

JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur la répartition des fonctions q -additives

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 1 (1993),
p. 79-91

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_79_0>

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

*Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux* 5 (1993), 79–91

Sur la répartition des fonctions q -additives

par JEAN-LOUP MAUCLAIRE

I. Introduction

Soit \mathbb{N} (resp. \mathbb{N}^*) l'ensemble des entiers positifs ou nuls (resp. strictement positifs) et soit q un élément de \mathbb{N}^* strictement plus grand que 1, fixé une fois pour toutes. À tout entier n de \mathbb{N} , on peut associer de façon unique une suite $(a_k(n))_{k \geq 0}$, $0 \leq a_k(n) \leq q - 1$, telle que l'on ait

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n)q^k.$$

Cette suite, dont seul un nombre fini de termes ne sont pas égaux à zéro, est le développement q -adique de n , les $a_k(n)$ étant les chiffres de n développé en base q . La suite des chiffres d'un entier déterminant de façon unique cet entier et toute suite $(a_k)_{k \geq 0}$, $0 \leq a_k \leq q - 1$, $a_k = 0$ sauf pour un nombre fini de k , déterminant de même de façon unique un entier, on en déduit que \mathbb{N} peut être identifié à un sous-ensemble de E , l'ensemble produit d'un ensemble dénombrable de copies E_q , où E_q est défini par

$$E_q = \{0, 1, 2, \dots, q - 1\}.$$

On a donc :

$$\mathbb{N} \subset E = \{x; 0 \leq x \leq q - 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Si on le munit de la topologie produit naturelle, l'ensemble E est homéomorphe à un anneau compact noté traditionnellement \mathbb{Z}_q et appelé l'anneau des entiers q -adiques, et il n'est pas difficile de voir que l'image de \mathbb{N} dans E est non seulement dense, mais encore uniformément distribuée dans le groupe compact \mathbb{Z}_q .

De façon générale, on appellera fonction arithmétique à valeurs dans un ensemble A une application de \mathbb{N} vers A . Les fonctions arithmétiques à

Manuscrit reçu le 28 Janvier 1992.

Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque “Thémate”, (CIRM, Luminy, Mai 1991).

valeurs réelles définies à partir des chiffres des entiers ont été considérées relativement tôt ; par exemple, la fonction $s_q(n)$, “somme des chiffres en base q de n ”, apparaît déjà chez Legendre [8], quand q est premier, pour fournir l’exposant de la plus haute puissance de q divisant $n!$. Dans le cas où $q = 10$, une estimation par M. D’Ocagne de la fonction sommatoire de $s_{10}(n)$, c’est-à-dire une estimation de $\sum_{0 \leq n \leq x} s_{10}(n)$, apparaît déjà en 1886 (in Jornal de sc. math. e ast. vol. 7 p. 117–128).

Par définition, une fonction arithmétique f à valeurs dans \mathbb{C} est dite q -additive (resp. q -multiplicative) si l’on a

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n)q^k), \quad \text{avec } f(0) = 0,$$

$$(\text{resp. } f(n) = \prod_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n)q^k), \quad \text{avec } f(0) = 1).$$

Par exemple, la fonction $s_q(n)$ est q -additive, et $\exp\{\text{its}_q(n)\}$ est q -multiplicative.

On attribue généralement à Gelfond [6] l’introduction en théorie des nombres de la notion abstraite de fonction q -additive à valeurs réelles. Un certain nombre de propriétés statistiques des fonctions q -additives et q -multiplicatives ont été exhibées, par Delange [5] et Coquet [3] par exemple. Les fonctions q -multiplicatives de module égal à 1 ainsi que certaines extensions ont fait par ailleurs l’objet de recherches très intéressantes de la part de nombreux auteurs, dont Coquet [2], Kamae [7], Mendès France [4], Queffélec [13].

Etant donné un groupe abélien G , de loi notée additivement, on peut définir une fonction q -additive f à valeurs dans G en disant que f doit vérifier

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n) \cdot q^k), \quad \text{et } f(0) = 0.$$

Cette définition généralise la définition ordinaire, et les fonctions q -multiplicatives de module égal à 1 deviennent des fonctions q -additives à valeurs dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Dans la suite on remplace \mathbb{R} et \mathbb{T} par un groupe G , abélien, localement compact et métrisable. L’objectif de ce travail est l’étude des lois de distribution associées à une fonction q -additive à valeurs dans G .

II. Résultats

Soit donc G un groupe abélien, localement compact et métrisable, dont nous noterons la loi de groupe $+$. Pour t dans \mathbb{Z}_q , on écrit son développement de Hensel $t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)q^k$, et pour $y \in \mathbb{N}$, son développement tronqué $t_y = \sum_{k \leq y} a_k(t)q^k$ que l'on identifiera respectivement à

$$t = \{a_k(t)\}_{k \geq 0}, t_y = \{a_k(t)\}_{0 \leq k \leq y}.$$

On définit également les mesures de probabilité

$$\mu_k(a_k(t)) = \frac{1}{q}, \quad \mu = \bigotimes_{k \geq 0} \mu_k, \quad \mu_y = \bigotimes_{k \leq y} \mu_k.$$

Pour toute fonction q -additive u , on définit pour tout $y > 0$

$$u_y(t) = \sum_{0 \leq k \leq y} u(a_k(t).q^k).$$

Etant donné un nombre réel $x \geq 0$, on notera $[x]$ sa partie entière.

Rappelons que, par définition, une somme de variables aléatoires indépendantes X_n converge essentiellement dans G s'il existe une suite a_n telle que la série $\Sigma(X_n - a_n)$ converge presque sûrement. Si pour toute suite a_n dans G la série $\Sigma(X_n - a_n)$ diverge presque sûrement, la somme de variables aléatoires indépendantes X_n est dite diverger essentiellement dans G . On sait que dans un groupe abélien métrisable, seuls les cas de convergence ou de divergence essentielles pour les sommes de variables aléatoires indépendantes peuvent avoir lieu, ceci de façon exclusive [15].

Si H est un sous-groupe compact de G , $T_H : g \mapsto g + H$ dénotera la projection canonique de G sur G/H .

Enfin, G étant métrisable, son dual \mathcal{G} est dénombrable à l'infini, de mesure de Haar dm σ -finie.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe abélien localement compact métrisable de loi notée additivement, et soit f une fonction arithmétique q -additive à valeurs dans G . On désigne par \mathcal{G} le groupe dual de G muni d'une mesure*

de Haar dm et par \mathcal{H} le sous ensemble m -mesurable de \mathcal{G} , constitué des caractères χ de \mathcal{G} pour lesquels il existe un entier $N(\chi)$ tel que :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{N(\chi) \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right| > 0.$$

Alors \mathcal{H} est un sous-groupe de \mathcal{G} , et deux cas seulement peuvent se présenter :

Premier cas : \mathcal{H} n'est pas m -négligeable.

Alors, \mathcal{H} est fermé et le dual de \mathcal{G}/\mathcal{H} est un sous-groupe compact H de G pour lequel les propositions suivantes ont lieu simultanément :

1. la suite de variables aléatoires $(T_H(f_y(t)))$ converge essentiellement,
2. il existe une suite A_n dans G/H et une mesure de probabilité ν sur G/H telle que la suite des moyennes de Dirac

$$\frac{1}{[x]} \sum_{n \leq x} \mu_{n,x},$$

où $\mu_{n,x}$ est la mesure sur G/H consistant en une masse unité placée au point

$$T_H(f(n)) - A_{[x]},$$

converge vaguement vers la mesure ν .

Deuxième cas : \mathcal{H} est m -négligeable.

Dans ce cas, pour tout sous-groupe compact K de G , les propositions suivantes ont lieu simultanément :

1. pour toute fonction réelle u continue sur G/K à support compact, et pour toute suite A_n dans G/K , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) = 0.$$

2. la suite de variables aléatoires $(T_K(f_y(t)))$ diverge essentiellement.

On peut affiner l'aspect esthétique du théorème et donner des énoncés moins généraux, mais plus digestes ; par exemple :

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes, supposons que le groupe G est compact. Alors il existe une suite A_n dans G et une mesure de probabilité ν sur G telle que pour toute fonction réelle u continue sur G on ait*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(f(n) - A_{[x]}) = \int_G u.d\nu.$$

On peut aussi donner, (la démonstration étant laissée au lecteur), les conditions nécessaires et suffisantes de continuité de la mesure ν apparaissant dans le premier cas du théorème 1 :

THÉORÈME 3. *Si ω est une mesure de Haar sur G , posons pour toute fonction réelle F continue sur G à support compact*

$$\tilde{F}(\dot{x}) = \int_H F(x + y)d\omega(y),$$

et considérons la mesure Θ définie sur G par :

$$\int_G F d\Theta = \int_{\dot{x} \in G/H} \tilde{F}(\dot{x}) d\nu(\dot{x}).$$

Alors, Θ n'est pas continue si et seulement si H est un groupe fini, et l'on a dans ces conditions :

$$\text{Card}\{(a, k); T_H(f(aq^k)) \neq 0\} < +\infty.$$

Remarques.

1- La méthode de démonstration que nous suivrons ici est analogue à celle développée dans [11].

2- La formulation des résultats connus déjà dans le cas où $G = \mathbb{R}$ [5] et $G = \mathbb{T}$ [3], qui s'exprime ordinairement en termes de conditions portant sur les valeurs des fonctions aux points aq^k , $0 \leq k$, $0 \leq a \leq q - 1$, pourrait être récupérée immédiatement à partir du théorème 1 en utilisant, dans le cas de $G = \mathbb{R}$, le “théorème des trois séries” de Kolmogorov [10], et dans celui de $G = \mathbb{T}$, son analogue sur \mathbb{T} , un résultat bien connu de P. Lévy [9].

3- La suppression pure et simple du mot “métrisable” dans l'énoncé du théorème 1 n'est pas possible.

III. Démonstrations

A- Cas du théorème 2.

C'est une conséquence immédiate du théorème 1. G étant compact et métrisable, son dual \mathcal{G} est discret et dénombrable. Le sous groupe \mathcal{H} est de mesure non nulle. On remarque que l'on peut relever $T_H(f(n)) - A_{[x]}$ dans G en $f(n) - A_{[x]}^*$, où $A_{[x]}^*$ doit seulement vérifier $T_H^*(A_{[x]}) = A_{[x]}$. Pour conclure, on utilise le fait que toute fonction continue sur G est approchée uniformément par des polynômes trigonométriques.

B- Cas du théorème 1.

Première partie : \mathcal{H} est un groupe.

Soit donc \mathcal{H} l'ensemble des caractères χ de \mathcal{G} pour lesquels il existe un entier positif $N(\chi)$ dépendant de χ , tel que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{N(\chi) \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right| > 0.$$

À un tel χ , pour $M \geq N \geq N(\chi)$, on associe la famille de fonctions $f_{N,M} : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_{N,M}(t) = \frac{\prod_{N \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t)q^k))}{\prod_{N \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|}.$$

Pour N fixé, $f_{N,M}$ est, par construction, une martingale, qui vérifie

$$|f_{N,M}(t)| = \frac{1}{\prod_{N \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|}.$$

Elle est donc bornée régulière, d'après le théorème de Fatou. On en déduit que la limite $\lim_{M \rightarrow +\infty} f_{N,M}(t)$ existe μ presque partout, et par symétrisation, on voit que la suite

$$\begin{aligned} F_{N,M}(t, u) &= f_{N,M}(t) \cdot \overline{f_{N,M}(u)} \\ &= \frac{\prod_{N \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t)q^k))}{\prod_{N \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|} \times \frac{\overline{\prod_{N \leq k \leq M} \chi(f(a_k(u)q^k))}}{\overline{\prod_{N \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|}} \end{aligned}$$

converge $(d\mu)^2$ p.s., et comme en fait

$$F_{N,M}(t, u) = \frac{\prod_{N \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t) q^k) - f(a_k(u) q^k))}{\prod_{N \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(a q^k)) \right|^2},$$

et que le dénominateur de cette expression tend vers une limite non nulle, puisque χ est dans \mathcal{H} , on a finalement

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{N \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t) q^k) - f(a_k(u) q^k)) \text{ existe } (d\mu)^2 \text{ p.s.}$$

Il est clair que cela revient à dire que

$$(*) \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{0 \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t) q^k) - f(a_k(u) q^k)) \text{ existe } (d\mu)^2 \text{ p.s.}$$

On notera F cette limite.

Réiproquement la validité de $(*)$ pour un caractère χ implique que χ est dans \mathcal{H} . En effet, si l'on définit F_M par

$$F_M(t, u) = \chi \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t) q^k) - f(a_k(u) q^k) \right),$$

comme $|F_M| = |F| = 1$, on voit que la forme linéaire continue définie sur l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_q^2 à valeurs dans \mathbb{C} , par

$$g \mapsto \int_{\mathbb{Z}_q^2} F.g \, d(\mu \otimes \mu)$$

n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, il existe un ouvert U tel que

$$\int_U F \, d(\mu \otimes \mu) \neq 0.$$

Mais un ouvert de \mathbb{Z}_q^2 est une réunion au plus dénombrable d'ouverts élémentaires de la forme $C_y(t) \times C_y(u)$, où l'on a défini

$$C_y(t) = \{u \in E ; u_y = t_y\}.$$

Il existe donc un ouvert élémentaire $W = C_y(t) \times C_y(u)$ pour lequel on a

$$\int_W F d(\mu \otimes \mu) \neq 0.$$

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_W F_M \neq 0.$$

La valeur de cette limite se calcule très facilement, et l'on a :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{y \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|^2 > 0.$$

Ceci montre que χ est dans \mathcal{H} .

On peut maintenant démontrer que \mathcal{H} est un groupe. En effet, si χ_1 et χ_2 sont dans \mathcal{H} , alors par (*)

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \chi_1 \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)q^k) - f(a_k(u)q^k) \right) \text{ existe } (d\mu)^2 \text{ p.s.,}$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \chi_2 \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)q^k) - f(a_k(u)q^k) \right) \text{ existe } (d\mu)^2 \text{ p.s.,}$$

et par conséquent, en effectuant le produit des deux expressions, on voit que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} (\chi_1 \cdot \chi_2) \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)q^k) - f(a_k(u)q^k) \right)$$

existe $(d\mu)^2$ p.s., ce qui signifie que $\chi_1 \cdot \chi_2$ est un élément de \mathcal{H} . Par ailleurs, si χ est dans \mathcal{H} , par (*) on voit immédiatement que $\bar{\chi} \in \mathcal{H}$.

Il en résulte que \mathcal{H} est un sous-groupe de \mathcal{G} , et on démontre que si $m(\mathcal{H})$ est non nulle, alors \mathcal{H} est ouvert. En effet, il existe alors K , un compact que l'on peut supposer symétrique, tel que $m(\mathcal{H} \cap K) > 0$; on note I_K la fonction caractéristique de $\mathcal{H} \cap K$. Alors, le carré de convolution de I_K est une fonction bien définie, continue, et strictement positive en 0. Par conséquent, $(K - K)$ contient un voisinage de 0, et \mathcal{H} est ouvert. Il est donc aussi fermé, (donc localement compact), et \mathcal{G}/\mathcal{H} est discret. Nous noterons H l'orthogonal de \mathcal{H} qui est compact puisque dual de \mathcal{G}/\mathcal{H} , qui est discret, et par conséquent G/H est localement compact. On a donc la proposition :

PROPOSITION 1. \mathcal{H} est un sous groupe de \mathcal{G} , et s'il est de mesure non nulle, il est ouvert dans \mathcal{G} .

Deuxième partie : \mathcal{H} est supposé de mesure non nulle.

En conservant les notations de la première partie, on a le résultat suivant (qui traduit la convergence essentielle de la suite $(T_H(f_y(t)))$) :

PROPOSITION 2. Soit T_H l'application canonique $G \rightarrow G/H$. Il existe une suite a_k dans G/H telle que la suite de variables aléatoires

$$\left[T_H(f_y(t)) - \sum_{k \leq y} a_k \right]_{y \in \mathbb{N}}$$

converge μ presque sûrement.

Preuve. On commence par remarquer que le fait que χ est dans \mathcal{H} équivaut à la convergence $\mu \otimes \mu$ presque sûre de la suite de fonctions $\chi(f_y(t) - f_y(u))$. Maintenant, comme G est métrisable et H compact, G/H est métrisable ([1], chap. 9, §3, prop. 4), et par conséquent, \mathcal{H} est dénombrable à l'infini ([14], p. 94, 2.3 (ii)). Alors l'espace produit $(E \times E \times \mathcal{H}, \mu \otimes \mu \otimes m)$ est σ -compact. Par application du théorème de Fubini, ([10], Part 1, Chap. 2, §8.2, corollary p. 186), on en déduit que $\mu \otimes \mu$ presque sûrement la suite $y \mapsto \chi(f_y(t) - f_y(u))$ converge m -presque partout, et par inversion de la transformation de Fourier ([14], p. 103 (iii), inversion theorem), on en déduit que $(f_y(t) - f_y(u))$ converge $\mu \otimes \mu$ presque sûrement. De même, le même théorème de Fubini appliqué sur $((E \times E), \mu \otimes \mu)$, qui est compact, donne que $d\mu$ presque sûrement en u , la suite $(f(t_y) - f(u_y))$ converge $d\mu$ presque sûrement en t . Par conséquent, il existe un u tel que $(f(t_y) - f(u_y))$ converge $d\mu$ presque sûrement en t . On choisit donc ce $u = (u_k)$ et $a_k = f(u_k q^k)$ modulo H . La proposition 2 est donc démontrée.

Troisième partie : Fin de la démonstration du théorème 1.

Rappelons les résultats suivants dus respectivement à Mendès France [12] et Delange [5] :

R1- si r est une fonction q -multiplicative de module 1, alors

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) \right| = \prod_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k) \right|;$$

R2- si r est une fonction q -multiplicative de module 1, et s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{M \leq k \leq x} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k) \right| > 0,$$

alors

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) = \prod_{k \leq [\frac{\log x}{\log q}]} \left(\frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k) \right) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

1/ cas où \mathcal{H} n'est pas négligeable.

La proposition 2 établie dans la deuxième partie donne la propriété 1 du premier cas du théorème 1. Pour ce qui est de la propriété 2, il suffit de remarquer que si χ est dans \mathcal{H} , il existe par définition M tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{M \leq k \leq x} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right| > 0,$$

et par R2,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) = \prod_{k \leq [\frac{\log x}{\log q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de G/H pour laquelle la conclusion de la proposition 2 est vérifiée, en posant

$$A_{[x]} = \sum_{0 \leq k \leq [\frac{\log x}{\log q}]} a_k,$$

on a :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \cdot \bar{\chi}(A_{[x]}) = \prod_{k \leq [\frac{\log x}{\log q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \cdot \bar{\chi}(A_{[x]}) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \cdot \chi(-A_{[x]}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{k \leq [\frac{\log x}{\log q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \cdot \bar{\chi}(A_{[x]}),$$

la limite à droite existant bien puisque χ est dans \mathcal{H} , et l'on voit que (par la proposition 2 et intégration)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) - A_{[x]}$$

existe, et, comme transformée de Fourier d'une mesure de probabilité, est continue sur \mathcal{H} . Un théorème classique de P. Lévy permet alors de conclure en disant que la suite de mesures

$$\frac{1}{[x]} \sum_{n \leq x} \mu_{n,x},$$

où $\mu_{n,x}$ est la mesure sur G/H consistant en une masse unité placée au point

$$(T_H(f(n))) - A_{[x]},$$

converge vaguement vers une mesure de probabilité ν .

2/ cas où \mathcal{H} est négligeable.

Etant donné un sous-groupe compact K de G , si \mathcal{K} dénote le dual de G/K , il est l'annulateur de K compact, et par conséquent, \mathcal{K} est ouvert, donc de mesure Haar non nulle. Si $T_K(f_y(t))$ converge essentiellement, il existe une suite A_y telle que pour tout χ de \mathcal{K} , la suite $\chi((f_y(t)) - A_y)$ converge $d\mu$ p.s., i.e.

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{0 \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t).q^k) - f(a_k(u).q^k)) \text{ existe } (d\mu)^2 \text{ p.s.}$$

Or, on a montré dans la première partie que cette relation $(*)$ implique que χ est dans \mathcal{H} , ce qui nous donne que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, et donc que $m(\mathcal{H}) > 0$ contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, il ne peut pas exister un sous-groupe compact K de G tel que $T_K(f_y(t))$ converge essentiellement, et comme G est métrisable et que K est compact, G/K est métrisable et par conséquent, $T_K(f_y(t))$ diverge essentiellement [15]. La propriété 2 du cas où \mathcal{H} est négligeable est donc établie.

Démontrons la propriété 1.

On suppose qu'il existe un sous-groupe compact K de G , une fonction u continue, réelle et à support compact telle que, pour une suite (A_n) dans G/K , on ait :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) > 0.$$

On peut toujours trouver une fonction réelle a telle que l'on ait $a \geq u$ et de transformée de Fourier \hat{a} intégrable. On a alors, en supposant les mesures normalisées,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a(T_K(f(n)) - A_{[x]}) = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left(\int_{\mathcal{G}} \hat{a}(\chi) \cdot \chi(T_K(f(n)) - A_{[x]}) d\chi \right),$$

et en majorant le dernier terme par

$$\int_{\mathcal{G}} |\hat{a}(\chi)| \cdot \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \right| d\chi,$$

tenant compte du fait que χ est un caractère de \mathcal{K} et que par conséquent

$$\frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \right| = \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \right|,$$

on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq \int_{\mathcal{G}} |\hat{a}(\chi)| \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \right| d\chi.$$

On en déduit, par un théorème de Fatou, que

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq \int_{\mathcal{G}} |\hat{a}(\chi)| \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \right| d\chi.$$

Comme

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) > 0,$$

on en déduit que sur un ensemble de mesure strictement positive, on a

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) \right| > 0,$$

et par R1, on obtient que la mesure de \mathcal{H} n'est pas nulle.

Le théorème 1 est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, deuxième édition, 1958, Hermann, Paris.
- [2] J. COQUET, *Sur la mesure spectrale des suites q -multiplicatives*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 163–170.
- [3] J. COQUET, *Répartition modulo 1 des suites q -additives*, Comment. Math. **21** (1980), 23–42.
- [4] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. math. France **105** (1977), 369–384.
- [5] H. DELANGE, *Sur les fonctions q -additives ou q -multiplicatives*, Acta Arithmetica **21** (1972), 285–298.
- [6] A. O. GELFOND, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données*, Acta Arithmetica **13** (1968), 259–265.
- [7] T. KAMAE, *Spectral properties of arithmetic functions*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, (18^e année, 1976/1977), fasc. 1, exp. 12, 8 pages (1977).
- [8] A. M. LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, éd. 2, 1808.
- [9] P. LÉVY, *L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence*, Bull. Soc. math. France **67** (1939), 1–41.
- [10] M. LOEVE, *Probability Theory I*, 4th ed. 1977, Springer, New-York.
- [11] J.-L. MAUCLAIRE, *Distribution of the values of an additive arithmetical function with values in a locally compact metrizable abelian group*, to appear.
- [12] M. MENDÈS FRANCE, *Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1*, J. Number Theory **5** (1973), 1–15.
- [13] M. QUEFFÉLEC, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. math. France **107** (1979), 385–421.
- [14] H. REITER, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford, Clarendon Press, 1968.
- [15] A. TORTRAT, *Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires*, Masson (1971).

J.-L. Mauclaire
 C.N.R.S, U.R.A. 212
 Théories géométriques
 Université Paris-VII
 Tour 45-55, 5^e étage,
 2, Place Jussieu
 75251 Paris Cedex 05