

HASSAN OUKHABA

GILLES ROBERT

**Étude d'un idéal particulier, d'indice fini dans le carré  
de l'idéal d'augmentation, associé à un caractère  
de Dirichlet d'un groupe fini**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 3, n° 1 (1991),  
p. 117-127

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1991\\_\\_3\\_1\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_117_0)

© Université Bordeaux 1, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Étude d'un idéal particulier,  
d'indice fini dans le carré de  
l'idéal d'augmentation, associé  
à un caractère de Dirichlet  
d'un groupe fini.**

par HASSAN OUKHABA ET GILLES ROBERT

**Abstract** — We describe here two sets of generators of an ideal  $\Delta(\psi) = M(\psi)$ , of finite index inside the square  $I^2$  of the augmentation ideal  $I$  of  $\mathbb{Z}[G]$ , associated to the Dirichlet character  $\psi$  of the finite group  $G$ .

*That peculiar ideal first appeared in questions related to the computation of class number formulas for abelian non ramified extensions of  $\mathbb{A}$ -fields cf. [2] and [3], satisfying certain special conditions which are outlined in the introduction of [1].*

*A rough idea of these formulas is given in §§2 and 6.*

## Introduction

Soit  $\mu$  un entier  $> 0$ , et  $G$  un groupe fini. Soit  $I$  l'idéal d'augmentation de l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[G]$ . On donne ici deux descriptions d'un idéal  $\Delta(\psi)$  contenu dans  $I^2$ , et associé à un caractère de Dirichlet

$$\psi : G \rightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times .$$

La seconde (cf.th.2) se rencontre dans deux situations où cet idéal  $\Delta(\psi)$  apparaît naturellement : celle datant d'il y a environ 12 ans envisagée par D. Kersey dans [2], chap. 9, §4.5, et celle plus récente envisagée par H. Oukhaba [3]. Le groupe  $G$  est alors abélien et l'application  $\psi$  définie par la norme, via l'isomorphisme de réciprocity d'Artin, cf. §§2 et 6 ci-dessous.

---

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). 11.

*Mots clefs*: Groupe fini, congruence, caractère de Dirichlet, formule pour le nombre de classes.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1991 .

Quant à la première description (*cf.* th.1), adoptée ici comme définition de  $\Delta(\psi)$ , elle rend commode le calcul de son indice  $[I^2 : \Delta(\psi)]$  dans  $I^2$ . Celui-ci apparaît dans les calculs des formules pour le nombre de classes considérées dans [2] et [3] *cf.* aussi §6 ci-dessous.

1) Soit  $\mu$  un entier  $> 0$ , et  $G$  un groupe fini. On considère un homomorphisme  $\psi : G \rightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$ , et on note

$$\Psi : \psi(G) \rightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$$

l'homomorphisme injectif induit par  $\psi$ .

Pour un certain diviseur positif  $\nu$  de  $\mu$ , le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les nombres  $\psi(c) - 1$ ,  $c \in G$ , regardés dans  $\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ , est de la forme

$$\nu\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}.$$

L'entier  $\nu$  ne dépend que de  $\Psi$ .

Dans l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[G]$ , formé des sommes  $\sum_{c \in G} n_c(c)$ ,  $n_c \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$\begin{aligned} [c, c'] &\stackrel{\text{dfn}}{=} ((1) - (c)).((1) - (c')) \\ &= (1) + (cc') - (c) - (c') \end{aligned}$$

pour tous  $c, c' \in G$ .

*Remarques.* i) Soit  $I \subseteq \mathbb{Z}[G]$  l'idéal d'augmentation de  $\mathbb{Z}[G]$ , défini par  $\sum n_c = 0$ . Lorsque  $c$  et  $c'$  parcourent  $G$ , l'idéal  $I^2$  est engendré par les  $[c, c']$ .

ii) On a  $[c, c'] = [c', c]$  si et seulement si  $c$  et  $c'$  commutent entre eux.

DÉFINITION. On désigne par  $\Delta(\psi)$  le sous-module de  $\mathbb{Z}[G]$  formé des sommes

$$\sum_{c, c' \in G} n_{c, c'} [c, c']$$

où les entiers rationnels  $n_{c, c'}$  vérifient la congruence

$$(1) \quad \sum_{c, c' \in G} n_{c, c'} \left( \frac{\psi(c) - 1}{\nu} \right) \left( \frac{\psi(c') - 1}{\nu} \right) \equiv 0 \quad (\mu/\nu).$$

Vu les formules ci-dessous de multiplicativité à gauche et à droite

$$(2) \quad \begin{cases} (c_0)[c, c'] = [c, c'] + [c_0, cc'] - [c_0, c] - [c_0, c'] \\ [c, c'](c_0) = [c, c'] + [cc', c_0] - [c, c_0] - [c', c_0], \end{cases}$$

le module  $\Delta(\psi)$  est un idéal bilatère de  $\mathbb{Z}[G]$ . En effet la valeur du membre de gauche de (1) pour chacune des expressions trouvées dans le membre de droite de (2) est

$$\psi(c_0) \left( \frac{\psi(c) - 1}{\nu} \right) \left( \frac{\psi(c') - 1}{\nu} \right).$$

Plus généralement, il vient :

THÉORÈME 1. *L'application  $i_\psi$ , définie par*

$$(3) \quad i_\psi([c, c']) = \left( \frac{\psi(c) - 1}{\nu} \right) \left( \frac{\psi(c') - 1}{\nu} \right) \quad (\mu/\nu)$$

*et prolongée par linéarité à  $I^2$ , est un homomorphisme bien défini de  $I^2$  d'image le groupe additif  $\mathbb{Z}/(\mu/\nu)\mathbb{Z}$ .*

*En particulier, l'indice  $[I^2 : \Delta(\psi)]$  de  $\Delta(\psi)$  dans  $I^2$  vaut  $\mu/\nu$ .*

*Preuve.* Soit  $s$  une section de  $(\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$  dans  $(\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z})^\times$ , et définissons un homomorphisme  $\tilde{\psi}$  de  $G$  dans  $(\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z})^\times$  par  $\tilde{\psi} = s \circ \psi$  de sorte que l'on a

$$\tilde{\psi}(c) \equiv \psi(c) \pmod{\mu}$$

pour tous  $c \in G$ .

La valeur de  $i_\psi$  en  $[c, c']$  peut encore s'écrire

$$\left( \frac{\tilde{\psi}(c) - 1}{\nu} \right) \left( \frac{\tilde{\psi}(c') - 1}{\nu} \right) \quad (\mu/\nu).$$

Par suite, on a

$$\nu^2 i_\psi([c, c']) \equiv (\tilde{\psi}(c) - 1)(\tilde{\psi}(c') - 1) \pmod{\nu\mu}.$$

Ceci assure que  $\nu^2 i_\psi$  est la restriction à  $I^2$  de l'homomorphisme induit par  $\tilde{\psi}$

$$\sum n_c(c) \longmapsto \sum n_c \tilde{\psi}(c)$$

de  $\mathbb{Z}[G]$  dans le groupe additif  $\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que  $i_\psi$  est bien défini (et ne dépend pas du choix de la section  $s$ ).

D'autre part l'application  $i_\psi$  est surjective : en effet, il existe par définition des entiers  $n_c$ ,  $c \in G$ , tels que

$$\sum_{c \in G} n_c(\psi(c) - 1) = \nu \quad (\mu)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sum n_c n_{c'} \left( \frac{\psi(c)-1}{\nu} \right) \left( \frac{\psi(c')-1}{\nu} \right) \\ = \left( \sum n_c \frac{\psi(c)-1}{\nu} \right) \left( \sum n_{c'} \frac{\psi(c')-1}{\nu} \right) \equiv 1(\mu/\nu). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'image par  $i_\psi$  de la somme

$$\sum_{(c,c')} n_c n_{c'} [c, c']$$

prise sur les couples  $(c, c') \in G \times G$  engendre  $\mathbb{Z}/(\mu/\nu)\mathbb{Z}$ . Le théorème est démontré.

**2)** On décrit ici deux situations où le module  $\Delta(\psi)$  apparaît naturellement.

*i) Le cas quadratique imaginaire*

Soient  $K$  un corps quadratique imaginaire et  $F$  une extension abélienne, non ramifiée, de celui-ci. Alors, le groupe noté  $\Delta(c_0, w w_F)$  dans D. Kubert & S. Lang [2] chap.9, §4.5, – regardé comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module avec  $G = \text{Gal}(F/K)$  – est le cas particulier du module  $\Delta(\psi)$  lorsque  $\psi = \psi_F$  est le caractère associé à la norme décrit plus bas.

*ii) Le cas des corps de fonctions*

Soit  $k$  un corps de fonctions à une variable de corps résiduel fini. Fixons une place de  $k$ , notée  $\infty$ , et soit  $F$  une extension abélienne, totalement décomposée au-dessus de la place  $\infty$  et non ramifiée, de  $k$ . Alors, le groupe noté  $\Delta_F(1, w_k w_F)$  dans H. Oukhaba [3] – regardé comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module avec  $G = \text{Gal}(F/k)$  – est le cas particulier du module  $\Delta(\psi)$  lorsque  $\psi = \psi_F$  est le caractère associé à la norme décrit ci-dessous.

iii) *Descriptions de  $\psi_F$*

Dans les deux cas l'entier  $\mu$  est le nombre de racines de l'unité  $w_F$  de  $F$ .

On a la définition suivante de  $\psi_F$  : soit  $A$  l'anneau des entiers de  $K$  (resp. l'anneau des fonctions de  $k$  partout entières sauf en la place  $\infty$ ). Alors, pour chaque élément  $\mathfrak{c}$  du groupe de classes d'idéaux de  $K$  (resp.  $k$ ) associé à  $F$ , on a

$$\psi_F(\sigma_{\mathfrak{c}}) \equiv N\mathfrak{b} \pmod{w_F}$$

où  $\sigma_{\mathfrak{c}}$  est l'élément de  $G$  associé à  $\mathfrak{c}$  par l'application de réciprocité d'Artin,  $\mathfrak{b}$  est un idéal de  $A$  premier à  $w_F A$  et dont la classe appartient à  $\mathfrak{c}$ , et  $N\mathfrak{b} = |A/\mathfrak{b}|$ .

L'entier  $\nu$  tel que  $\nu|\mu$  est alors égal au nombre de racines de l'unité  $w$  du corps  $K$  (resp.  $k$ ).

3) Soit  $\mathcal{S}(\psi)$  l'ensemble des sommes

$$\sum_{c \in G} n_c [c, c'], \quad c' \in G,$$

où les entiers rationnels  $n_c$  vérifient la congruence

$$(4) \quad \sum_{c \in G} n_c \left( \frac{\psi(c) - 1}{\nu} \right) \equiv 0 \pmod{\mu/\nu}$$

et considérons le sous-module  $M(\psi)$  de  $\mathbb{Z}[G]$  engendré comme  $\mathbb{Z}$ -module par les éléments de  $\mathcal{S}(\psi)$ .

LEMME 1. *La congruence (4) assure que la congruence (1) est bien vérifiée de sorte que l'on a l'inclusion*

$$M(\psi) \subseteq \Delta(\psi).$$

*Preuve.* Immédiate.

La vérification des deux lemmes suivants est laissée au lecteur :

LEMME 2. *Le module  $M(\psi)$  est un idéal bilatère de  $\mathbb{Z}[G]$ .*

Soit  $\pi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[\psi(G)]$  la projection naturelle induite par  $\psi$ . On a :

LEMME 3. Les idéaux  $M(\psi)$  et  $\Delta(\psi)$  de  $\mathbb{Z}[G]$  sont respectivement les images inverses par  $\pi$  des idéaux  $M(\Psi)$  et  $\Delta(\Psi)$  de  $\mathbb{Z}[\psi(G)]$ .

De plus, on a le lemme suivant dont des variantes ont déjà été notées (dans le cas de  $\Delta(c_0, w_H)$ ) par Donald Kersey, cf. [2] loc. cit. pp.221-222.

LEMME 4. Soient  $c, d$  et  $e$  des éléments de  $G$ . On a l'égalité

$$(5) \quad [c, de] - [c, d] = [cd, e] - [d, e].$$

*Preuve.* Résulte de l'écriture explicite des deux membres de (5).

On en déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 2. Pour tout groupe fini  $G$  et tout caractère de Dirichlet

$$\psi : G \rightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$$

on a  $M(\psi) = \Delta(\psi)$ .

*Preuve.* On va localiser la question. Pour cela, pour chaque nombre premier  $\ell$ , soit  $\mu^{(\ell)}$  la plus grande puissance de  $\ell$  divisant  $\mu$ . On décompose  $\psi$  en produit de facteurs  $\psi_\ell$ ,  $\ell$  premier, de sorte que

$$\psi = \prod_{\ell} \psi_\ell$$

où  $\psi_\ell$  désigne le composé de  $\psi$  avec la projection canonique de  $\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/\mu^{(\ell)}\mathbb{Z}$ .

Soit  $\nu^{(\ell)}$  le diviseur  $> 0$  de  $\mu^{(\ell)}$  engendré par les éléments  $\psi_\ell(c) - 1$ ,  $c \in G$ . Il est aisé de vérifier que

$$\nu = \prod_{\ell} \nu^{(\ell)}$$

et donc que

$$i_\psi = \prod_{\ell} i_{\psi_\ell},$$

où  $i_{\psi_\ell}$  désigne l'application associée à  $\psi_\ell$  définie par l'analogie pour  $\psi_\ell$  de la formule (3) du th.1.

Par suite, comme on peut écrire

$$1 = \sum_{\ell|\mu} a(\ell)(\mu/\nu)(\mu^{(\ell)}/\nu^{(\ell)})^{-1}$$

pour des coefficients entiers rationnels  $a(\ell)$  convenables, l'égalité  $M(\psi) = \Delta(\psi)$  sera prouvée, si l'on peut démontrer que l'on a

$$M(\psi_\ell) = \Delta(\psi_\ell), \ell \text{ premier,}$$

pour chaque homomorphisme non trivial  $\psi_\ell : G \rightarrow (\mathbb{Z}/\mu^{(\ell)}\mathbb{Z})^\times$ .

Or, si  $\ell$  est impair le groupe  $\psi_\ell(G)$  est cyclique, tandis que si  $\ell = 2$  le groupe  $\psi_\ell(G)$  est ou bien cyclique ou bien de la forme  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{t-1}$  avec  $t \geq 2$ .

Le théorème résulte alors de l'analyse faite dans les deux §§ suivants.

**4) PROPOSITION 1.** *Soit  $G$  un groupe fini, et  $\mathcal{N} \subseteq G$  un sous-groupe cyclique de générateur  $a$  et d'ordre  $|\mathcal{N}|$ .*

*Alors les crochets  $[c, a^j]$  avec  $c \in G \setminus \{1\}$  et  $1 \leq j \leq |\mathcal{N}| - 1$ , sont des combinaisons linéaires des crochets  $[c, a]$  avec  $c \in G \setminus \{1\}$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{U} = \{[c, a] | c \in G \setminus \{1\}\}$ . Il résulte de l'égalité (5) du lemme 4, que l'on a

$$[c, a^j] - [c, a^{j-1}] = [ca^{j-1}, a] - [a^{j-1}, a];$$

ainsi le terme  $[c, a^j]$  peut être écrit comme une combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{U}$  et d'un terme  $[c, a^{j-1}]$ ; on conclut par récurrence.

**COROLLAIRE.** *Si le groupe  $\psi(G)$  est cyclique, alors on a*

$$M(\psi) = \Delta(\psi)$$

*Preuve.* D'après le lemme 3, on peut supposer que  $\psi = \Psi$ , i.e.  $G = \psi(G)$ .

Soit alors  $N$  l'ordre de  $G$ , et désignons par  $a$  un générateur de celui-ci. D'après la proposition précédente le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les  $[c, c']$ , pour  $c$  et  $c'$  dans  $G$ , est combinaison linéaire sur  $\mathbb{Z}$  des  $N - 1$  éléments

$$[a^i, a], 1 \leq i \leq N - 1 .$$



De plus, comme

$$\frac{\psi(a^i) - 1}{\nu} = (\psi(a^{i-1}) + \dots + 1) \frac{\psi(a) - 1}{\nu},$$

on voit que le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les  $\psi(c) - 1/\nu$ ,  $c \in G$ , est engendré par  $\psi(a) - 1/\nu$ . Par suite, ce dernier quotient est premier à  $\mu/\nu$ , si bien que la condition (1) pour la somme

$$\sum_{c \in G} n_c [c, a]$$

assure que celle-ci appartient à  $\mathcal{S}(\psi)$ , i.e. la condition (4) est vérifiée.

**5) PROPOSITION 2.** *Si le caractère de Dirichlet  $\psi$  prend ses valeurs dans  $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$ ,  $r$  entier, et si le groupe  $\psi(G)$  est de la forme  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{t-1}$ ,  $t \geq 2$ , alors on a*

$$M(\psi) = \Delta(\psi).$$

*Preuve.* Observons d'abord que l'on a  $\nu \geq 2$ ; de plus l'hypothèse faite sur le sous-groupe  $\psi(G)$  de  $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$  impose  $\nu = 2$ . Notons aussi que d'après le lemme 3, on peut supposer que  $\psi = \Psi$ , i.e.  $G = \psi(G)$ .

Considérons d'une part l'application

$$c \mapsto \frac{\psi(c) - 1}{2} \pmod{2}$$

à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2$ . Il s'agit d'un homomorphisme surjectif comme on le voit facilement. Soit  $H$  son noyau. Considérons d'autre part le groupe des éléments d'ordre 2 de  $G$ , isomorphe à  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  vu l'hypothèse faite sur  $\psi(G) = G$ . Or l'équation  $x^2 \equiv 1 \pmod{2^r}$ , avec  $r \geq 3$ , admet pour solutions

$$x \equiv \pm 1 \pmod{2^{r-1}}$$

de sorte que  $H$  ne contient qu'un élément d'ordre 2. Ainsi  $H$  est cyclique.

Soient alors  $b$  un générateur de  $H$ , et  $\tau$  un élément d'ordre 2 de  $G$  n'appartenant pas à  $H$ .

La décomposition

$$G = \langle \tau \rangle \times \langle a \rangle$$

avec  $a = b\tau$ , fournit une décomposition de  $G$  de la forme  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{t-1}$  telle que

$$\frac{\psi(\tau) - 1}{2} \text{ et } \frac{\psi(a) - 1}{2}$$

soient impairs.

Soit  $N = 2^{t-1}$ . D'après la prop. 1, on voit que les éléments de la forme  $[c, a^j]$ , avec  $c \in G$  et  $1 \leq j \leq N - 1$ , sont des combinaisons linéaires des  $2N - 1$  éléments

$$[c, a], \quad c \in G \setminus \{1\}.$$

De plus, vu la formule (5) du lemme 4, la différence

$$[a^i \tau, a^j \tau] - [\tau, \tau], \quad i \text{ et } j \text{ entiers,}$$

est une combinaison linéaire des  $[c, a^k]$  pour  $c \in G$  et  $1 \leq k \leq N - 1$  convenables. Ainsi les  $2N$  éléments

$$[\tau, \tau] \text{ et } [c, a], \quad c \in G \setminus \{1\},$$

engendrent l'idéal  $I^2 = \{\sum n_{c,c'} [c, c'] \mid c \text{ et } c' \in G\}$ .

Mézalor écrivons que la somme

$$(6) \quad \ell[\tau, \tau] + \sum_{c \in G \setminus \{1\}} n_c [c, a],$$

à coefficients  $\ell$  et  $n_c, c \in G \setminus \{1\}$ , entiers rationnels, appartient à  $\Delta(\psi)$ , soit

$$(7) \quad \ell \left( \frac{\psi(\tau) - 1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\psi(a) - 1}{2} \right) \sum_{c \in G \setminus \{1\}} n_c \left( \frac{\psi(c) - 1}{2} \right) \equiv 0 \pmod{\mu/\nu}.$$

Choisissons l'entier  $\ell^*$  de façon que la différence

$$\ell \left( \frac{\psi(\tau) - 1}{2} \right) - \ell^* \left( \frac{\psi(a) - 1}{2} \right)$$

soit congrue à 0 modulo  $\mu/\nu = 2^{r-1}$ , ce qui est possible puisque  $(\psi(\tau) - 1)/2$  et  $(\psi(a) - 1)/2$  sont tous les deux impairs.

Alors, en ajoutant à la somme (6) la quantité

$$(8) \quad \ell^* [\tau, a] - \ell [\tau, \tau],$$

la congruence (7) devient

$$(9) \left( \frac{\psi(a) - 1}{2} \right) \left\{ \ell^* \left( \frac{\psi(\tau) - 1}{2} \right) + \sum_{c \in G \setminus \{1\}} n_c \left( \frac{\psi(c) - 1}{2} \right) \right\} \equiv 0 \quad (\mu/\nu).$$

Comme  $(\psi(a) - 1)/2$  est impair, cette congruence (9) assure que

$$\ell^*[\tau, a] + \sum_{c \in G \setminus \{1\}} n_c [c, a]$$

appartient à  $\mathcal{S}(\psi)$ .

Comme, vu le choix de  $\ell^*$  c'est aussi le cas de la différence (8), on a prouvé que tout élément de  $\Delta(\psi)$  s'écrit comme la somme de deux éléments de l'ensemble des générateurs  $\mathcal{S}(\psi)$  du  $\mathbb{Z}$ -module  $M(\psi)$ .

La proposition 2 est démontrée.

6) On se place à nouveau dans la situation du §2, en distinguant entre *i*) le cas quadratique imaginaire et *ii*) le cas des corps de fonctions.

Soit  $H_{(1)}$  l'extension abélienne *non ramifiée* (resp. et totalement décomposé au-dessus de la place  $\infty$ ) maximale de  $K$  (resp.  $k$ ), et on note  $F$  une extension intermédiaire vérifiant

$$K \subseteq F \subseteq H_{(1)} \quad (\text{resp. } k \subseteq F \subseteq H_{(1)}).$$

Comme dans le §2, soit  $A$  l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire  $K$  (resp. l'anneau des fonctions de  $k$  partout entières en dehors de la place  $\infty$ ). On note  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $F$ .

Alors dans chacun de ces deux cas, il se trouve que l'on peut construire un sous-groupe d'unités  $\mathcal{E}$  de  $B^\times$ , engendré par les racines de l'unité de  $F$  et par les normes dans  $F$  des éléments du groupe des unités de Stark (aussi appelées elliptiques dans le cas *i*) *provenant d'extensions abéliennes du corps de base et ramifiées en un idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $A$ , pourvu que la classe de  $\mathfrak{q}$  parcourt le groupe des classes d'idéaux de  $K$  (resp.  $k$ ) associé à  $F$ . L'image de  $\mathcal{E}$  par l'application logarithme est isomorphe à  $M(\psi_F)$  comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module.*

De plus, soit  $h_B$  le nombre de classes d'idéaux de l'anneau  $B$ . On pose

$$\omega_\infty = \begin{cases} 12, & \text{dans le cas } i) \\ \omega_{H_{(1)}}, & \text{dans le cas } ii). \end{cases}$$

Alors, dans le cas *i*), l'identité  $M(\psi_F) = \Delta(\psi_F)$  du th. 2 permet d'identifier la puissance d'ordre  $\omega_\infty \omega_F h_A$  de  $\mathcal{E}$  avec le sous-groupe  $\Delta(c_0, \omega \omega_F)$  introduit dans [2] loc. cit. par D. Kersey d'où l'identité

$$(10) \quad [B^\times : \mathcal{E}] = h_B / [H_{(1)} : F]$$

déjà prouvée dans [2]. Dans le cas *ii*), l'identité  $M(\psi_F) = \Delta(\psi_F)$  du th.2 permet de même d'obtenir l'identité (10), cf. [3].

*Remarques.* *i*) Dans les deux cas, le degré de  $H_{(1)}$  sur le corps de base vaut  $h_A$ .

*ii*) La formule (10) résulte de la formule pour le nombre de classes : celle-ci s'obtient en évaluant les parties principales en  $s = 0$  des deux membres de la décomposition

$$(11) \quad \zeta_F(s) = \zeta(s) \prod_{\chi \neq 1} L(s, \chi), \quad s \in \mathbb{C},$$

de la fonction zêta du corps  $F$  en produit de fonctions  $L$  relatives à  $K$  (resp.  $k$ ). Une preuve de (11) est donnée dans [4] chap. VII et XIII-10.

## RÉFÉRENCES

- [1] GROSS B. & ROSEN M., *Fourier series and the special values of L-functions*, Adv. in Math. 69 (1988), 1-31.
- [2] KUBERT D. & LANG S., *Modular units*, Grundleh. der math. Wiss. 244, Springer (1981).
- [3] OUKHABA H., *Fonctions discriminant, formules pour le nombre des classes, et unités elliptiques ; le cas des corps de fonctions (associé à des courbes sur des corps finis)*, Thèse (Grenoble, Institut Fourier, 10 juin 1991).
- [4] WEIL A., *Basic number theory*, Grundleh. der math. Wiss. 144, Springer (1974).

Institut Fourier  
 Université de Grenoble I  
 B.P. 74  
 38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex  
 FRANCE.