

JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

DIMITRIOS POULAKIS

Solutions entières de l'équation $Y^m = f(X)$

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 3, n° 1 (1991),
p. 187-199

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_187_0

© Université Bordeaux 1, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

Solutions entières de l'équation $Y^m = f(X)$.

par DIMITRIOS POULAKIS

Résumé — Soit K un corps de nombres. Dans ce travail nous calculons des majorants effectifs pour la taille des solutions en entiers algébriques de K des équations, $Y^2 = f(X)$, où $f(X) \in K[X]$ a au moins trois racines d'ordre impair, et $Y^m = f(X)$ où $m \geq 3$ et $f(X) \in K[X]$ a au moins deux racines d'ordre premier à m . On améliore ainsi les estimations connues ([2],[9]) pour les solutions de ces équations en entiers algébriques de K .

Abstract — Let K be a number field. In this work we give effective upper bounds for the size of solutions in algebraic integers of K , of equations $Y^2 = f(X)$, where $f(X) \in K[X]$ has at least three roots of odd order, and $Y^m = f(X)$ where $f(X) \in K[X]$ has at least two roots of order prime to m . We thus improve the known estimations ([2],[9]) for the solutions of these equations in algebraic integers of K .

1. Introduction.

Soit K un corps de nombres et A son anneau des entiers. On considère les équations

$$(I) \quad Y^2 = f(X)$$

où $f(X) \in K[X]$ a au moins trois racines d'ordre impair et

$$(II) \quad Y^m = f(X)$$

où $m \geq 3$ et $f(X) \in K[X]$ a au moins deux racines d'ordre premier à m .

Baker ([1]), dans le cas où $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, a calculé explicitement, en fonction de m et des coefficients de f , un majorant de la taille des solutions de (I) et (II) en entiers rationnels. Plus tard l'estimation de Baker a été améliorée par Sprindzuk ([8]). Trelina ([9]) et Brindza ([2]) ont donné des majorants effectifs pour la taille des solutions de (I) et (II) en S -entiers de K .

Dans ce travail nous calculons un majorant effectif pour la taille des solutions de (I) et (II) en entiers algébriques de K . Dans ce cas notre résultat est meilleur que ceux de Trelina, Brindza et Baker. En revanche dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, le résultat de Sprindzuk pour (I) est meilleur que le nôtre.

Soit $\mathbb{M}(K)$ l'ensemble canonique des valeurs absolues de K ([5] chapitre II §1). Soient $\underline{\underline{x}} = (x_0, \dots, x_n)$ un point de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(K)$ et $v \in \mathbb{M}(K)$; on note

$$|\underline{\underline{x}}|_v = \max\{|x_0|_v, \dots, |x_n|_v\}.$$

La quantité

$$H_K(\underline{\underline{x}}) = \prod_{v \in \mathbb{M}(K)} |\underline{\underline{x}}|_v^{d_v}$$

où d_v sont les degrés locaux, est appelée “hauteur” de $\underline{\underline{x}}$ (relativement à K) et la quantité

$$H(\underline{\underline{x}}) = H_K(\underline{\underline{x}})^{1/d}$$

où d est le degré de K , “hauteur absolue” de $\underline{\underline{x}}$. Si $f \in K[X]$ on définit $|f|_v$, $H_K(f)$, $H(f)$ en termes du vecteur des coefficients de f . Si $a \in K$ on note $H_K(a) = H_K(1, a)$ et $H(a) = H(1, a)$. Aussi pour z réel positif posons $\log^* z = \max(1, \log z)$. On notera D_K le discriminant de K . Nous montrons les résultats suivants :

THÉORÈME 1. Soit $f(X)$ un polynôme de $K[X]$ ayant au moins trois racines d'ordre impair. Alors si $(x, y) \in A \times A$ est une solution de l'équation $Y^2 = f(X)$ on a

$$\max\{H_K(x), H_K(y)\} < \exp\{c(d, n) W_1^{n^n} W_2^{dn^n}\}$$

où

$$W_1 = D_K^{12} H_K(f)^{1000d^2}, \quad W_2 = (\log^* |D_K|)^3 (\log^* H_K(f))^5$$

et

$$c(d, n) < 2^{300d^2 n^{2n}}.$$

THÉORÈME 2. Soit m un entier ≥ 3 $f(X)$ un polynôme de $K[X]$ ayant au moins deux racines d'ordre premier à m . Alors si $(x, y) \in A \times A$ est une solution de l'équation $Y^m = f(X)$ on a

$$\max\{H_K(x), H_K(y)\} < \exp\{c(d, n, m) W_1^{2m^4 n^n} W_2^{dm^3 n^n}\}$$

où

$$W_1 = |D_K|H_K(f)^{35md^2}, \quad W_2 = \log^* |D_K|(\log^* H_K(f))^2$$

et

$$c(d, n, m) < 2^{50m^5d^2n^{2n}}.$$

La méthode que nous utilisons est une généralisation de la méthode employée par Schmidt pour démontrer le théorème 2 de [6].

On va utiliser les notations habituelles suivantes. Soit k un corps de nombres. On note D_k son discriminant et R_k son régulateur. Si $a \in k$ on note $N_k(a)$ sa norme et $\lceil a \rceil$ la plus grande des valeurs absolues de ses conjugués. Aussi quand I est un idéal entier de k on note $N_k(I)$ sa norme.

Notre outil principal sera la proposition suivante :

PROPOSITION. Soient M un corps de nombres de degré m et m_1, m_2, m_3 des entiers algébriques non nuls de M tels que :

$$\max(\lceil m_1 \rceil, \lceil m_2 \rceil, \lceil m_3 \rceil) \leq A.$$

Alors chaque solution (u_1, u_2, u_3) , où u_1, u_2, u_3 sont des unités de M de l'équation :

$$m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3 = 0$$

satisfait :

$$\max\{\lceil u_1 \rceil, \lceil u_2 \rceil, \lceil u_3 \rceil\} \leq \exp\{(16(m+2)m)^{16m+14}(R_M \log^* R_M)^2(R_M + \log A)\}.$$

On peut consulter [3] pour une preuve de ce résultat.

2. Démonstration du Théorème 1

Soient L le corps de décomposition du polynôme f sur K et λ son degré ; alors on a

$$f(X) = a_0 \prod_{j=1}^s (X - e_j)^{t_j}.$$

Par hypothèse trois au moins des t_j , disons t_1, t_2, t_3 , sont impairs.

Soit δ le plus petit entier positif tel que les nombres $\delta^2 a_0, \delta^2 e_1, \dots, \delta^2 e_n$ soient entiers dans L . On multiplie les deux membres de l'équation $Y^2 = f(X)$ par $\delta^{2(n+1)}$ et on obtient l'équation :

$$V^2 = f'(U) = a_0 \delta^2 U^n + a_1 \delta^4 U^{n-1} + \dots + a_n \delta^{2(n+1)}$$

où $U = \delta^2 X$ et $V = \delta^{n+1} Y$. Aussi on a

$$H_K(f') \leq H_K(f) \delta^{2nd} \leq H_K(f)^{4d^2n+1}.$$

On est ramené ainsi au cas où a_0, e_1, \dots, e_n sont des entiers de K .

Soit x, y une solution de $Y^2 = f(X)$ en entiers de K avec $y \neq 0$. On peut écrire

$$(x - e_j) = I_j J_j^2 \quad (j = 1, 2, 3)$$

où I_j, J_j sont des idéaux entiers de L et I_j est sans facteur carré. Soit P un idéal premier divisant I_1 . Alors P divise $(y)^2$ avec un exposant impair ; il en résulte que P divise

$$(a_0 \prod_{j=2}^s (x - e_j)^{t_j}).$$

Donc ou bien $P|(a_0)$ ou bien il existe $j \neq 1$ tel que $P|(x - e_j)$. Dans ce dernier cas $P|(e_1 - e_j)$. Par conséquent on conclut que

$$I_1 \left| (a_0 \prod_{1 < j \leq s} (e_1 - e_j)) \right..$$

De même on obtient que

$$I_r \left| (a_0 \prod_{j \neq r} (e_r - e_j)) \quad (r = 2, 3). \right..$$

Donc

$$I_1 I_2 I_3 \left| (a_0^3 \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (e_i - e_j)^2 \prod_{i=1}^3 \prod_{j=i+1}^s (e_i - e_j)) \right..$$

On sait, d'après [5] chap. V §4, qu'il existe un idéal entier J'_j dans la classe de J_j tel que sa norme est $N_L(J'_j) \leq |D_L|^{1/2}$. Soit J''_j un idéal entier dans la classe inverse de celle de J'_j ; alors $J_j J''_j = (\xi_j)$, où ξ_j est un entier de L . On a donc

$$x - e_j = \eta_j \xi_j^2 \quad (j = 1, 2, 3)$$

où η_j est un entier de L tel que $(\eta_j) = I_j J'^2_j$.

Notons $\Delta = a_0^3 \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (e_i - e_j)^2 \prod_{i=1}^3 \prod_{j=i+1}^3 (e_i - e_j)$; on a

$$|N_L(\eta_1 \eta_2 \eta_3)| \leq |N_L(\Delta)| |D_L|^3.$$

Soit $M = L(\sqrt{\eta}_1, \sqrt{\eta}_2, \sqrt{\eta}_3)$; son degré est $m \leq 8\lambda$ et on note D_M son discriminant. Alors la formule de transitivité des discriminants donne

$$(1) \quad \begin{aligned} |D_M| &\leq 4^{12\lambda} D_L^8 N_L(\eta_1)^4 N_L(\eta_2)^4 N_L(\eta_3)^4 \\ &\leq 4^{12\lambda} D_L^{20} N_L(\Delta)^4. \end{aligned}$$

LEMME 1. Soient k un corps de nombres de degré ν et a un entier algébrique de k . Alors il existe un entier b et une unité ϵ de k tels que

$$a = b\epsilon$$

et

$$\boxed{b} \leq |N_k(a)|^{1/\nu} e^{c_1(\nu)R_k}$$

où $c_1(\nu) = \nu(6\nu^3 / \log \nu)^\nu$.

Démonstration. Il existe un ensemble d'unités fondamentales de k $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ tel que

$$(*) \quad \prod_{i=1}^r \max(\log \boxed{\epsilon_i}, 1) < c(\nu) R_k$$

où $c(\nu) = (6\nu^3 / \log \nu)^\nu$ ([3]).

Soient $a^{(i)}$ $i = 1, \dots, \nu$ les conjugués de a . Le nombre $(a^{(i)})^\nu / N(a)$ est une unité de k . Alors

$$(a^{(i)})^\nu / N(a) = \zeta(\epsilon_1^{(i)})^{\gamma_1} \dots (\epsilon_r^{(i)})^{\gamma_r}$$

où ζ est une racine de l'unité et $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ $i = 1, \dots, r$; d'où

$$\log(|a^{(i)}| / |N(a)|^{1/\nu}) = \sum_{j=1}^r (\gamma_j / \nu) \log |\epsilon_j^{(i)}|.$$

Soient $\lambda_i = [\gamma_i / \nu]$ $i = 1, 2, \dots, \nu$; considérons l'unité u de K avec

$$u^{(i)} = (\epsilon_1^{(i)})^{-\lambda_1} \dots (\epsilon_r^{(i)})^{-\lambda_r}.$$

Posons $b = au$. Alors

$$\begin{aligned} \log(|b^{(i)}|/|N(a)|^{1/\nu}) &\leq \sum_{j=1}^r \log|\epsilon_j^{(i)}| \\ &\leq rE \end{aligned}$$

où $E = \max_{1 \leq j \leq r} \{\log|\epsilon_j|\}$. On déduit donc de (*)

$$|b^{(i)}| \leq |N(a)|^{1/\nu} e^{rc(\nu)R_M} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

d'où le lemme 1.

Les nombres $\sigma_i = \sqrt{\eta_i} \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont des entiers de M . On a

$$e_i - e_j = \sigma_j^2 - \sigma_i^2 = (\sigma_j + \sigma_i)(\sigma_j - \sigma_i) \quad (i \neq j)$$

et

$$|N_M(\sigma_j \pm \sigma_i)| \leq |N_M(e_i - e_j)| \leq |N_M(\Delta)|.$$

Le lemme précédent entraîne alors que pour toute permutation cyclique (i, j, h) de $(1, 2, 3)$ on peut écrire

$$\sigma_j + \sigma_i = b_h \epsilon_h \quad \text{et} \quad \sigma_j - \sigma_i = g_h \delta_h$$

où ϵ_h, δ_h sont des unités de M et b_h, g_h des entiers de M avec

$$(2) \quad \max\{\lceil b_h \rceil, \lceil g_h \rceil\} < \frac{|N_L(\Delta)|^{1/\lambda} e^{c_1(\lambda)R_M}}{\lceil b_h \rceil \lceil g_h \rceil} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Le triplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_3)$ est une solution en unités de l'équation

$$b_1 X_1 - b_2 X_2 - g_3 X_3 = 0.$$

La proposition citée à l'introduction entraîne donc

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_3) < \exp\{c_2(\lambda)R_M^3(\log^* R_M)^2 \log^* |N_L(\Delta)|\}$$

où

$$c_2(\lambda) < \lambda^{280\lambda+30} 2^{1520\lambda+165}$$

La même inégalité est valable pour les quantités $H(\epsilon_2, \epsilon_3, \delta_1)$ et $H(\epsilon_3, \epsilon_1, \delta_2)$.

LEMME 2. Soient k un corps de nombres de degré ν et $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_p, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ des éléments de k avec $\alpha \neq 0$. Alors on a

$$H(\alpha, \beta_2, \dots, \beta_p, \gamma_2, \dots, \gamma_q) \leq H(\alpha, \beta_2, \dots, \beta_p)H(\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_q).$$

Démonstration. Pour tout $x \in k$ et $x \neq 0$ on a la formule du produit

$$\prod_{v \in M(k)} |x|_v^{\nu_v} = 1$$

où ν_v sont les degrés locaux ([5] page 99).

Il en résulte que si $x_0, x_1, \dots, x_n \in k$ et $x_0 \neq 0$ on a

$H_k(x_0, x_1, \dots, x_n) = H_k(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. On peut donc supposer que $\alpha = 1$. Alors pour tout $v \in M(k)$ on a

$$\begin{aligned} & \max\{1, |\beta_1|_v, \dots, |\beta_p|_v, |\gamma_1|_v, \dots, |\gamma_q|_v\} \\ & \leq \max\{1, |\beta_1|_v, \dots, |\beta_p|_v\} \max\{1, |\gamma_1|_v, \dots, |\gamma_q|_v\} \end{aligned}$$

d'où le lemme 2.

Le lemme 2 et la majoration pour $H(\epsilon_i, \epsilon_j, \delta_h)$ entraînent

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) < \exp\{3c_2(\lambda)R_M^3(\log^* R_M)^2 \log^* |N_L(\Delta)|\}.$$

En particulier on a

$$(3) \quad H(\epsilon_1, \delta_1) < \exp\{3c_2(\lambda)R_M^3(\log^* R_M)^2 \log^* |N_L(\Delta)|\}.$$

Des majorations (2) et (3) on déduit

$$(4) \quad \begin{aligned} H_M(1, b_1 \epsilon_1 / g_1 \delta_1) & \leq H_M(1, b_1 / g_1) H_M(1, \epsilon_1 / \delta_1) \\ & \leq \exp\{9c_2(\lambda)R_M^3(\log^* R_M)^2 \log^* |N_L(\Delta)|\}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in M$ notons $x^{(t)}$ ($t = 1, \dots, m$) ses conjugués. Alors (4) entraîne

$$|(b_1 \epsilon_1)^{(t)}| / |(g_1 \delta_1)^{(t)}| < \exp\{c_5(\lambda)T_1 \log^* T_1\} = C.$$

Il en résulte

$$(5) \quad \begin{aligned} |(b_1 \epsilon_1)^{(t)}|^2 & < C|(b_1 \epsilon_1 g_1 \delta_1)^{(t)}| \\ & < C|e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|. \end{aligned}$$

Comme $H_M(1, b_1\epsilon_1/g_1\delta_1) = H_M(1, g_1\delta_1/b_1\epsilon_1)$, on déduit de même que

$$(6) \quad |(g_1\delta_1)^{(t)}|^2 < C|e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|.$$

On a

$$x - e_3 = \sigma^2 = \frac{1}{4}(g_1\delta_1 + b_1\epsilon_1)$$

Alors (5) et (6) entraînent

$$(7) \quad |(x - e_3)^{(t)}| < C|e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|.$$

On sait d'après un résultat de Siegel ([7]), que

$$R_M < c_3(m)|D_M|^{1/2}(\log^* |D_M|)^{m-1}$$

où

$$c_3(m) = 3m^2[e/(m-1)]^{m-1}.$$

Il en résulte

$$(8) \quad |(x - e_3)^{(t)}| < |e_2^{(t)} - e_3^{(t)}| \times \\ \times \exp\{c_4(\lambda)D_L^{30}N_L(\Delta)^6(\log^* |D_L| \log^* |N_L(\Delta)|)^{24\lambda-1}\}$$

où

$$c_4(\lambda) < \lambda^{300\lambda+40} 2^{1750\lambda+210}$$

Considérons le polynôme $g(X) = \prod_{i=1}^s (X - e_i)$ et notons $D(g)$ son discriminant. Alors on a

$$(9) \quad N_L(\Delta) \leq |N_L(D(g))| \leq (s!s^s)^\lambda H_L(g)^{2s-2} \\ \leq 4^{n^2\lambda} (n!n^n)^\lambda H_L(f)^{2n-2}.$$

(la dernière inégalité résulte de [4] chap. 3 proposition 2.4).

On a aussi

$$(10) \quad |e_2^{(t)}|, |e_3^{(t)}| < nH_L(f).$$

LEMME 3. On a $D_L \leq (s!s^s)^{\lambda ss!} 4^{s^2\lambda} D_K^{s!} H_K(g)^{2(s-1)s!}$.

Démonstration.

Posons $L_i = K(e_1, \dots, e_i)$ et $g_i(X) = (X - e_i) \dots (X - e_s)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) ; alors $L_{s-1} = L_s = L$ et $g(X) = g_1(X)$. La formule de transitivité des discriminants et [5] III, prop. 13 donnent :

$$|D_{L_1}| \leq |D_K|^s |N_K(D_{L_1/K})| \leq |D_K|^s |N_K(D(g))|,$$

$$|D_{L_2}| \leq |D_{L_1}|^{s-1} |N_{L_1}(D_{L_2/L_1})| \leq |D_{L_1}|^{s-1} |N_{L_1}(D(g_2))|,$$

.....

$$|D_{L_{s-2}}| \leq |D_{L_{s-3}}|^3 |N_{L_{s-3}}(D_{L_{s-2}/L_{s-3}})| \leq |D_{L_{s-3}}|^3 |N_{L_{s-3}}(D(g_{s-2}))|$$

$$|D_L| \leq |D_{L_{s-2}}|^2 |N_{L_{s-2}}(D_{L/L_{s-2}})| \leq |D_{L_{s-2}}|^2 |N_{L_{s-2}}(D(g_{s-1}))|.$$

On a donc

$$|D_L| \leq |D_K|^{s!} |N_K(D(g))|^{(s-1)!} |N_{L_1}(D(g_2))|^{(s-2)!} \dots$$

$$\dots |N_{L_{s-3}}(D(g_{s-2}))|^2 |N_{L_{s-2}}(D(g_{s-1}))|$$

$$\leq (s!s^s)^{\lambda ss!} |D_K|^{s!} H_K(g)^{2(s-1)(s-1)!} H_{L_1}(g_2)^{2(s-2)(s-2)!} \dots$$

$$\dots H_{L_{s-3}}(g_{s-2})^8 H_{L_{s-2}}(g_{s-1})^2.$$

Comme $H_{L_j}(g_{j+1}) \leq 4^{s\lambda} H_K(g)^{\frac{s!}{(s-j)!}}$, on obtient

$$|D_L| \leq (s!s^s)^{\lambda ss!} 4^{s^2\lambda} |D_K|^{s!} H_K(g)^{2(s-1)s!}.$$

Alors le lemme 3, les majorations (8), (9), (10) et l'inégalité $n! < e(\frac{n}{2})^n$ entraînent le résultat.

3. Démonstration du théorème 2.

Soient L le corps de décomposition du polynôme f et λ son degré ; on a

$$f(X) = a_0 \prod_{j=1}^s (X - e_j)^{t_j}.$$

Par hypothèse deux au moins des t_j , soient t_1, t_2 , sont premiers à m . Comme dans la démonstration du théorème 1 on se ramène au cas où a_0, e_1, \dots, e_s sont des entiers de L .

Soit x, y une solution de $Y^m = f(X)$ en entiers de K . On peut écrire

$$(x - e_j) = I_j J_j^m \quad (j = 1, 2)$$

où I_j, J_j sont des idéaux entiers de L et I_j n'est divisible par aucune puissance m -ième d'un idéal premier.

Soit P un idéal premier divisant I_1 . Alors P divise $(x - e_1)$ avec un exposant $< m$. Comme $(t_1, m) = 1$ et que

$$y^m = (x - e_1)^{t_1} a_0 \prod_{i \neq 1} (x - e_i)^{t_i},$$

il en résulte que P divise $(a_0 \prod_{i \neq 1} (x - e_i)^{t_i})$.

Donc ou bien $P|(a_0)$ ou bien il existe $i \neq 1$ tel que $P|(x - e_i)$. Dans ce dernier cas on a $P|(e_i - e_1)$. On a donc que

$$I_1 \left| \left(a_0 \prod_{i=2}^s (e_1 - e_i) \right)^m. \right.$$

De même on a

$$I_2 \left| \left(a_0 \prod_{i \neq 2}^s (e_2 - e_i) \right)^m. \right.$$

Alors

$$I_1 I_2 |(\Delta)$$

$$\text{où } \Delta = (a_0^2 (e_1 - e_2)^2 \prod_{i=3}^s (e_1 - e_i) \prod_{i=1}^s (e_2 - e_i))^m.$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, il existe des entiers η_j, ξ_j ($j = 1, 2$) tels que

$$x - e_j = \eta_j \xi_j^m \quad (j = 1, 2)$$

et

$$(1) \quad N_L(\eta_1 \eta_2) \leq N_L(\Delta) D_L^2.$$

Soit $M = L(\zeta, \sqrt[m]{\eta_1}, \sqrt[m]{\eta_2})$, où ζ est une racine primitive m -ième de l'unité ; son degré est $\mu < \lambda \varphi(m)m^2$ où φ est la fonction d'Euler.

LEMME 4. *On a*

$$D_M \leq m^{3\lambda m^2 \varphi(m)} D_L^{m^2 \varphi(m)(2m-1)} N_L(\Delta)^{(m-1)m^2 \varphi(m)}.$$

Démonstration. Soient $L_1 = L(\zeta)$ et $L_2 = L_1(\sqrt[m]{\eta_1})$. On a

$$D_{L_1} \leq D_L^{\varphi(m)} |N_L(D_{L_1/L})| \leq D_L^{\varphi(m)} m^{\lambda \varphi(m)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_{L_2} &\leq D_{L_1}^m |N_{L_1}(D_{L_2/L_1})| \leq D_{L_1}^m |N_{L_1}(N_{L_2/L_1}(m\eta_1^{m-1}))| \\ &\leq D_{L_1}^m m^{\lambda m \varphi(m)} N_{L_2}(\eta_1)^{m-1} \leq D_L^{m\varphi(m)} m^{2\lambda m \varphi(m)} N_L(\eta_1)^{(m-1)m\varphi(m)}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} D_M &\leq D_{L_2}^m |N_{L_2}(D_{M/L_2})| \leq D_{L_2}^m m^{\lambda m^2 \varphi(m)} N_{L_2}(\eta_2)^{m-1} \\ &\leq D_L^{m^2 \varphi(m)} m^{3\lambda m^2 \varphi(m)} [N_L(\eta_1) N_L(\eta_2)]^{(m-1)m^2 \varphi(m)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Posons $\sigma_i = \xi_i \sqrt[m]{\eta_i}$ ($i = 1, 2$). On élimine x et on a

$$\sigma_1^m - \sigma_2^m = e_2 - e_1.$$

Alors

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \zeta \sigma_2) \dots (\sigma_1 - \zeta^{m-1} \sigma_2) = e_2 - e_1.$$

Comme $m \geq 3$, il existe des entiers de K $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ avec $\delta_j | e_2 - e_1$ ($j = 1, 2, 3$) et des unités e_1, e_2, e_3 tels que

$$(2) \quad \sigma_1 - \zeta^j \sigma_2 = \epsilon_j \delta_j \quad (j = 0, 1, 2).$$

D'après le lemme 1 du §2 on peut supposer que

$$(3) \quad \lceil \delta_j \rceil < |N_M(\delta_j)|^{1/\mu} \exp(c_1(\mu)R_M).$$

On élimine σ_1 et σ_2 entre les trois équations (2) en multipliant la j -ième équation par $\zeta^k - \zeta^l$ avec $\{j, k, l\} = \{0, 1, 2\}$:

$$\epsilon_1 \delta_1 (\zeta^2 - \zeta) + \epsilon_2 \delta_2 (1 - \zeta^2) + \epsilon_3 \delta_3 (\zeta - 1) = 0.$$

On a :

$$\max(\lceil \delta_1(\zeta_3 - \zeta_2) \rceil, \lceil \delta_2(\zeta_1 - \zeta_3) \rceil, \lceil \delta_3(\zeta_2 - \zeta_1) \rceil) < 2 \exp\{c_1(m)R_M\} N_M(\Delta).$$

Par conséquent la proposition citée à la fin de l'introduction implique :

$$(4) \quad \max\{\lceil \epsilon_1 \rceil, \lceil \epsilon_2 \rceil, \lceil \epsilon_3 \rceil\} < \exp\{c_5(\lambda, m)R_M^3 (\log^* R_M)^2 \log^* |N_M(\Delta)|\}$$

où

$$c_5(\lambda, m) < (8\lambda m^3)^{35\lambda m^3 + 30}.$$

Il résulte donc de (3) et (4) que

$$(5) \quad H(\epsilon_1 \delta_1, \epsilon_2 \delta_2) < \exp\{3mc_5(\lambda, m)R_M^3(\log^* R_M)^2 \log^* |N_M(\Delta)|\} = C.$$

D'autre part on déduit de (2) que

$$\sigma_2 = \frac{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2}{\zeta - 1} \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \frac{\epsilon_1 \delta_1 \zeta - \epsilon_2 \delta_2}{\zeta - 1}.$$

Alors on a

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_1 \delta_1 \zeta - \epsilon_2 \delta_2}{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2} \sigma_2.$$

Cela entraîne

$$\sigma_2^m \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{\epsilon_1 \delta_1 \zeta - \epsilon_2 \delta_2}{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2} - \zeta^j \right) = e_2 - e_1$$

et on a

$$H(\sigma_2^m) \leq H(e_2 - e_1) H(\Phi(\frac{\zeta \epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2}{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2})),$$

où $\Phi(X) = \prod_{j=0}^{m-1} (X - \zeta^j)$. Alors (5) entraîne

$$\begin{aligned} H(\Phi(\frac{\zeta_1 \epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2}{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2})) &\leq (m+1) H(\frac{\zeta_1 \epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2}{\epsilon_1 \delta_1 - \epsilon_2 \delta_2})^m \\ &\leq 2^m (m+1) C^m. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(x) &\leq 2H(x - e_2) H(e_2) \\ &\leq 2^{m+1} H(e_2 - e_1) H(e_2) (m+1) C^m \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad H_{L.}(X) < n^{3\lambda} 2^{(m+1)\lambda} (m+1)^\lambda C^{m\lambda} H_{L.}(f)^3.$$

La majoration

$$R_M < c_3(\mu) |D_M|^{\frac{1}{2}} (\log^* |D_M|)^{\mu-1}$$

la majoration (9) du §2 et le lemme 4 entraînent

$$(7) \quad R_M < c_6(\lambda, m, n) |D_{L.}|^{m^4} H_{L.}(f)^{m^4(n-1)} (\log^* |D_{L.}| \log^* H_{L.}(f))^{\lambda m^3 - 1}.$$

où

$$c_6(\lambda, m, n) < \lambda^{\lambda m^3 + 1} m^{3n^2 m^4} \lambda n^{3nm^4}.$$

On en déduit

(8)

$$H_L(X) \leq \exp\{c_7(\lambda, m, n)|D_L|^{3m^4} H_L(f)^{3m(n-1)} (\log^* |D_L| \log^* H_L(f))^{3\lambda m^3}\}.$$

où

$$c_7(\lambda, m, n) < 2^{20\lambda m^4 n^3} \lambda^{45\lambda m^3} m^{20\lambda n^2 m^4} n^{15m^4 \lambda n^2 n!}.$$

Alors (8) et le lemme 3 entraînent la majoration annoncée dans le théorème 2.

RÉFÉRENCES

- [1] A. BAKER, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **65** (1969), 439–444.
- [2] B. BRINDZA, *On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$* , Acta Math. Hung. **44** (1984), 133–139.
- [3] K. GYORY, *On the solutions of linear diophantine equations in Algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Budapest Eotvos, Sect. Math. 22-23 (1979-80), 225-233.
- [4] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag (1983).
- [5] S. LANG, *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley (1970).
- [6] W. SCHMIDT, *Integer points on curves of genus 1 (à paraître)*.
- [7] C.L. SIEGEL, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akd. Wiss. Göttingen Math. Phys. K1 **II** (1969), 71–86.
- [8] V.G. SPRINDZUK, *A hyperelliptic diophantine equation and class numbers (in Russian)*, Acta Arith. **30** (1976), 95–108.
- [9] L.A. TRELINA, *On S-integral solutions of the hyperelliptic equation (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk BSSR (1978), 881–884.

Université de Thessalonique
 Département de Mathématiques
 54006 THESSALONIQUE
 GRÈCE.