Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

François Sigrist

Formes quadratiques encapsulées

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 2, nº 2 (1990), p. 425-429

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_2_425_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 425–429*

Formes quadratiques encapsulées.

par François SIGRIST

1. Introduction et notations.

Soit $x^t Ax$ une forme quadratique positive à n variables, donnée par sa matrice symétrique A. On associe à A un réseau R de $\mathbb{R}^n$, décrit par une matrice R telle que $R^t R = A$. Le minimum $m(A)$ de la forme sur $Z^n - \{0\}$ s'appelle le *minimum de* A, c'est le carré de la norme minimale du réseau R.

La fonction d'Hermite $\gamma_n(A) = m(A)$ (det $(A))^{-1/n}$ est un invariant de la classe d'équivalence de A (pour l'action de $G\ell(n, Z) \times \mathbb{R}^+$), et donc un invariant de la géométrie euclidienne du réseau R. On démontre facilement (cf. [5]) que $\gamma_n(A)$ est bornée, et atteint son maximum γ_n en une forme quadratique rationnelle. La fonction $\Delta_n(A) = 2^n \gamma_n(A)^{-n}$, dite *déterminant au minimum* 2, a donc la propriété que son minimum Δ_n est rationnel. Les huit premières valeurs de Δ_n sont les seules connues actuellement, et sont 2,3,4,4,4,3,2,1. Les formes correspondantes sont $A_1, A_2, D_3, D_4, D_5, E_6, E_7, E_8$. Pour les valeurs supérieures de n, on ne dispose que d'inégalités. Par exemple, $\Delta_{12} \leq 2^{-12}3^6$ s'obtient à l'aide de la forme K_{12} de Coxeter-Todd [3].

Parmi les ingrédients ad hoc nécessaires à la construction du réseau K_{12}, l'un d'eux au moins est susceptible d'être généralisé de manière à s'appliquer en toute dimension. Je me propose dans cet article de le décrire en détail, et de montrer comment il permet la construction de nombreuses formes quadratiques intéressantes, parmi lesquelles K_{12} qui apparaît ainsi avec une nouvelle description. L'argument s'inspire des méthodes associant des réseaux aux codes binaires. Cependant, la lecture de ce qui suit ne requiert aucune connaissance préalable en théorie des codes.

Je noterai M^t la matrice transposée d'une matrice M, et j'utiliserai, pour les réseaux et les formes quadratiques, les dénominations en vigueur dans le livre de Conway-Sloane [1].

Manuscrit reçu le 10 septembre 1990, révisé le 4 octobre 1990

Construction de formes encapsulées.

Soit A une forme quadratique de réseau R et de minimum m. On suppose que R contient un sous-réseau RL (L est ici une matrice entière, et l'indice du sous-réseau considéré est égal à $|\det L|$), tel que sa forme quadratique L^tAL soit de minimum cm, avec c entier. On pose $B = c^{-1}L^tAL$, qui est donc à nouveau une forme de minimum m. Je dirai, pour abréger, que la forme quadratique A *contient* la forme cB. Une condition nécessaire est fournie par le

LEMME. *Si A contient cB, l'indice f de RL dans R satisfait l'équation* $f^2 = c^n\Delta_n(B)\Delta_n(A)^{-1}$.

Preuve : $c^n\det(B) = \det(L^tAL) = f^2\det(A)$. Comme les formes A et B ont même minimum, on peut remplacer le déterminant par Δ_n, d'où l'assertion.

Dans le cas où la forme A contient cB, on considère le réseau de $\mathbb{R}^{cn}$ engendré par $RL \oplus .. \oplus RL$ (c fois) et par la diagonale $(R, R, .., R)$. Une base convenable de ce réseau est donnée par la matrice S, donnée ci-dessous en même temps que S^tS :

$$S = \begin{pmatrix} R & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ R & RL & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ R & 0 & \cdot & \cdot & RL \end{pmatrix} \quad S^tS = \begin{pmatrix} cA & AL & \cdot & \cdot & AL \\ L^tA & cB & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ L^tA & 0 & \cdot & \cdot & cB \end{pmatrix}$$

Je noterai $K(A, cB)$ la forme quadratique $c^{-1}S^tS$. Pour conserver l'idée de sa construction, je dirai que la forme quadratique K est obtenue en *encapsulant la forme A dans c fois la forme B*. Il est utile de remarquer que le calcul de K n'utilise que les matrices A, B et L (et pas R).

THÉORÈME. *La forme quadratique K(A,cB) est de minimum m.*

Corollaire : $\Delta_{cm}(K) = c^{-n}\Delta_n(A)\Delta_n(B)^{c-1} = f^2\Delta_n(B)^c$.

Preuve : Le réseau S est formé des vecteurs $w = (w_1, w_2, ..., w_c)$ ayant la propriété $w_i = u_0 + v_i$, avec $u_0 \in R$ et $v_i \in RL$. Par hypothèse, $|u_0|^2 \geq m$, et $|v_i|^2 \geq cm$. Dès que w a une composante nulle w_i, les autres w_j appartiennent à RL, et $|w|^2 \geq cm$. Si w a toutes ses composantes non nulles, $|w|^2 \geq cm$ par Pythagore, d'où le théorème. Pour le corollaire, on calcule $c^{cn}\det(K) = \det(S)^2 = \det(R)^2\det(RL)^{2c-2} = \det(A)\det(cB)^{c-1} = c^{n(c-1)}\det(A)\det(B)^{c-1}$, et on conclut avec le lemme, CQFD.

Quelques exemples.

1. Le réseau Z^n de matrice I contient le sous-réseau D_n des points dont la somme des coordonnées est paire (réseau cubique à faces centrées pour $n = 3$). Par conséquent, la forme $2I$ contient $2D_n$, et la forme encapsulée $K(2I, 2D_n)$ a la propriété que $\Delta_{2n}(K) = 2^{-n}2^n 4 = 4$. Il s'agit bien sûr de D_{2n}.

2. La forme A_2 est celle du réseau hexagonal dans le plan, qui contient un sous-réseau d'indice 3 dont la forme est $3A_2$. L'encapsulation fournit la forme $K(A_2, 3A_2)$ qui n'est autre que E_6, puisque $\Delta_6(K) = 3^{-2}3^3 = 3$, et que la matrice K est entière de minimum 2. Le calcul donne en effet

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Les quaternions de Hurwitz forment en dimension 4 le réseau D_4^*, semblable à D_4. Par multiplication par $(1 + i)$, on applique ce réseau sur un sous-réseau d'indice 4. Par conséquent, D_4 contient $2D_4$, et le calcul fournit

$$K(D_4, 2D_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\Delta_8(K(D_4, 2D_4)) = 2^{-4}4^2 = 1$, cette matrice est celle de E_8.

4. En itérant la multiplication par $(1 + i)$ de l'exemple 3, on obtient une suite de formes F_m, de dimension 2^m, telles que $F_{m+1} = K(F_m, 2F_m)$, et un calcul facile montre que

$$\Delta_{2^m}(F_m) = 2^{-(m-3)2^{m-1}}$$

Cette valeur est celle prise par les réseaux de Barnes-Wall BW_{2^m}, qui sont vraisemblablement égaux aux F_m. C'est le cas pour $m = 2$ et 3 par ce qui précède. En outre pour $m = 4$, les formes F_4 et BW_{16} ont toutes deux 2160 paires de vecteurs minimaux.

5. Une exploration parmi les formes parfaites de dimension 6 révèle que la forme E_6 contient $2E_6^*$ (E_6^* est la forme adjointe). On obtient pour la forme encapsulée $\Delta_{12}(K(E_6, 2E_6^*)) = 2^{-12}3^6$, valeur prise par la forme de Coxeter-Todd K_{12}. Voici les matrices E et L qui permettent le calcul de K :

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L^t E_6 L = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2E_6^*$$

La forme obtenue est équivalente à la forme K_{12}. Je dois ce fait à David-Olivier JAQUET, qui a obtenu explicitement une équivalence entre $K(E_6, 2E_6^*)$ et la matrice de K_{12} donnée dans [3]. La méthode, déjà utilisée dans [4], est basée sur la comparaison des spectres (au sens de Conway-Sloane [2]).

REFERENCES

[1] J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, *Sphere packings, lattices, and groups*, Springer Verlag, New York (1988).

[2] J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, *Low-dimensional lattices, III, perfect forms*, Proc. R. Soc. Lond., A 418 (1988), 43–80.

[3] H.S.M. COXETER et J.A. TODD, *An extreme duodenary form*, Can. J. of Math., **5** (1951), 384–392.

[4] D.O. JAQUET et F. SIGRIST *Formes quadratiques contiguës à D_7.*, C.R. Acad. Sci. Paris **309**. (1989) série I, 641-644.

[5] J. OESTERLÉ, *Empilements de sphères.*, Séminaire Bourbaki **42** (1989-90, n° 727).

Institut de Mathématiques et d'Informatique
Université de Neuchâtel
Chantemerle 20
CH-2007 NEUCHATEL (Suisse)