Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Chedli Touibi

Une démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers « via une inégalité du type grand crible »

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 2, n° 2 (1990), p. 333-348

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_2_333_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *(1990), 333–348*

Une démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers "via une inégalité du type grand crible."

par CHEDLI TOUIBI

1. Introduction

Soit K un corps de nombres algébriques (i.e. une extension finie de Q) de degré d. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de K.

On désigne dans toute la suite par $N\mathfrak{a}$ la norme d'un idéal entier $\mathfrak{a}$ de K, par $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}$, etc des idéaux premiers de K, par $N\mathfrak{p}$ la norme d'un idéal premier de K et on pose $n = 1 - \frac{1}{d}$.

D'après le résultat classique de Weber [5.p : 182] on sait que

$$E(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} 1 = \rho x + 0(x^n) \tag{1}$$

où ρ est le résidu en $s = 1$ de la fonction $\zeta_K(s)$ du corps de nombres K, soit

$$\rho = \text{ Res } (\zeta_K(s), s = 1) = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R}{\omega\sqrt{|D|}}h$$

où r_1 est le nombre de conjugués réels de K, r_2 le nombre de congugués imaginaires de $K; (r_1 + 2r_2 = d)$, ω le nombre de racines de l'unité dans K, D le discriminant du corps K, R le régulateur et enfin h le nombre de classes d'idéaux de K.

On définit sur les idéaux entiers de K, la fonction de Möbius généralisée μ et la fonction de Von Mangoldt généralisée Λ par

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \\ (-1)^s \text{ si } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 ... \mathfrak{p}_s \text{ où tous les } \mathfrak{p}_i \text{ sont distincts} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \log(N\mathfrak{p}) \text{ si } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^s, s \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Manuscrit reçu le 15 février 1990

On note

$$M(x) = (\frac{1}{x}) \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \mu(\mathfrak{a}) \tag{2}$$

et

$$\Psi(x) = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \Lambda(\mathfrak{a}) \tag{3}$$

et on sait que le théorème des idéaux premiers d'un corps de nombres est équivalent à l'un des deux énoncés suivants

$$\Psi(x) \sim x \ \text{ lorsque } x \to +\infty \tag{*}$$

$$M(x) = o(1) \ \text{ lorsque } x \to +\infty \tag{**}$$

Une démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers peut être obtenue à partir de la formule de Selberg pour un corps de nombres [3]

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \log^2 N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}\mathfrak{q}\leq x} \log N\mathfrak{p} \log N\mathfrak{q} = 2x\log x + 0(x) \tag{4}$$

ou encore à partir du produit de convolution de Dirichlet et sans utiliser la formule de Selberg(4)[4].

Nous allons donner ici une nouvelle démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers dans un corps de nombres qui n'utilise aucune des deux méthodes précédentes, mais qui résulte d'une inégalité du type grand crible. Cette méthode s'inspire d'une récente démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers "via une inégalité du type grand crible" de A. Hildebrand[2].

2. Lemmes

LEMME 1. *On a*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + 0(1). \tag{5}$$

Ce résultat est bien connu, on peut le voir par exemple dans [3] ; (lemme 3.1).

LEMME 2. *On a*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \log\log x + C + 0(\frac{1}{\log x}). \tag{6}$$

DÉMONSTRATION: C'est un corollaire du lemme 1 ; en effet, on écrit

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \frac{1}{\log N\mathfrak{p}}$$

En posant $\Phi(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}$,

on obtient par la formule d'intégration par parties

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \log\log x + C + 0(\frac{1}{\log x})$$

où on a posé $C = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{0(1)dt}{t\log^2 t}$.

LEMME 3. *On a*

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = 0(1)\ ;\ (x \geq 1). \tag{7}$$

DÉMONSTRATION: La formule d'inversion généralisée de Möbius appliquée à la relation (1) montre que

$$1 = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \mu(\mathfrak{a})E(x/N\mathfrak{a})$$

$$1 = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \mu(\mathfrak{a})\{\rho\frac{x}{N\mathfrak{a}} + 0((\frac{x}{N\mathfrak{a}})^n)\}$$

d'où l'on déduit que

$$\rho x \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = 0(x)$$

et par suite $\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = 0(1)$.

LEMME 4. *Soit $0 < \epsilon \leq 1$. Pour tout $x' \geq x \geq 2$, il existe un nombre $\lambda, 1 \leq \lambda \leq \lambda_0$, tel que l'on ait l'inégalité*

$$\sum_{y < N\mathfrak{p} \leq y(1+\epsilon)} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \geq \delta \tag{8}$$

à la fois pour $y = \lambda x$ et $y = \lambda x'$. Ici $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ et $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon) > 1$ sont des constantes dépendant seulement de ϵ.

DÉMONSTRATION: Puisque dans le cas d'un corps de nombres, on a encore la formule de Mertens [cf lemme1]

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq y} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log y + 0(1)$$

et que lorsque $y \to +\infty$, on a uniformément pour $x \geq y$

$$\sum_{x < N\mathfrak{p} \leq x+y} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \leq 2 + 0(1)) \log \frac{x+y}{x}$$

la démonstration du lemme 3 de [2] s'applique encore dans le cas d'un corps de nombres.

LEMME 5. *L'inégalité*

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} \Big| \frac{N\mathfrak{p}}{x} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{a}}} a(\mathfrak{a}) - \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} a(\mathfrak{a}) \Big|^2 << \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} |a(\mathfrak{a})|^2 \tag{9}$$

a lieu uniformément pour tout réel $x \geq 2$ et toute suite de nombres complexes $a(\mathfrak{a})$.

Cette inégalité (9) peut encore s'écrire

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \Big| \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{a}}} \{(N\mathfrak{p})^{1/2} - (N\mathfrak{p})^{-1/2}\} a(\mathfrak{a}) - \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}}} (N\mathfrak{p})^{-1/2} a(\mathfrak{a}) \Big|^2$$
$$<< x \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} |a(\mathfrak{a})|^2$$

Posons

$$c(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) = \begin{cases} (N\mathfrak{p})^{1/2} - (N\mathfrak{p})^{-1/2} \text{ si } \mathfrak{p} | \mathfrak{a} \\ -(N\mathfrak{p})^{-1/2} \text{ si } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a} \end{cases}$$

alors l'inégalité précédente s'écrit

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} |\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} c(\mathfrak{p},\mathfrak{a})a(\mathfrak{a})|^2 << x \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |a(\mathfrak{a})|^2$$

Par le principe de dualité, cette dernière inégalité est équivalente à

$$(10) \qquad \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} c(\mathfrak{p},\mathfrak{a})b(\mathfrak{p})|^2 << x \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} |b(\mathfrak{p})|^2$$

où $b(\mathfrak{p})$ est une suite arbitraire de nombres complexes.

Nous allons montrer que l'inégalité (10) est équivalente à une inégalité du type Turan-Kubilius pour un corps de nombres.

LEMME 6. *(Inégalité de Turan-Kubilius pour un corps de nombres)*

Soit f une fonction à valeurs complexes fortement additive

$$f(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} f(\mathfrak{p}).$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$A(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}$$

et

$$B(x) = (\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{|f(\mathfrak{p})|^2}{N\mathfrak{p}})^{1/2} \geq 0$$

Alors on a

$$(11) \qquad \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |f(\mathfrak{a}) - A(x)|^2 << xB^2(x).$$

Si on remplace $f(\mathfrak{p})$ par $(N\mathfrak{p})^{1/2}f(\mathfrak{p})$, l'inégalité (11) s'écrit

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(N\mathfrak{p})^{1/2}f(\mathfrak{p}) - \sum_{N\mathfrak{p}\leq x}(N\mathfrak{p})^{-1/2}f(\mathfrak{p}) << \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} |f(\mathfrak{p})|^2$$

soit

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} c(\mathfrak{p},\mathfrak{a})f(\mathfrak{p})|^2 << x \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} |f(\mathfrak{p})|^2$$

qui est l'inégalité (10) avec $b(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$.

Tout revient donc à établir l'inégalité (11).

DÉMONSTRATION DU LEMME 6: On peut supposer que f est à valeurs réelles positives et que x est un entier ≥ 2. Nous devons estimer

$$S = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |f(\mathfrak{a}) - A(x)|^2 = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} f(\mathfrak{a})^2 - 2A(x) \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} f(\mathfrak{a}) + A^2(x) \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} 1.$$

Posons $S = S_1 - 2S_2 + S_3$

où

$$S_1 = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} f(\mathfrak{a})^2 = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} (\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} f(\mathfrak{p}))^2$$

$$= \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} f(\mathfrak{p})^2 \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{a}}} 1 + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}\leq x\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} f(\mathfrak{p})f(\mathfrak{q}) \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{a};\mathfrak{q}|\mathfrak{a}}} 1$$

Or, $\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{a}}} 1 = \rho\frac{x}{N\mathfrak{p}} + 0((\frac{x}{N\mathfrak{p}})^n)$

et $\sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{a};\mathfrak{g}|\mathfrak{a}}} 1 = \rho\frac{x}{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}} + 0((\frac{x}{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}})^n)$; d'où

$$S_1 \leq \rho x B^2(x) + \rho x A^2(x) + 0\{x^n(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})^2}{N\mathfrak{p}^n} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}\leq x\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} \frac{f(\mathfrak{p})f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{p}^n N\mathfrak{q}^n})\}.$$

D'autre part

$$S_2 = A(x) \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} f(\mathfrak{a}) = A(x) \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} f(\mathfrak{p})\{\rho\frac{x}{N\mathfrak{p}} + 0((\frac{x}{N\mathfrak{p}})^n)\}$$

soit $S_2 = \rho x A^2(x) + 0(x^n \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^n}$

Enfin $S_3 = A^2(x) \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} 1 = \rho x A^2(x) + 0(x^n A^2(x))$

Donc

$$S << xB^2(x) + x^n\{ \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})^2}{N\mathfrak{p}^n} + \sum_{\substack{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}\leq x\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n}\frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n} +$$

$$+ A(x) \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n} + A^2(x)\}.$$

Nous allons montrer maintenant que

$$x^n\{\dots\} << xB^2(x).$$

En effet, on a

$$\text{(i)} \qquad x^n \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})^2}{N\mathfrak{p}^n} \leq xB^2(x);$$

D'autre part, on a

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{\substack{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}\leq x\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n}\frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n} = \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n} \sum_{N\mathfrak{q}\leq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} \frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on peut écrire

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} \frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n} \leq B(\frac{x}{N\mathfrak{q}})T^{1/2}(x)$$

où $T(x) = \sum_{N\mathfrak{q}\leq \frac{x}{N\mathfrak{q}}} (N\mathfrak{q})^{1-2n} = \sum_{p^k\leq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} p^{k(1-2n)};$

par une intégration par parties, on montre que

$$T(x) << \frac{x^{2(1-n)}}{(N\mathfrak{p})^{2(1-n)}}.\frac{1}{\log(x/N\mathfrak{p})}$$

d'où $\displaystyle\sum_{N\mathfrak{q}\leq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} \frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n} \leq B(\frac{x}{N\mathfrak{p}}).(\frac{x}{N\mathfrak{p}})^{1-n}\frac{1}{(\log\frac{2x}{N\mathfrak{p}})^{1/2}}$ et

$$\text{(ii}_1\text{)} \quad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n} \sum_{N\mathfrak{q}\leq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} \frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n} << x^{1-n}B(\frac{x}{N\mathfrak{p}}) \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}(\log\frac{2x}{N\mathfrak{p}})^{-1/2}$$

On applique de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour évaluer

$$(\mathrm{ii}_2)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}(\log\frac{2x}{N\mathfrak{p}})^{-1/2}\leq B(x)\left(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}\log\left(\frac{2x}{N\mathfrak{p}}\right)}\right)^{1/2}$$

Or

$$C(x)=\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}\log\frac{2x}{N\mathfrak{p}}}<<\sum_{p^k\leq x}\frac{1}{p^k\log\frac{2x}{p^k}}$$
$$=\sum_{k\leq\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]}\sum_{p\leq x^{1/k}}p^{-k}(\log\frac{2x^{1/k}}{p})^{-1}.$$

La contribution des termes pour lesquels $k\geq 2$ est un $0(1/\log x)$ et pour $k=1$, on a

$$\sum_{p\leq x}(\frac{1}{p}\log\frac{2x}{p})^{-1}<<\sum_{p\leq xe^{-\sqrt{\log x}}}\frac{1}{p}(\sqrt{\log x})^{-1}$$
$$+\sum_{xe^{-\sqrt{\log x}}<p\leq x}\frac{1}{p}<<1$$

Cela montre que $C(x)=0(1)$.

Finalement, en tenant compte de $(ii)_1$ et $(ii)_2$, on obtient

$$x^n\sum_{\substack{N\mathfrak{p}N\mathfrak{q}\leq x\\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}}}\frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n}\frac{f(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^n}<<xB^2(x).$$

Par ailleurs, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(\mathrm{iii})\qquad A(x)\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n}\leq B(x)(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}})^{1/2}.B(x)(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}(N\mathfrak{p})^{1-2n})^{1/2}\ ;$$

or $(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}})^{1/2}<<\sqrt{(\log\log x)}$

et $(\sum_{N\mathfrak{p}\leq x}(N\mathfrak{p})^{1-2n})^{1/2}<<\frac{x^{1-n}}{\sqrt{\log x}}$

d'où $x^n A(x) \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{f(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^n} << xB^2(x)(\frac{\log\log x}{\log x})^{1/2}$.

Enfin

(iv) $$x^n A^2(x) << xB^2(x).$$

En définitive
$$S = \sum_{N\mathfrak{a}\leq x} |f(\mathfrak{a}) - A(x)|^2 << xB^2(x)$$

ce qui prouve l'inégalité (11) du lemme 6.

3. Le résultat principal

PROPOSITION. *Soit η une fonction non négative tendant vers 0 à l'infini. On a*

(12) $$M(x') = M(x) + o(1) \quad (x \to \infty)$$

uniformément pour $x \leq x' \leq x^{1+\eta(x)}$.

Cette proposition entraîne le théorème des idéaux premiers sous la forme

(**) $$M(x) = o(1) \quad (x \to +\infty)$$

En effet, on a
$$M(x) = \frac{1}{\eta \log x} \int_x^{x^{1+\eta(x)}} \frac{M(x')}{x'} dx' + o(1)$$

$$M(x) = \frac{1}{\eta \log x} \sum_{m\leq x^{1+\eta}} \sum_{N\mathfrak{a}=m} \mu(\mathfrak{a}) \{\frac{1}{\max(m,x)} - x^{-1-\eta}\} + o(1)$$

or avec le choix de $\eta(x) = (\log x)^{-1/2}$ on obtient
$$\frac{x^{-1-\eta}}{\eta \log x} \sum_{N\mathfrak{a}\leq x^{1+\eta}} \mu(\mathfrak{a}) = o(1) \quad (x \to +\infty).$$

D'autre part, si $m > x$, alors en vertu du lemme 3 on a
$$\frac{1}{\eta \log x} \sum_{m\leq x^{1+\eta}} \sum_{N\mathfrak{a}=m} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{\max(m,x)} = o(1)$$

Ainsi

$$M(x) = (\log x)^{-1/2} \sum_{x < N\mathfrak{a} \le x^{1+\eta}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} + o(1) = o(1)$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION: Soient $0 < \epsilon \le 1$ fixé et $0 < \eta < 1/2$. Fixons $2 \le x \le x' \le x^{1+\eta}$. L'inégalité (9) du lemme 5 appliquée avec $a(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a})$ s'écrit

$$\sum_{N\mathfrak{p} \le x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} | \frac{N\mathfrak{p}}{x} \sum_{\substack{N\mathfrak{p} \le x \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{a}}} \mu(\mathfrak{a}) - \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \le x} \mu(\mathfrak{a}) |^2 << \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \le x} |\mu(\mathfrak{a})|^2.$$

Or, on a

$$\frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \le x} \mu(\mathfrak{a}) = M(x)$$

et

$$\frac{N\mathfrak{p}}{x} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \le x \\ \mathfrak{p} | \mathfrak{a}}} \mu(\mathfrak{a}) = \frac{N\mathfrak{p}}{x} \sum_{N\mathfrak{b} \le x/N\mathfrak{p}} \mu(\mathfrak{p}\mathfrak{b}) = -\frac{N\mathfrak{p}}{x} M(\frac{x}{N\mathfrak{p}})$$

Enfin

$$\frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a} \le x} |\mu(\mathfrak{a})|^2 = 0(1).$$

Par suite, l'inégalité (9) avec le choix $a(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a})$ s'écrit

$$\sum_{N\mathfrak{p} \le x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} |M(x) + M(\frac{x}{N\mathfrak{p}})|^2 << 1. \tag{13}$$

Il en résulte, en écrivant

$$M(x) = -M(\frac{x}{N\mathfrak{p}}) + (M(x) + M(\frac{x}{N\mathfrak{p}}))$$

que, pour tout ensemble P d'idéaux premiers de K, de norme $\le x$, on a

$$\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{1}{N\mathfrak{p}} M(x) = -\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{M(x/N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} + 0(\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{1}{N\mathfrak{p}} |M(x) + M(\frac{x}{N\mathfrak{p}})|)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient en utilisant la relation (13) et en posant $S = \sum_{\mathfrak{p} \in P} (1/N\mathfrak{p})$.

$$S.M(x) = -\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{M(x/N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} + 0(\sqrt{S})$$

et une identité analogue avec P' au lieu de P et x' au lieu de x.

Nous allons montrer que par un choix convenable des ensembles P et P' d'idéaux premiers, on a $S << S' << S$, il en résultera, en étudiant la différence $\frac{1}{S}[SM(x) - S'M(x')]$ que $|M(x) - M(x')| << \epsilon$ uniformément pour tout x suffisamment grand et $x \leq x' \leq x^{1+\eta}$. Posons $x_0 = x^{\sqrt{\eta}}$ et $x'_0 = x_0(x'/x)$. La suite $(x_j)_{j\geq 1}$ et les intervalles I_j et I'_j construits dans la démonstration du lemme 4 de [2] s'appliquent encore dans notre cas.

La suite $(x_j)_{j\geq 1}$ satisfait

$$x_j(1+\epsilon) \leq x_{j+1} \leq \lambda_0 x_j(1+\epsilon); (j \geq 0)$$

de telle façon que l'on ait l'inégalité (8) pour $y = x_j$ et $y = x'_j := x_j(x'/x)$ et pour tout $j \geq 1$ où $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon)$ et $\delta = \delta(\epsilon)$ sont les constantes du lemme 4.

D'autre part, les intervalles I_j et I'_j sont définis par

$$I_j =]x_j, x_j(1+\epsilon)] \quad et \quad I'_j =]x'_j, x'_j(1+\epsilon)]$$

On choisit alors les ensembles P et P'

$$P \subset \bigcup_{1\leq j<j_0}]x_j, x_j(1+\epsilon)] \subset]x_0, x]$$

$$P' \subset \bigcup_{1\leq j<j_0}]x'_j, x'_j(1+\epsilon)] \subset]x'_0, x']$$

où j_0 est l'entier défini par $x_{j_0} \leq x < x_{j_0+1}$, tels que pour $1 \leq j < j_0$

$$|\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta| \leq \frac{\log x_j(1+\epsilon)}{x_j} \tag{14}$$

et

$$|\sum_{N\mathfrak{p}\in P'\cap I'_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta| \leq \frac{\log x'_j(1+\epsilon)}{x'_j} \tag{14'}$$

ce choix peut être fait, car on a les inégalités du lemme 4, quitte à enlever un nombre convenable d'idéaux premiers dont la norme appartient à l'intervalle I_j ou à l'intervalle I'_j.

D'autre part, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K tel que $N\mathfrak{p} \in P \cap I_j$, on a

$$\left|\frac{1}{\log N\mathfrak{p}} - \frac{1}{\log x_j}\right| = \left|\frac{1}{\log x_j}\frac{\log N\mathfrak{p} - \log x_j}{\log N\mathfrak{p}}\right| \leq \frac{\log(1+\epsilon)}{\log x_0}\frac{1}{\log x_j}$$

d'où il résulte que

$$\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}} - \frac{1}{\log x_j}\right)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\frac{1}{\log x_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}$$

et

$$\sum_{1\leq j<j_0}\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}} - \frac{1}{\log x_j}\right)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} =$$

$$= 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}$$

donc

$$S = \sum_{\mathfrak{p}\in P}\frac{1}{N\mathfrak{p}} = \sum_{1\leq j<j_0}\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}\frac{1}{\log N\mathfrak{p}}$$

$$S = \left(1 + 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \tag{15}$$

on a une égalité analogue pour $S' = \sum_{\mathfrak{p}\in P'}\frac{1}{N\mathfrak{p}}$, soit

$$S' = \left(1 + 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x'_j}\sum_{N\mathfrak{p}\in P'\cap I'_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \tag{15'}$$

On écrit ensuite

$$\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \left(\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta\right) + \delta$$

on obtient

$$S = \left(1 + 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}\left(\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta\right) +$$

$$+ \left(1 + 0\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)\sum_{1\leq j<j_0}\frac{\delta}{\log x_j}$$

or, en vertu de l'inégalité (14), on a

$$|(1+0(\frac{1}{\log x_0}))\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}(\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}-\delta)|\leq$$
$$\leq(1+0(\frac{1}{\log x_0}))\sum_{1\leq j<j_0}|\frac{1}{\log x_j}\frac{\log x_j(1+\epsilon)}{x_j}|.$$

Mais
$$\frac{\log x_j(1+\epsilon)}{x_j}\leq\frac{\log x}{x_0}=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\log x_0}{x_0}$$

donc

$$|(1+0(\frac{1}{\log x_0}))\sum_{1\leq j<j_0}|\frac{\log x_j(1+\epsilon)}{x_j}|\leq|(1+0(\frac{1}{\log x_0}))\frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\log x_0}{x_0}\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}$$
$$\leq 0(\frac{1}{\log x_0})\sum_{1\leq j<j_0}\frac{1}{\log x_j}$$

Finalement, on peut écrire

$$S=\sum_{\mathfrak{p}\in P}\frac{1}{N\mathfrak{p}}=(1+0(\frac{1}{\delta\log x_0}))\sum_{1\leq j<j_0}\frac{\delta}{\log x_j}$$

et une égalité analogue pour S'

$$S'=\sum_{\mathfrak{p}\in P'}\frac{1}{N\mathfrak{p}}=(1+0(\frac{1}{\delta\log x_0}))\sum_{1\leq j<j_0}\frac{\delta}{\log x'_j}$$

Puisque, dans notre cas, on a

$$0<\frac{\log x'_j-\log x_j}{\log x_j}\leq\frac{\log(x'/x)}{\log x_0}<\sqrt{\eta}$$

il en résulte que
$$S=S'(1+0(\sqrt{\eta})+0(\frac{1}{\delta\log x_0}))$$

et en particulier que $S<<S'<<S$, pourvu que η soit suffisamment petit et x suffisamment grand, ce que l'on peut toujours supposer.

En outre, on a

$$(S' >>_\epsilon), S >>_\epsilon \sum_{1 \leq j < j_0} \frac{1}{\log x_j} \tag{17}$$

Par définition de la suite (x_j), on peut écrire

$$\sum_{1 \leq j < j_0} \frac{1}{\log x_j} \geq \sum_{1 \leq j < j_0} \frac{1}{\log\{x_0(\lambda_0(1+\epsilon))^j\}}$$

En comparant cette dernière somme (finie) à une intégrale, on trouve que cette somme est minorée par $\log \frac{\log x}{\log x_0} = \log \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, à une constante près dépendant de ϵ, ainsi

$$S >>_\epsilon \log \frac{1}{\sqrt{\eta}} \text{ et } S' >>_\epsilon \log \frac{1}{\sqrt{\eta}} \tag{18}$$

D'autre part, on a

$$S'M(x') - SM(x) = \sum_{1 \leq j < j_0} \{ \sum_{N\mathfrak{p} \in P \cap I_j} \frac{M(x/N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} - \sum_{N\mathfrak{p} \in P' \cap I'_j} \frac{M(x'/N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \} + 0(\sqrt{S})$$

On écrit ensuite

$$M(x/N\mathfrak{p}) = M(x/x_j) + 0(\epsilon)$$

et

$$\frac{1}{N\mathfrak{p}} M(\frac{x}{N\mathfrak{p}}) = \frac{M(x/x_j)}{\log x_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} + \frac{M(x/x_j)}{\log x_j} (\frac{\log x_j}{N\mathfrak{p}} - 1) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}$$

Or

$$|\sum_{1 \leq j < j_0} \frac{M(x/x_j)}{\log x_j} \sum_{N\mathfrak{p} \in P \cap I_j} (\frac{\log x_j}{N\mathfrak{p}} - 1) \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}| \leq \frac{\rho}{\log x_0} (\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{1}{N\mathfrak{p}}) . \log(1+\epsilon)$$

donc

$$\sum_{1\leq j<j_0} \frac{M(x/x_j)}{\log x_j} \sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} (\frac{\log x_j}{\log N\mathfrak{p}} - 1)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = 0(\frac{\rho S}{\log x_0})$$

Enfin

$$\sum_{1\leq j<j_0} \sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} \frac{1}{N\mathfrak{p}} 0(\epsilon) = 0(\epsilon S).$$

On a les mêmes relations avec P' au lieu de P et I'_j au lieu de I_j.

On en déduit que

$$S'M(x') - SM(x) = \sum_{1\leq j<j_0} \frac{M(x/x_j)}{\log x_j}\{ \sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \\ - \sum_{N\mathfrak{p}\in P'\cap I'_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}\} + 0(\epsilon S + \frac{\rho S}{\log x_0} + \sqrt{S}).$$

La différence $S'M(x') - SM(x)$ peut encore s'écrire

$$\sum_{1\leq j<j_0} \frac{M(x/x_j)}{\log x_j}\{(\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta) - \\ - (\sum_{N\mathfrak{p}\in P'\cap I'_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta)\} + 0(\epsilon S + \frac{\rho S}{\log x_0} + \sqrt{S}).$$

D'après les inégalités (14) et (14'), on a

$$\begin{aligned} |\sum_{1\leq j<j_0} \frac{M(x/x_j)}{\log x_j}(\sum_{N\mathfrak{p}\in P\cap I_j} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \delta)| &\leq \sum_{1\leq j<j_0} \frac{|M(x/x_j)|}{\log x_j} \frac{\log x_j(1+\epsilon)}{x_j} \\ &\leq \rho\frac{1}{x_0} \sum_{1\leq j<j_0} (1 + \frac{\log(1+\epsilon)}{\log x_j}) \\ &\leq 0(\rho\frac{j_0}{x_0} + \epsilon S). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$S'M(x') - SM(x) = 0(\rho\frac{j_0}{x_0} + \epsilon S + \frac{\rho S}{\log x_0} + \sqrt{S})$$

d'où l'on déduit

$$\frac{S'M(x') - SM(x)}{S'} = 0(\rho\frac{j_0}{x_0 S'} + \epsilon\frac{S}{S'} + \rho\frac{S}{S'}\frac{1}{\log x_0} + \frac{\sqrt{S}}{S'});$$

or

$$\frac{S}{S'} = 1 + 0(\sqrt{\eta}) + 0(\frac{1}{\delta \log x_0})$$

donc

$$|M(x') - M(x)| << \epsilon\sqrt{\eta} + \frac{1}{\delta \log x_0} + \rho\frac{j_0}{x_0 S'} + \frac{\rho}{\log x_0} + \frac{1}{\sqrt{S'}}$$

En utilisant la relation (17) et la définition de x_0 on voit que si x est suffisamment grand et η suffisamment petit, alors $|M(x') - M(x)| << \epsilon$ ce qui montre la proposition.

Bibliographie

1. P.D.T.A. ELLIOTT, *Probabilistic Number Theory*, SpringerN.Y. **I** (1979).
2. A. HILDEBRAND, *The Prime Number Theorem via the large sieve*, Preprint.
3. H. SHAPIRO, *An elementary proof of the prime ideal theorem*, Communication on Pure and Applied Mathematics (1949), 309–323.
4. C. TOUIBI, H. ZARGOUNI, SMIDA, *Une démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers*, Colloquium Math. **L VII.** (1989), p. 157. Fas.1
5. H. WEYL, *Algebraic Number Theory*, Princeton University Press.

C. TOUIBI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
Campus Universitaire
1060-Tunis
TUNISIE.