales"? Fixons $m \geq n$, $n$ assez grand. Les injections $A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to A_m \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ correspondent aux inclusions canoniques $\iota : (A_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^{\Gamma_n} \to (A_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^{\Gamma_m}$, lesquelles sont transformées par la dualité $D$ dans les épimorphismes canoniques $J_{\Gamma_m} \to J_{\Gamma_n}$. On a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(A_m \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "D\iota"] & \mathbf{Z}_p[G_m]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \arrow[r] \arrow[d, "can"] & K \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(A_n \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \arrow[r] & \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5}$$

l'application *can* étant canonique. En particulier, elle est l'identité sur le facteur $\mathbf{Z}_p^d$.

Comme les modules $B_n$ ne sont pas ceux auxquels on s'intéresse, nous avons besoin d'un autre foncteur de dualité, soit $\delta = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(-, \mathbf{Z}_p)$. Pour $n$ quelconque, $\delta$ est un foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ dénote la catégorie des $\mathbf{Z}_p[G_n]$-modules de génération finie, et $\delta$ induit une dualité quand on le restreint aux modules sans torsion (i.e. $\mathbf{Z}_p$-libres). Il n'est pas difficile de vérifier qu'on a:

LEMME 2. *Il y a un isomorphisme de foncteurs sur $\mathcal{M}$:*

$$\delta D(M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \cong M/M_{\mathrm{tor}}, \qquad \forall M \in \mathcal{M}.$$

*Remarques.* a) L'opération de $G_n$ sur $\delta(M)$ et sur $D(M)$ est toujours donnée par la formule habituelle $(\tau f)(x) = f(\tau^{-1}x)$, $x \in M$.

b) Le lemme nous dit que $\delta(B_n) \cong \widetilde{A}_n$, et $\delta D\iota$ redonne $\iota$.

Il existe une méthode canonique pour identifier $\delta\mathbf{Z}_p[G_n]$ et $\mathbf{Z}_p[G_n]$. On définit $\phi : \delta\mathbf{Z}_p[G_n] \to \mathbf{Z}_p[G_n]$ en posant $\phi(f) = \sum_{\tau\in G_n} f(\tau)\cdot\tau$. Dans la suite, il nous faudra savoir comment se comporte l'application *can* sous cet isomorphisme $\phi$. Démontrons un petit lemme:

LEMME 3. *Soit $s_{m,n} \in \mathbf{Z}_p[G_m]$ (avec $m \geq n$ comme plus haut) la somme de tous les $\tau \in$ Ker$(G_m \to G_n)$; nous allons utiliser la même notation pour le $\Lambda$-homomorphisme de $\mathbf{Z}_p[G_n]$ en $\mathbf{Z}_p[G_m]$ donné par multiplication avec cette somme. Alors, $\phi$ transforme $\delta can$ en $s_{m,n}$.*

PREUVE : Il suffit de voir que $\phi(\delta\, can(\phi^{-1}(1))) = s_{m,n}$. Or, $e = \phi^{-1}(1) \in \delta\mathbf{Z}_p[G_n]$ est donné par: $\tau \mapsto 0$ pour $\tau \neq 1_{G_n}$, et $1_{G_n} \mapsto 1$. On obtient: $\phi(\delta\, can(e)) = \phi(e\ can)$. L'application $e\, can$ est la fonction caractéristique de $\mathrm{Ker}(G_m \to G_n)$, ce qui donne facilement que $\phi(e\ can) = s_{m,n}$.

Appliquons le foncteur $\delta$ au diagramme (5) en prenant compte du lemme 3 et de l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{Z}_p, K) \cong DK$, et écrivons $\beta_n$ pour $\delta(\alpha_n)$. Ceci produit un nouveau diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d & \xrightarrow{\beta_n} & \widetilde{A}_n & \longrightarrow & DK & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle s_{m,n}\oplus id} & & \big\downarrow{\scriptstyle \iota} & & \big\downarrow{\scriptstyle =} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d & \xrightarrow{\beta_m} & \widetilde{A}_m & \longrightarrow & DK & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{6}$$

Il nous reste un dernier pas à faire: il faut déterminer les applications verticales de bas en haut dans ce diagramme qui correspondent aux applications normiques $\widetilde{A}_m \to \widetilde{A}_n$. Appelons $\gamma_{m,n}$ l'application cherchée de $\mathbf{Z}_p[G_m] \oplus \mathbf{Z}_p^d$ en $\mathbf{Z}_p[G_n] \oplus \mathbf{Z}_p^d$. L'application $(s_{m,n} \oplus id) \circ \gamma_{m,n}$ n'est autre que la multiplication par $s_{m,n}$, et cette condition détermine $\gamma_{m,n}$ de façon unique puisque $s_{m,n} \oplus id$ est injective. On constate que $s_{m,n}$ agit sur $\mathbf{Z}_p^d$ comme multiplication par $p^{m-n}$ ($n$ étant assez grand), ce dont nous tirons que l'application $\gamma_{m,n}$ est donnée par $can \oplus p^{m-n}$. Bien entendu, *can* est l'épimorphisme canonique $\mathbf{Z}_p[G_m]^s \to \mathbf{Z}_p[G_n]^s$. Pour la même raison, l'application correspondante $DK \to DK$ est justement la multiplication par $s_{m,n}$. Récapitulons cela dans un diagramme final:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \arrow[r, "\beta_n"] & \widetilde{A}_n \arrow[r] & DK \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}_p[G_n]^s \oplus \mathbf{Z}_p^d \arrow[r, "\beta_m"] \arrow[u, "can\oplus p^{m-n}"'] & \widetilde{A}_m \arrow[r] \arrow[u, "N_{m,n}"'] & DK \arrow[r] \arrow[u, "s_{m,n}"'] & 0 \end{tikzcd} \tag{7}$$

Maintenant il est facile d'achever la démonstration du théorème: Prenons $n$ fixe et laissons $m$ tendre vers l'infini. Pour tout $m$ suffisamment grand, l'application verticale à droite dans (7) sera nulle, et on trouve que les normes universelles dans $\widetilde{A}_n$ sont identifiées par $\beta_n$ à l'intersection des images de toutes les applications $can \oplus p^{m-n}$. On voit par un coup d'œil que cette intersection est égale à $\mathbf{Z}_p[G_n]^s$, ce qui achève la preuve pour $n$ assez grand. Mais pour tout $n \leq n'$, le groupe $\nu\widetilde{A}_n$ contient évidemment le groupe $N_{n',n}(\nu\widetilde{A}_{n'}) = s_{n',n} \cdot \nu\widetilde{A}_{n'}$. D'autre part, $\nu\widetilde{A}_n$ est toujours contenu dans le groupe des $G_{n',n}$-invariants de $\nu\widetilde{A}_{n'}$. Si l'on sait d'avance que $\nu\widetilde{A}_{n'}$ est libre sur $\mathbf{Z}_p[G_{n'}]$, on trouve que $(\nu\widetilde{A}_{n'})^{G_{n',n}} = s_{n',n} \cdot \nu\widetilde{A}_{n'}$, et les deux groupes coïncident avec $\nu\widetilde{A}_n$ qui est libre sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$ à son tour. Le théorème est donc prouvé pour tout entier $n$ positif.

Chemin faisant, nous avons démontré davantage. Ecrivons cela sous forme d'un corollaire:

COROLLAIRE. *Gardons les hypothèses du théorème. Alors les applications normiques induisent des surjections:* $\nu\widetilde{A}_m \to \nu\widetilde{A}_n$ *(pour* $m \geq n$ *quelconques), et les applications d'inclusion induisent des isomorphismes* $\nu\widetilde{A}_n \to (\nu\widetilde{A}_m)^{G_{m,n}}$. *Il est d'ailleurs facile de voir que les surjections mentionnées ci-dessus se factorisent par des isomorphismes* $(\nu\widetilde{A}_m)_{G_{M,n}} \to \nu\widetilde{A}_n$.

En un mot: le comportement galoisien des groupes de normes universelles est le meilleur qu'on puisse souhaiter. La méthode par laquelle nous y sommes arrivés n'est pas du tout la seule possible: dans une version préliminaire de ce travail, on démontrait d'abord la descente galoisienne pour les normes universelles de façon directe; le reste de la preuve s'appuyait sur ce dernier résultat.

## 2. Exemples

Dans cette section, on va étudier certains exemples de foncteurs qui satisfont aux axiomes (P1) à (P4). Nous fixons une $\mathbf{Z}_p$-extension $F_\infty/F$, où désigne $F$ un corps de nombres et $p$ un nombre premier quelconque.

1°— Posons $A(K) = E'(K) \otimes \mathbf{Z}_p$, le groupe $p$-adifié des $S$-unités de $K$, où $S = S_K$ est l'ensemble des places sur $p$ dans $K$. Il est alors évident que (P1) et (P2) sont vérifiés pour $A$. Soit $g = g(F)$ le cardinal de $S_F$. Décomposons $g = g_d + g_n$, où $g_d$ est le nombre des $p$-places dans $F$ qui se décomposent complètement dans $F_\infty$. Les autres places sur $p$ ne se décomposent plus à partir d'un certain étage, disons $F_i$, de la tour $F_\infty$. Remarquons que $g_d$ est nul pour la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique. Alors le théorème sur les $S$-unités implique que (P3) est également vérifié (pour $n \geq i$), si l'on prend $s = r_1(F) + r_2(F) + g_d$, $t = g_n(F_i)$. Quant à la quatrième condition, on trouve:

Proposition 1. *La condition (P4) est satisfaite pour $A = E' \otimes \mathbf{Z}_p$ si soit $F_\infty/F$ est cyclotomique, soit $\zeta_p \notin F$ (Noter que ce deuxième cas est exclus lorsque $p = 2$).*

Preuve : Comme d'habitude, $\mathrm{Cl}'(K)$ désignera le groupe des $p$-classes de $K$, c'est-à-dire le groupe de classes de $K$ quotienté par les classes d'ideaux avec support sur $p$. Il est bien connu (Iwasawa (1973)) que les groupes de capitulation $\mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}'(F_n) \to \mathrm{Cl}'(F_\infty))$ sont bornés (en fait, ils se stabilisent par la norme). D'autre part, on a $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, E'(F_\infty)) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}'(F_n) \to \mathrm{Cl}'(F_\infty))$, d'où la première partie de (P4). Pour la deuxième, notons qu'il est bien connu dans le cas cyclotomique que $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, \mu(F_\infty))$ est trivial. Si $\zeta_p \notin F$, alors la partie $p$-primaire de $\mu(F_\infty)$ est déjà nulle, et alors le $\mathrm{H}^1$ est de nouveau trivial.

*Remarques.* a) Pour le cas cyclotomique, le résultat qu'on vient de démontrer est dû à Kuz'min (1972). Cependant, notre démonstration est plus simple et plus générale.

b) Si les hypothèses de la prop. 1 ne sont pas satisfaites, la conclusion est encore vraie quitte à remplacer le groupe $\widetilde{A}_n$ par le groupe $A'_n = \widetilde{A}_\infty^{\Gamma_n}$. On a une suite canonique $0 \to \widetilde{A}_n \to A'_n \to \mathrm{H}^1(\Gamma_n, \mu(F_\infty))$, et l'ordre du dernier terme est borné; en fait, $\mu(F_\infty)$ est fini.

2°—Il serait beau d'avoir un résultat similaire pour les unités au lieu des $p$-unités. Mais cela est impossible, comme on peut s'en convaincre par (au moins) deux voies: Ou bien on prend à titre d'exemple la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique du corps $F = \mathbf{Q}(\zeta_p)$, où $p$ est un nombre premier et où $h(F)$ n'est pas divisible par $p$. Alors le groupe $E(F_n) \otimes \mathbf{Z}_p$ des unités $p$-adifiées coïncide avec le groupe $C(F_n) \otimes \mathbf{Z}_p$, où on a remplacé les unités par les unités cyclotomiques. On sait qu'il y a une suite courte $0 \to E(F_n)/\{\pm 1\} \to \mathbf{Z}[G_n]^{(p-1)/2} \to \mathbf{Z} \to 0$, et alors $E(F_n) \otimes \mathbf{Z}_p$ ne sera pas libre sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$. Une autre façon de le voir: Si l'on suit les arguments de la section 1, on voit que la constante additive $t$ (rappelons que le rang de $A_n$ était $sp^n + t$) est forcément positive (ou nulle). Mais pour les unités, le théorème de Dirichlet entraînerait $t = -1$. Pourtant, on peut sauver une partie du résultat comme suit. On va refaire et généraliser un résultat de DE SHALIT (1989). Pour cela supposons qu'aucune place au-dessus de $p$ dans $F$ ne se décompose dans $F_\infty$. Un peu de notation supplémentaire: Pour chaque foncteur $A$ muni d'applications normiques, posons $\kappa A(F_n) = \mathrm{Ker}\big(N : A(F_n) \to A(F_0) = A(F)\big)$. Alors $\kappa A$ est un sous-foncteur de $A$, et il est muni d'applications normiques lui aussi.

PROPOSITION 2. *Sous ces hypothèses, si l'on pose $A(L) = E(L) \otimes \mathbf{Z}_p$, les modules $\nu\kappa A(F_n)$ ne sont plus libres sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$ mais isomorphes à $(1-\sigma)\mathbf{Z}_p[G_n]^s$ avec $s = r_1(F) + r_2(F)$ (Nous rappelons au lecteur que $\sigma$ est un générateur fixé de $\Gamma$).*

PREUVE : Posons $A'(L) = E'(L) \otimes \mathbf{Z}_p$ (le foncteur du numéro qui précède). On calcule: $\nu(\kappa A_n) \subset \nu(\kappa A'_n) \subset \kappa(\nu A'_n)$. Mais $\nu A'_n$ est libre sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$ par la prop. 1. On en déduit que $\kappa(\nu A'_n) = (1-\sigma)(\nu A'_n) \subset \nu((1-\sigma)A'_n) \subset \nu(\kappa A_n)$. (La dernière inclusion s'ensuit du fait qu' aucune $p$-place n'est décomposée.) De cette chaîne d'inclusions, on obtient l'égalité $\nu(\kappa A_n) = (1-\sigma)(\nu A'_n)$, ce qui suffit d'après la prop. 1.

3°—Maintenant nous traiterons le foncteur $\mathrm{K}_3$. Il est conjecturé que tous les foncteurs $\mathrm{K}_{2n+1}$ ($n \geq 1$) se comportent comme "unités tordues" quand on les applique aux corps de nombres, et pour $n = 1$, voire pour le $\mathrm{K}_3$, on a beaucoup d'information. Ceci nous permettra d'établir un résultat sur les normes dans $\mathrm{K}_3$. Rappelons d'abord que $\mathrm{K}_3(F)_{\mathrm{ind}}$ est défini comme $\mathrm{K}_3(F)$ quotienté par les élément décomposables, c'est-à-dire qui proviennent du groupe $\mathrm{K}_3^M(F)$ de Milnor. Ce dernier est fini d'exposant 2 si $F$ est un corps de nombres.

PROPOSITION 3. *Soit $F_\infty/F$ une $\mathbf{Z}_p$-extension, et soit $A$ le foncteur $K_3(-)_{\mathrm{ind}} \otimes \mathbf{Z}_p$. Notons que pour $p \neq 2$ l'indice $_{\mathrm{ind}}$ est superflu. Supposons que $F_\infty$ est cyclotomique, ou bien que $\mu_p \otimes \mu_p(F)$ soit trivial, en d'autres termes: $[F(\zeta_p) : F] > 2$. Alors, les axiomes (P1) à (P4) sont valables pour $A$.*

PREUVE : L'existence d'applications normiques aux propriétés habituelles (voir (P1)) est bien connue en K-théorie. Là, on les appelle "transferts". La descente galoisienne pour $\mathrm{K}^3_{\mathrm{ind}}$ est due à LEVINE (1989) et à MERKUR'EV et SUSLIN (1990). Pour chaque corps $L$ de nombres, $\mathrm{K}_3(L)$ est de génération finie et de rang $r_2(L)$ sur $\mathbf{Z}$; ceci est essentiellement dû à Borel, voir KAHN (1993) Prop. 4.1. Ceci étant, (P3) est aussi démontré avec $s = r_2(F)$ et $t = 0$.

Pour (P4), citons d'abord une suite exacte fort utile (KAHN (1993) Thm. 4.2): Soit $E/L$ une extension $G$-galoisienne de corps de nombres. Alors:

$$0 \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{K}_3(E)_{\mathrm{ind}}) \to \mathrm{K}_2(L) \to \mathrm{K}_2(E)^G \to \mathrm{H}^2(G, \mathrm{K}_3(E)_{\mathrm{ind}}) \to 0$$

est exacte. En appliquant cette suite pour $L = F_n$ et $E = F_\infty$, on voit que les groupes $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, A(F_\infty)) = \mathrm{H}^1(\Gamma_n, \mathrm{K}_3(F_\infty)_{\mathrm{ind}})$ sont bornés par les groupes de capitulation $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}_2(F_n) \to \mathrm{K}_2(F_\infty))$. Or, B. KAHN et TH. NGUYEN QUANG DO (voir KAHN loc. cit., Thm. 6.2 avec Thm. 4.2) ont prouvé que les derniers groupes sont bornés. Il reste à voir que les groupes $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, A_{\mathrm{tor}}(F_\infty))$ sont nuls. D'après LEVINE et MERKUR'EV-SUSLIN (voir KAHN loc. cit. (1.2)), on a $A_{\mathrm{tor}}(F^{\mathrm{alg}}) \cong \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2)$ comme modules sur $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{alg}}/F)$. Si $\mu_p \otimes \mu_p(F)$ est trivial, alors $A_{\mathrm{tor}}(F_\infty)$ est lui aussi trivial, et il n'y a rien à démontrer. Si $F_\infty/F$ est cyclotomique, alors il est bien connu que $\mathrm{H}^1(\Gamma_n, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))$ est trivial pour tout $n$.

## §3. Applications et compléments

Nous conservons la notation du §2: $F_\infty/F$ est une $\mathbf{Z}_p$-extension et $A$ un foncteur soumis aux axiomes (P1) à (P4). Dans les applications, $A$ sera presque toujours le foncteur $E' \otimes \mathbf{Z}_p$.

1°—*Groupes de classes et unités cyclotomiques*

D'abord, expliquons la relation entre $A_n$ et $\nu A_n$.

LEMME 4. *a) L'indice $[A_n : \nu A_n]$ est borné si et seulement si l'entier $t$ dans (P3) vaut zéro. Si $t = 0$, les images de la norme $A_m \to A_n$ se stabilisent pour $m$ assez grand, avec valeur limite égale a $\nu A_n$.*

*b) Si $t = 0$, les applications $A_n/\nu A_n \to A_m/\nu A_m$ sont injectives, et des isomorphismes pour $n$ assez grand.*

*c) Si $C$ est un sous-foncteur de $\nu A$, alors ou bien $[\nu A_n : C_n]$ n'est pas borné, ou bien $C$ et $\nu A$ sont égaux.*

PREUVE : a) résulte du diagramme final dans la preuve du Thm. 1 (noter que $t = d$).

b) Les applications en question sont injectives parce que le foncteur $\nu A$ satisfait à la descente galoisienne dans la tour cyclotomique, par le corollaire au Thm. 1. Le reste est une conséquence de a).

c) Admettons que $[\nu A_n : C_n] \leq p^e$ pour tout $n$. Alors il existe un entier $f$ qui ne dépend que de $n$ tel que $\sigma^{p^f}$ opère trivialement sur tous $\Gamma$-modules de cardinal au plus $p^e$. Prenons $x \in A_n$; il faut montrer que $x$ est dans $C_n$. Prenons un $m \geq \max(n, f)$ et un antécédent $y \in \nu A_{m+e}$ de $x$. L'image de $y$ sous la norme dans $\nu A_m$ est égale à $p^e y$. Mais alors l'image de $y$ dans $\nu A_m$ sera dans $C_m$, et a fortiori, $x$ sera dans $C_n$.

On notera $K(A)$ le module $A_\infty / \bigcup_n \nu A_n$. On verra que $K(A)$, pour $A = E' \otimes \mathbf{Z}_p$, est lié aux $p$-parties des groupes de classes.

Prenons pour exemple $F = \mathbf{Q}(\zeta_p)^+$ avec $p \neq 2$. On sait que le groupe des $p$-unités cyclotomiques (mod torsion) dans $F_n$ est alors libre sur l'algèbre $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q}]$ avec $1 - \zeta_{p^n}$ comme générateur. Notons $C_n$ son tensorisé avec $\mathbf{Z}_p$. Il est aussi connu (et évident) que $C_n$ est contenu dans les normes universelles $\nu A_n$ des $p$-unités concernés. Pourvu qu'on sache déjà que les indices $[A_n : C_n]$ sont bornés (ce qui équivaut à dire que les $p$-parties des nombres des classes $h(F_n)$ sont bornées, par la formule analytique des nombres de classes), on trouve alors que $C_n = \nu A_n$ pour tous $n$. Posant $K = K(A)$, on a une suite

$$0 \to \nu A_\infty \to A_\infty \to K,$$

où $K$ est un $\Gamma$-module fini et on peut prendre les $\Gamma_n$-invariants dans cette suite. Comme $\nu A_\infty$ est libre sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$, on trouve, en tenant compte du Corollaire (fin du §1):

$$0 \to C_n = \nu A_n \to A_n \to K^{\Gamma_n} \to 0. \tag{8}$$

On vient de faire l'hypothèse que les $p$-parties des $h(F_n)$ sont bornées. Par la théorie d'Iwasawa, ceci implique que les $p$-parties des groupes $\mathrm{Cl}'(F_n)$ se stabilisent par la norme, avec une valeur limite $H$ qui est aussi égale au noyau de capitulation

$$\mathrm{Ker}\big(\mathrm{Cl}'(F_n) \to \mathrm{Cl}'(F_m)\big), \mathbf{Q} \quad m \gg n \gg 0.$$

Or ce noyau est aussi isomorphe à $\mathrm{H}^1(G_{m,n}, A_m)$. La suite (8) et le fait que $\nu A_n$ est libre permettent de calculer: $\mathrm{H}^1(G_{m,n}, A_m) \cong \mathrm{H}^1(G_{m,n}, K)$, et le dernier groupe vaut $K_{\Gamma_n}$ pour $m$ assez grand. Nous avons donc trouvé:

$$A_n/C_n \cong K^{\Gamma_n}, \text{ et } \mathrm{Cl}'(F_n)\{p\} \cong K_{\Gamma_n},$$

pourvu que les $p$-parties des nombres de classes $h(F_n)$ soient bornées; en d'autres termes: l'invariant $\lambda(F)$ doit être nul (La conjecture de Greenberg affirme que c'est le cas pour tout $F$ totalement réel).

Ces formules peuvent être considerées comme la version explicite et algébrique de la formule analytique des nombres de classes pour les corps $F_n$. Noter que $K^{\Gamma_n}$ et $K_{\Gamma_n}$ ont toujours le même cardinal, et ils sont égaux à $K$ pour $n$ assez grand. Ainsi, nous venons de redémontrer un résultat de BAE, KIM and LEE (1991).

On peut généraliser tout cela au cas d'un corps réel abélien $F$ dans lequel $p$ est totalement inerte (Un tel corps doit être cyclique sur $\mathbf{Q}$). Précisons: On peut montrer pour un tel $F$ que toutes les $p$-unités cyclotomiques dans $F_n$ sont des normes universelles de $p$-unités (en fait, de $p$-unités cyclotomiques), en utilisant les formules standard pour les normes d'unités cyclotomiques. Supposons que $\lambda(F) = 0$. Par SINNOTT (1980) cela entraîne que $[A_n : C_n]$ est borné, et on conclut grâce au lemme 4 qu'on a l'égalité $C_n = \nu A_n$. Tout ce qu'on vient de dire pour $F = \mathbf{Q}(\zeta_p)$ reste alors valable dans le cas d'un corps réel abélien où $p$ est totalement inerte.

2°—*Noyaux des valeurs absolues et conjecture de Gross.*

Soit maintenant $F_\infty$ la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres $F$; posons $A(-) = E'(-) \otimes \mathbf{Z}_p$. Introduisons la valeur absolue $p$-adique, aussi dite logarithme de Gross (JAULENT (1990), KOLSTER (1991)): Il y a une application canonique (diagonale)

$$A_n \xrightarrow{\delta} \prod_{v|p} F_{n,v}^\times.$$

Pour chaque place $v$ de $F_n$ au-dessus de $p$, soit $N_v \subset F_{n,v}^\times$ le groupe des normes universelles de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de $F_{n,v}$. Grâce au corps de classes on sait que $N_v$ est l'image réciproque sous N: $F_{n,v}^\times \to \mathbf{Q}_p^\times$ du groupe $N_p$ des normes universelles de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbf{Q}_p$. Or on sait que $N_p = \{\pm 1\} \times p^{\mathbf{Z}_p}$; d'où découle que le logarithme $p$-adique $\log_p$ induit un isomorphisme $\mathbf{Q}_p^\times/N_p \to 2p\mathbf{Z}_p$. Définissons $\log_v$ comme la composée $F_{n,v}^\times \to \mathbf{Q}_p^\times/N_p \to 2p\mathbf{Z}_p$, et le logarithme $\lambda_n$ de Gross comme

$$\lambda_n = (\prod_{v|p} \log_v) \circ \delta : A_n \to Y_n,$$

où nous avons posé $Y_n = \prod_{v|p} 2p\mathbf{Z}_p$. En outre, posons $\operatorname{Ker} \lambda_n = B_n$, et appelons le "noyau de Gross" ou "noyau des valeurs absolues $p$-adiques".

Il est important de noter que $B_n$ est par définition l'ensemble des éléments de $A_n$ qui sont des normes universelles de $F_\infty$ *localement partout sur* $p$. On en tire tout de suite que $B_n \supset \nu A_n$, et on a trivialement que $\nu A_n = \nu B_n$.

Mais d'un certain point de vue, le comportement des $B_n$ par rapport à la norme est meilleur que celui des $A_n$. La démonstration du Thm. 1 nous a montré que si $p$ se décompose, alors les images des applications normiques $A_m \to A_n$ ($m \geq n$, $m \to \infty$) ne se stabilisent jamais; nous allons voir maintenant que cela n'est pas ainsi pour les groupes $B_n$. Si le quotient $B_n/\nu A_n$ est fini, il est clair que les images $I_m$ de $B_m \to B_n$ se stabilisent; la réciproque est également vraie (utiliser que $\nu A_n + p^{m-n} B_n \subset I_m$, et $\bigcap_m I_m = \nu A_n$). Le prochain résultat nous indique quand ces conditions équivalentes sont verifiées.

PROPOSITION 4. *Le quotient $B_n/\nu A_n$ est fini si et seulement si la conjecture (p-adique) généralisée de Gross est valable pour $F_n$.*

PREUVE : Nous commençons par une suite exacte, due à KUZ'MIN (1972):

$$0 \to (\varprojlim A_m)_{\Gamma_n} \to B_n = \operatorname{Ker} \lambda_n \to (X_\infty)^{\Gamma_n} \to 0,$$

où $X_\infty$ est un module standard d'Iwasawa, à savoir le groupe de Galois sur $F_\infty$ de la pro-$p$-extension non ramifiée abélienne maximale de $F_\infty$ décomposant totalement toutes les places $p$-adiques. Vérifions d'abord que le premier terme (non trivial) est canoniquement isomorphe à $\nu A_n$: en effet, on a une application canonique $\pi : (\varprojlim A_m)_{\Gamma_n} \to \nu A_n$. Elle est surjective, car les applications normiques dans le système $(\nu A_m)$ sont toutes surjectives. Alors on sait grâce au Thm. 1 que la source et le but de $\pi$, quotientés par leur partie de torsion, sont tous deux libres sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$, du même rang, et que $\pi$ est un isomorphisme (On a le droit de quotienter par la torsion: ce sont les racines de l'unité, et elles sont toutes des normes universelles). Or, SINNOTT (1981) a montré que la conjecture de Gross pour $p$ et $F_n$ équivaut à la finitude de $X_\infty^{\Gamma_n}$ si $F_n$ est CM; et en général, on appelle conjecture de Gross généralisée l'énoncé : "$X_\infty^{\Gamma_n}$ est fini".

*Remarques.* a) Si la conjecture de Gross vaut pour tous les $F_n$, on peut montrer sans peine que l'ordre du quotient $B_n/\nu A_n$ est borné par l'ordre de $(X_\infty)_{\mathrm{tor}}$, le groupe $X_\infty$ étant pris pour $F_0$. Alors, les éléments du noyau de Gross sont proches d'être des normes universelles (globales).

b) On peut démontrer la Prop. 4 sans utiliser la suite de Kuz'min, sans trop de difficulté.

c) Considérons les unités $p$-adifiées du corps $F$. Si la conjecture de Leopoldt vaut pour $F$, alors le rang de $\mathrm{Im}(\lambda_0 : E(F) \otimes \mathbf{Z}_p \to Y_0)$ est $g-1$, où $g$ est le nombre de places $p$-adiques de $F$, et on trouve que le rang du quotient $\big(E(F)\otimes\mathbf{Z}_p\big)/\nu A(F)\cap\big(E(F)\otimes\mathbf{Z}_p\big)$ est aussi $g-1$. Autrement dit: si $p$ est décomposé et si la conjecture de Leopoldt est valable, alors beaucoup d'unités de $F$ ne sont pas des normes universelles (remarquons ici qu'on a, presque trivialement, égalité de $\nu(E(F) \otimes \mathbf{Z}_p)$ avec $\nu A(F) \cap E(F) \otimes \mathbf{Z}_p$ si $p$ ne se décompose pas dans $F_\infty/F$). Si l'on regarde le cas extrème où $F$ est abélien, réel, et $p$ est complétement décomposé dans $F$, alors les conjectures de Gross et de Leopoldt valent pour $F$, et par le calcul ci-dessus on trouve que le rang de $\nu(E(F) \otimes \mathbf{Z}_p$ est nul. En d'autres termes, une unité de $F$ qui est une norme universelle (après tensorisation avec $\mathbf{Z}_p$) est déjà une racine de l'unité. Dans ce cadre, il y a en outre un lien entre $\nu A(F)$ et le groupe $\overline{\mathcal{K}_F}$ introduit par SOLOMON (1992): ce dernier groupe est contenu dans $\nu A(F)$, et les deux groupes ont le même rang sur $\mathbf{Z}_p$. Nous espérons revenir sur cette question dans un travail ultérieur.

3°—*Calcul du noyau moderé* $\mathrm{K}_2(\mathcal{O}_F)$

Nous donnons ici l'esquisse d'une méthode permettant de calculer le groupe $\mathrm{K}_2(\mathcal{O}_F)$ par descente, c'est-à-dire en prenant des groupes d'invariants. Le lecteur est invité à comparer avec la démarche de KEUNE (1989), qui fonctionne en sens inverse, en prenant les coïnvariants. Nous omettrons les détails. Comme ci-dessus, $F_\infty$ est la tour cyclotomique; $A_n = E'(F_n) \otimes \mathbf{Z}_p$. Ecrivons $W$ pour $\mu_{p^\infty}$.

Par des calculs standard (comparer COATES (1972)) on trouve une suite exacte:

$$0 \to (A_\infty \otimes W)^\Gamma/\mathrm{div} \to \mathrm{K}_2(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbf{Z}_p \to (\mathrm{Cl}'(F_\infty) \otimes \mathbf{Z}_p(1))^\Gamma \to 0. \quad (9)$$

D'autre part, si nous supposons pour simplifier que $p$ ne se décompose pas dans $F_\infty$, nous avons comme au numéro 1° ci-dessus un $\Gamma$-module fini $K$ et une suite

$$0 \to \nu A_\infty/\mathrm{tors} \to A_\infty/\mathrm{tors} \to K \to 0.$$

D'ailleurs, $K$ est isomorphe au noyau de capitulation dans la tour $F_\infty$, comme on le voit en prenant points fixes sous $\Gamma_m$ et puis $\mathrm{H}^1(G_{m,n}, -)$ dans cette suite. Nous appliquons $- \otimes W$ à cette suite, ce qui donne (noter que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(K, W) = W(1)$):

$$0 \to K(1) \to \nu A_\infty \otimes W \to A_\infty \otimes W \to 0,$$

et il découle du Thm. 1 :

$$(\nu A_\infty \otimes W)^\Gamma = (\nu \widetilde{A}_\infty \otimes W)^\Gamma = \widetilde{A}_n \otimes W,$$

qui est alors un module divisible. De plus, $\nu \widetilde{A}_\infty$ est un $\Gamma$-module induit. Par conséquent, on a:

$$(A_\infty \otimes W)^\Gamma \cong \mathrm{H}^1(\Gamma, K(1)).$$

On a donc construit une suite :

$$0 \to K(1)_\Gamma \to \mathrm{K}_2(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbf{Z}_p \to (\mathrm{Cl}'(F_\infty) \otimes \mathbf{Z}_p(1))^\Gamma \to 0.$$

Si $p$ se décompose, la situation est plus compliquée, et on obtient seulement une formule donnant l'ordre de la $p$-partie du noyau moderé.

## Bibliographie


[1] J. Coates, *On $K_2$ and some classical conjectures in algebraic number theory*, Ann. Math. **95** (1972), 99–116.

[2] K. Iwasawa, *On $Z_l$-extensions of algebraic number fields*, Ann. Math. **98** (1973), 246–326.

[3] J.-F. Jaulent, *Noyau universel et valeurs absolues*, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque **198-200** (1990), 187–209.

[4] B. Kahn, *Descente galoisienne et $K_2$ des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[5] F. Keune, *On the structure of the $K_2$ of the rings of integers in a number field*, K-theory **2** (1989), 625–645.

[6] J. M. Kim, S. Bae et I. Lee, *Cyclotomic units in $Z_p$-extensions*, Israel J. Math. **75** (1991), 161–165.

[7] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9–24.

[8] L. V. Kuz'min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math. USSR Izv. **6(2)** (1972), 263–321.

[9] M. Levine, *The indecomposable $K_3$ of a field*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup **22** (1989), 255–344.

[10] A. S. Merkur'ev et A. A. Suslin, *The group $K_3$ of a field*, Math. USSR Izv. **36** (1990), 541–565.

[11] E. de Shalit, *A note on norm-coherent units in certain $Z_p$-extensions*, Algebraic number theory in honor of K. Iwasawa, Advanced Studies in Pure Math. **17** (1989), 83–87.

[12] W. Sinnott, *On the Stilckelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math **62** (1980), 181–234.

[13] W. Sinnott, Appendice à :*Regulators and Iwasawa modules*, par L. J. Federer et B. H. Gross, Invent. Math. **62** (1981), 443–457.

[14] D. Solomon, *On a construction of p-units in abelian fields*, Invent. Math. **109** (1992), 329–350.

Cornelius Greither
Mathematisches Institut
Universität München
Theresienstr. 39
D-80333 München, Allemagne