Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Augusto Nobile

L'existence de certaines spécialisations de courbes projective

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 2, nº 1 (1990), p. 31-39
<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_1_31_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **2** *1990, 31–39*

L'existence de certaines spécialisations de courbes projectives.

par AUGUSTO NOBILE

Introduction. Dans une famille (plate) de courbes de $\mathbf{P}^n$ il y a une inégalité qui minore le genre (géométrique) de la fibre générale en fonction des genres (géométriques) et des multiplicités des composantes irréductibles d'une fibre en un point fermé (formule (2) du §1).

On s'intéresse ici au problème inverse. On se donne un fermé connexe de $\mathbf{P}^n_k$, équidimensionnel de dimension 1, de composantes irréductibles C_i dont le genre (géométrique) est g_i pour $1 \leq i \leq s$, on se donne en plus des entiers $m_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$, et un entier g qui satisfait l'inégalité évoquée ci-dessus ; existe-t-il une famille de courbes de $\mathbf{P}^n$ dont la fibre générale soit de genre g (et aussi bonne que possible) et dont la fibre en un point fermé a pour cycle associé l'élément $\sum_{i=1}^{s} m_i C_i$?

Au §1, on énonce de façon précise ce problème, on commente les résultats déjà connus et on énonce deux théorèmes qui répondent à la question dans des cas particuliers (théorème 1 et 2).

Au §2, on interprète les résultats en termes de lissification d'une courbe et au §3 on donne une esquisse des démonstrations des théorèmes 1 et 2.

On trouvera des démonstrations détaillées des résultats principaux de cet exposé (ainsi que des généralisations) dans [N3].

Mes remerciements les plus vifs à J. Fresnel et M. Matignon qui ont corrigé le texte en français et à Mme Sedeau pour son travail de frappe.

0 - Notations et terminologie.

Dans tout cet exposé k *sera un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.* Par *schéma sur* k on entendra schéma de type fini sur k, une *variété algébrique* (sur k) est un schéma (de type fini) sur k intègre. Une *courbe algébrique sur* k est un schéma sur k, équidimensionnel de dimension 1. Une courbe C de l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$ est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^n_k$, qui est équidimensionnel de dimension 1, on écrira souvent $C \subset \mathbf{P}^n_k$. Un fermé V de $\mathbf{P}^n_k$ est dit *dégénéré* s'il est contenu dans un

Manuscrit reçu le 25 novembre 1989.

hyperplan de $\mathbf{P}_k^n$ (si $\mathbf{P}_k^n = Proj(k[X_0, X_1, \cdots, X_n])$, cela veut dire qu'il existe $L \in k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$ homogène de degré 1 avec $V \subset V(L)$) ; un fermé V de $\mathbf{P}_k^n$ qui ne possède pas la propriété précédente est dit *non dégénéré*, en particulier une courbe $C \subset \mathbf{P}_k^n$ est dite *non dégénérée* si le fermé associé est non dénégéré.

Soit T un schéma sur k, une *famille de courbes* de $\mathbf{P}_T^n$ (ou $\mathbf{P}^n$) est un sous-schéma fermé $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_T^n = \mathbf{P}_k^n \times_k T$, plat sur T tel que pour tout $t \in T$ la fibre $\mathcal{C}_t$ soit une courbe algébrique sur $k(t)$: ici $k(t)$ désigne le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{T,t}$ et $\mathcal{C}_t := \mathcal{C} \times_T Spec(k(t))$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{P}_k^n \times T \arrow[dl, "p"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée, p est la deuxième projection et f est plat. Du point de vue ensembliste on a donc $\mathcal{C}_t = f^{-1}(\{t\})$. Si t est un point fermé on a $k(t) = k$ et $\mathcal{C}_t$ est donc une courbe algébrique de $\mathbf{P}_k^n$.

Soient $C \subset \mathbf{P}_k^n$ une courbe algébrique de $\mathbf{P}_k^n$, C_i, $1 \leq i \leq s$ les composantes irréductibles de C, m_i la longueur de l'anneau local $\mathcal{O}_{C,x_i}$ où x_i est le point générique de C_i (i.e. $\overline{\{x_i\}} = C_i$), alors le cycle $\mathfrak{Z}(C) := \sum_{i=1}^{s} m_i C_i$ s'appelle le *cycle associé à la courbe algébrique* C.

Soit C une courbe intègre sur k, on appelle *genre géométrique* de C (ou plus simplement *genre*) le nombre $dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ où X est la normalisation de C (i.e. le genre géométrique de C est par définition le genre arithmétique de sa normalisation).

I. Les résultats principaux

Soient T un schéma sur k intègre, $\mathcal{C}$ une famille de courbes algébriques de $\mathbf{P}_T^n$. On suppose qu'il existe un point fermé $t_1 \in T$ tel que $\mathcal{C}_{t_1}$ soit intègre alors il existe un ouvert non vide $U_1 \subset T$ tel que pour tout point fermé $t \in U_1$ la fibre $\mathcal{C}_t$ soit intègre ; on peut alors montrer qu'il existe un ouvert $U \subset U_1$ non vide tel que le genre (géométrique) de $\mathcal{C}_t$ soit constant pour tout point fermé $t \in U$, soit g ce genre [N2]. Alors toute fibre $\mathcal{C}_t$ avec t fermé et $t \in U$ s'appelle une *fibre générale* et g s'appelle le genre de la fibre générale.

Si $o \in T$ est un point fermé, on dit souvent que la fibre $\mathcal{C}_o$ est une *spécialisation* de $\mathcal{C}$ en o.

Soit $o \in T$ un point fermé, $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_o) = \sum_{l=1}^{s} m_i C_i$ le cycle associé, g_i le genre (géométrique) de l'unique courbe intègre associée au fermé irréductible C_i, on a alors la formule

(2) $g \geq \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i(m_i g_i - m_i + 1)$, où $\epsilon_i = min(1, g_i)$

et où g est le genre de la (ou d'une) fibre générale (cf. [M], [N1], la formule apparaît aussi dans la littérature classique cf. [A]).

On aimerait un résultat réciproque. Soient C_i des fermés irréductibles de dimension 1 de $\mathbf{P}_k^n$, g_i le genre (géométrique) de la courbe intègre associée à C_i pour $1 \leq i \leq s$ (on suppose en plus que $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$ est connexe) ; soient $m_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$ et $g \geq 0$ des entiers qui satisfont l'inégalité (2). Alors peut-on trouver un schéma T sur k intègre et une famille de courbes algébriques $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_T^n$ telle que la fibre générale soit de genre g et qu'il existe un point fermé $o \in T$ tel que $\sum m_i C_i$ soit le cycle associé à la spécialisation $\mathcal{C}_o$. Il conviendra de demander que les fibres générales soient "bonnes" e.g. lisses ou avec des singularités simples.

Dans le cas $n = 2$, on obtient le meilleur résultat possible si $g \leq \frac{1}{2}(d - 1)(d-2)$ où $d = \sum_{i=1}^{s} m_i d_i$ et où d_i est le degré de la courbe intègre associée à C_i. On trouve alors une famille dont la fibre générale est une courbe avec des points doubles ordinaires. La présence de singularités est ici inévitable parce qu'on ne peut trouver dans $\mathbf{P}_k^2$ une courbe lisse de degré d et de genre g, sauf si $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

Si donc on veut des familles à courbe générale lisse, il faudra supposer $n \geq 3$. Le résultat idéal serait l'énoncé suivant

ENONCÉ 1. *Soient C_i pour $1 \leq i \leq s$ des fermés irréductibles de dimension 1 de $\mathbf{P}_k^n$ tels que le fermé $C_1 \cup \cdots \ldots \cup C_s$ soit connexe et non dégénéré ; soient g_i le genre (géométrique) de la courbe intègre associée à $C_i, m_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$ et $g \geq 0$ des entiers qui satisfont l'ingégalité (2). Soient d_i le degré de la courbe intègre associée à $C_i, d = \sum_{i=1}^{s} m_i d_i$; on suppose qu'il existe des courbes lisses de $\mathbf{P}_k^n$ de genre g et de degré d. Alors il existe un schéma intègre T sur k et une famille de courbes algébriques $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_T^n$ telle que la fibre générale soit lisse de genre g et il existe un point fermé $o \in T$ tel que le cycle associé à la fibre spéciale $\mathcal{C}_o$ soit $\sum_{i=1}^{s} m_i C_i$.*

La première difficulté est de savoir s'il existe des courbes lisses de degré

g et de genre g dans $\mathbf{P}_k^n$. Une condition nécessaire est que la classique "inégalité de Castelnuovo" :

$$g \leq \gamma(d,n) = m\left(\frac{(m-1)(n-1)}{2} + \epsilon\right),$$

où $m = \left[\frac{d-1}{n-1}\right]$ et ϵ est le reste de la division de $(d-1)$ par $(n-1)$ soit satisfaite, cette dernière étant satisfaite par toutes les courbes lisses, non dégénérées, de degré d et de genre g dans $\mathbf{P}_k^n$. Mais il y a des "lacunes", si $0 \leq g < \gamma(d,n)$, il peut arriver qu'il n'existe pas de courbe lisse dans $\mathbf{P}^n$, de genre g et de degré d (cf. [H1] p. 354). Il y a des résultats complets pour $n \leq 5$ (mais ils sont compliqués et la théorie rigoureuse est récente, [GP], [H2], [R], [P],[C]). Pour $n > 6$, il y a seulement des résultats partiels ([HS]).

Dans cet exposé on veut présenter quelques résultats de base dans cette direction, on verra que l'énoncé 1 est vrai dans des cas spéciaux. Je ne sais pas si il est vrai en général.

THÉORÈME 1. *Soient C un fermé irréductible de dimension 1 de $\mathbf{P}_k^n$, non dégénéré. Notons aussi C la courbe intègre associée à C, soient $\eta : X \to C$ sa normalisation, g le genre de X (i.e. le genre géométrique de C), $\mathcal{L} = \eta^*(\mathcal{O}_C(1))$. On suppose que $\mathcal{L}$ est un faisceau très ample. Alors il existe un schéma intègre T sur k, une famille de courbes algébriques $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_T^n$ de fibre générale lisse, de genre g et il existe un point fermé $o \in T$ tel que le diviseur associé à la fibre spéciale $\mathcal{C}_o$ soit $1C$ (autrement dit la courbe $\mathcal{C}_o$ a C pour espace topologique associé et $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_o,x}$ est réduit si x est le point générique de $\mathcal{C}_o$; en revanche $\mathcal{C}_o$ peut avoir des points immergés).*

THÉORÈME 2. *Soient C une courbe réduite de $\mathbf{P}_k^n$, non dégénérée, $n \geq 3, C_1, C_2, ..., C_r$ les composantes irréductibles de C, g_i le genre (géométrique) de la courbe intègre associée à C_i (celle-ci est aussi notée C_i), $\eta_i : X_i \to C_i$ la normalisation de C_i. On suppose que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq r-1$ et que $H^1(X_i, \mathcal{L}_i) = 0$ où $\mathcal{L}_i = \eta_i^*(\mathcal{O}_{C_i}(1))$, pour $1 \leq i \leq r$. Alors il existe un schéma intègre T sur k et une famille de courbes algébriques $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_T^n$ dont la fibre générale est lisse de genre $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_r$ et il existe un point fermé $o \in T$ tel que le cycle associé à la fibre spéciale $\mathcal{C}_o$ soit $C_1 + C_2 + \cdots + C_r$ (i.e. $\mathcal{C}_o$ est génériquement réduit et $(\mathcal{C}_o)_{\rm red} = C$).*

Remarque. Les hypothèses du théorème 1 sont toujours valables si $d \geq 2g+1, d = \deg C = deg\mathcal{L}$ (cf. [H], p. 350). Donc, elles sont toujours satisfaites si $g = 0$, $g = 1$. En utilisant l'inégalité de Castelnuovo on peut trouver beaucoup d'autres situations favorables ; e.g. dans $\mathbf{P}^3$, si $p_a(C) = 2$ ou 3 (donc $d \geq 5$) ou si $p_a(C) = 4$ et $\delta(C) \geq 2(\delta(C) = \sum_{p\in C} \operatorname{long}(\overline{\mathcal{O}}_{C,p}/\mathcal{O}_{C,p})$ où $\overline{\mathcal{O}}_{C,p}$ désigne la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{C,p}$, les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites.

A propos du théorème 2 nous avons les résultats suivants :

PROPOSITION 1. *On utilise les notations du théorème 1. Si* $H^1(C, \mathcal{O}_C(1)) = 0$, *alors* $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$.

DÉMONSTRATION: On a la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_C \to \overline{\mathcal{O}}_C \to \mathcal{F} \to 0$ où le support de $\mathcal{F}$ est le lieu singulier de C. En tensorisant par $\mathcal{O}_C(1)$ et en considérant la longue suite exacte de cohomologie on obtient la suite exacte $H^1(C, \mathcal{O}_C(1)) \to H^1(X, \mathcal{L}) \to H^1(C, \mathcal{F})$, après l'identification $H^i(C, \overline{\mathcal{O}}_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(1)) = H^i(X, \mathcal{L})$ ([H], p. 124, et le fait que η est fini). La conclusion est claire.

PROPOSITION 2. *On utilise les notations du théorème 2. Si* $H^1(C, \mathcal{O}_C(1)) = 0$, *alors* $H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i}(1)) = 0$, *pour tout* i *(et donc,* $H^1(X_i, \mathcal{L}_i) = 0$. *d'après la Prop. 1.)*

DÉMONSTRATION: Si $\mathcal{J}_j$ est le faisceau d'idéaux définissant $C_j \subset C$, alors on a une suite exacte $0 \to \mathcal{J}_j \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C_j} \to 0$. En tensorisant avec $\mathcal{O}_C(1)$ et en prenant la suite exacte de cohomologie on a une suite exacte

$$H^1(C, \mathcal{O}_C(1)) \to H^1(C_j, \mathcal{O}_{C_j}(1)) \to H^2(C, \mathcal{J}_j(1)).$$

Comme C est une courbe, $H^2(C, \mathcal{J}_j(1)) = 0$, ce qui implique la proposition.

Pour finir cette partie, on remarquera qu'il y a une version plus faible du problème de "réaliser géométriquement" l'inégalité (2), où ni les courbes C_i, ni "n" dans $\mathbf{P}^n$ sont spéficifiés au préalable. Alors, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 3. *Soient* $g_1, g_2, .., g_r, g$ *des entiers positifs. Alors il existe une courbe lisse* T *et une famille de courbes algébriques* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbf{P}^n_T$ *(*n *assez grand) de fibre générale lisse de genre* g *et il existe un point fermé* $o \in T$ *dont la fibre spéciale* $\mathcal{C}_o$ *a pour cycle associé* $C_1 + C_2 + \ldots + C_r$ *où* C_i *est une courbe intègre de genre (géométrique)* g_i.

DÉMONSTRATION: D'après [N2] (ou [N1]) il existe une courbe lisse T sur k et une famille de courbes (planes) $\mathcal{D}$ de $\mathbf{P}^2_T$ et il existe un point fermé $o \in T$

dont la fibre spéciale $\mathcal{D}_o$ a pour cycle associé $\mathfrak{Z}(\mathcal{D}_o) = D_1 + D_2 + .. + D_r$; de plus la fibre générale D et les courbes $D_1, .., D_r$ sont nodales de genres respectifs $g, g_1, .., g_r$. On prend la normalisation $\eta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. D'après [N2], p. 742, η induit un morphisme birationnel des fibres spéciales $\mathcal{C}_o \to \mathcal{D}_o$ (i.e., il induit un isomorphisme d'ouverts denses). Il est clair que la famille $p \circ \eta : \mathcal{C} \to T$ a les propriétés voulues (où $p : \mathcal{D} \to T$ est le morphisme canonique).

II - Quelques rappels et commentaires

Les problèmes considérés au §I sont reliés au problème de la "lissification" des courbes. On dit qu'une courbe $C \subset \mathbf{P}^n$ est "lissifiable" ("smoothable", en anglais), s'il existe une famille $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^n_T$ (où T est intègre) telle que la fibre générale $\mathcal{C}_t$ soit lisse et une fibre spéciale $\mathcal{C}_o$ est C (après l'identification $\mathbf{P}^n_T \times \{o\} = \mathbf{P}^n_k$). Bien sûr, d'après la théorie des familles plates, $p_a(\mathcal{C}_t) = p_a(\mathcal{C}_o)$ (p_a est le genre arithmétique). Donc si $\mathcal{C}_o$ est aussi intègre et si $\mathcal{C}_o$ est singulière, on aura $g(\mathcal{C}_t) > g(\mathcal{C}_o)$ (inégalité stricte). Si dans ce cas ($\mathcal{C}_o$ est intègre) on veut l'égalité dans la formule (2) du §I, la fibre $\mathcal{C}_o$ sera nécessairement non réduite ; elle aura des "points immergés". Autrement dit le théorème 1 dit que si l'on "modifie" de manière convenable la structure de C en changeant le faisceau structural de telle façon qu'il y ait quelques points immergés, alors cette nouvelle courbe C' peut être lissifiée. On peut de même donner une interprétation semblable au théorème 2.

Rappelons que, pour l'instant, presque tous les résultats sur la lissification des courbes s'appliquent seulement au cas de courbes avec des points doubles ordinaires.

Par exemple, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3 ([HH], Section 1). *Si C est une courbe dans $\mathbf{P}^n_k$, connexe et nodale (c'est-à-dire, toutes les singularités sont des points doubles ordinaires), qui satisfait $H^1(C, \mathcal{O}_C(1)) = 0$, alors C est lissifiable. D'ailleurs le point dans le schéma de Hilbert $H_{n,d,g}$ correspondant à C est lisse.*

Il y a des généralisations de ce résultat ([HH], [CR],[S]) assez techniques et compliquées, mais qui ne réussissent pas à éliminer l'hypothèse "C est nodale".

On rappelle que le schéma de Hilbert $H_{n,d,g}$ paramétrise les courbes de $\mathbf{P}^n_k$ de degré d et de genre arithmétique g, en ce sens que si $\mathcal{D} \subset \mathbf{P}^n_T$ est une famille de courbes de genre g et de degré d, il existe un morphisme (unique) $\varphi : T \to H_{n,d,g}$ avec $\varphi(t) = \mathcal{D}_t$.

Une autre méthode, plus classique, pour étudier les courbes dans $\mathbf{P}^n$ est celle de la variété de Chow : elle paramétrise les cycles de degré d (et dimension 1) dans $\mathbf{P}^n$, i.e. les combinaisons linéaires formelles $\sum m_i C_i$, avec C_i courbe intègre de degré d_i dans $\mathbf{P}^n$, $m_i \geq 0$ des entiers nuls sauf pour un nombre fini d'indices et $\sum m_i d_i = d$. Avec cette terminologie, les théorèmes 1 et 2 donnent des conditions pour qu'un cycle soit spécialisation d'un cycle premier $1C$, avec C lisse.

III - Les démonstrations

On esquissera la démonstration du théorème 1.

D'abord, on peut décrire explicitement le morphisme de normalisation $\eta : X \to C$ de la façon suivante. Il y a une injection canonique $\gamma : H^o(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \to H^o(X, \mathcal{L})$ (on utilise le fait que C n'est pas contenue dans un hyperplan et la "formule de projection", [H] p. 124) ; l'image V_0 de γ définit un "g_n^d" i.e., un système linéaire de degré d et de dimension n. D'ailleurs, "les coordonnées" $x_0, ..., x_n$ définissent des section $\sigma^{(0)} = (\sigma_0^{(0)}, \cdots, \sigma_n^{(0)})$ de $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$; le couple $\alpha_0 = (V_0, \sigma^{(0)})$ détermine un morphisme $X \to \mathbf{P}^n$ (cf. [H], II.7), ce qui induit η. Pour achever la démonstration on fait varier le morphisme. Plus précisément on considère l'espace $\overline{Z}$ dont les points sont des systèmes $\alpha = (V, \sigma_0, \cdots, \sigma_n)$ où $V \in G$, la grassmanienne des $(n+1)$-plans dans $H^0(X, \mathcal{L})$, et $\sigma_0, \cdots, \sigma_n$ est une base de V. A chaque point de $\overline{Z}$ correspond une application rationnelle $f_\alpha : X \to \mathbf{P}^n$. Soit Z l'ouvert des α tels que f_α soit une immersion fermée. On voit immédiatement que $\overline{Z}$ est irréductible, de plus Z est non vide, donc dense (en fait, en utilisant l'hypothèse "$\mathcal{L}$ très ample", on construit aisément un élément de Z). Maintenant, on prend une courbe irréductible Γ dans $\overline{Z}$, contenant α_0 et telle que $\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{\alpha_0\} \subset Z$. Les courbes $D_\alpha = f_\alpha(X), \alpha \in \Gamma_0$, définissent une famille paramétrée par Γ_0. En changeant la base par la normalisation de Γ si besoin est, on peut supposer que la courbe Γ des paramètres est lisse. On prolonge à Γ (cf [H], 9.8.1), il est clair que la fibre en α_0, réduite, est précisément C, c'est donc la famille cherchée.

Maintenant on considère la démonstration du théorème 2. D'abord on regarde le cas $r = 1$. La démonstration est dans ce cas semblable à celle du théorème 1. D'abord, par la remarque du §I, on peut supposer que $g \geq 2$. On commence comme au théorème 1, on trouve le système $(V_0, \sigma^{(0)}), V_0 \subset H^0(X, \mathcal{L})$. Le faisceau $\mathcal{L}$ n'est pas nécessairement très ample mais, selon un théorème classique de Halphen ([H], p. 349), le faisceau inversible général de degré d est non spécial et très ample. Donc, dans ce cas il convient d'utiliser l'espace dont les points correspondent à des systèmes $\beta = (\mathcal{E}, V, (\sigma_0, \cdots, \sigma_n))$ où $\mathcal{E}$ est un faisceau inversible de degré

d non spécial, $V \subset H^0(X,\mathcal{E})$ et $\sigma_0,\cdots,\sigma_n$ est une base de V (où $(\mathcal{E},V,\sigma)$ s'identifie à $(\mathcal{E}',V',\sigma')$ s'il y a un isomorphisme $\mathcal{E}\tilde{\rightarrow}\mathcal{E}'$ envoyant V dans V' et σ dans σ'). On voit que c'est un fibré sur la variété irréductible $Pic_d(X)$, donc irréductible ; le point $(\mathcal{L},V_0,\sigma^{(0)})$ (correspondant à $\eta : X \to C \subset \mathbb{P}^n$) appartient à $\overline{\mathcal{U}}$. L'ensemble $\mathcal{U} = \{(\mathcal{E},V,\sigma) \in \overline{\mathcal{U}} | \mathcal{E}$ est très ample$\}$ est ouvert non vide (donc dense) : c'est le théorème de Halphen.

Maintenant on peut copier le reste de la démonstration du théorème 1.

Considérons le cas $r > 1$. En utilisant le cas $r = 1$, on peut trouver des courbes lisses D_i, de degré d_i et de genre g_i, "très proche" de $\tilde{C}_i, i = 1,\cdots,r$ où $\tilde{C}_i$ est une courbe généralement réduite, telle que $(\tilde{C}_i)_{\text{red}} = C_i$. On vérifie que l'on peut choisir les D_i de telle façon que $D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$ soit nodale, avec $r-1$ points doubles ordinaires (tel que $D_i \cup D_{i+1} \neq \emptyset$, pour tout i) : c'est une conséquence de la théorie de Kleiman sur "les translations générales de sous-variétés" (cf. [H], p. 273, ou [K]). On voit aussi que cette courbe D se spécialise en une courbe $\tilde{C}$ telle que $\mathfrak{Z}(\tilde{C}) = C_1 + \cdots + C_r$. La courbe D est nodale, de genre arithmétique $g = g_1 + \cdots + g_r$ (c'est un calcul facile). Mais on peut montrer que l'hypothèse implique $H^1(D,\mathcal{O}_D(1)) = \{0\}$.

• Donc, selon le théorème 3, D est spécialisation d'une courbe lisse A, de genre $g_1+\cdots+g_r$. Donc, finalement "par transitivité" $\tilde{C}$ sera spécialisation d'une courbe du type cherché.

Remarque. On voit que les nombres $g_1,\cdots,g_r$ qui apparaissent au théorème 2 doivent satisfaire :

$$g_1 + \cdots + g_r \leq \gamma(d,n)$$

(le nombre de Castelnuovo), une inégalité numérique qui ne semble pas évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ALBANESE G., *"Sulle condizioni perché uno curva algebrica riducibile si posso considerare come limite di une curva irreducibile"*, Rend. Circ. Mat. Palermo **52** (1928), 105–150.

[CS] CILIBERTO C., SERNESI E., *"Curves on surfaces of degree $2r - \delta$ in $\mathbb{P}^r$"*, Comment. Math. Helvetici **64** (1989), 300–328.

[CR] CHANG M-C, RAV Z., *"Deformations of complete linear systems on reducible curves"*, Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S. **46** (1987), 63–75.

[GP] GRUSON L. PESKINE C., *"Genre des courbes de l'espace projectif II"*, Ann. Sci. Ec. N. Sup.. (4) **15** (1982), 401-418.

[HS] HARRIS J., *"Curves in Projective Space"*, Sem. Math. Sup.. Univ. Montréal, (1982).

[H1] HARTSHORNE R., *"Algebric Geometry"*, Grad Texts Math. **52**. Springer, N.Y., (1977).

[H2] HARTSHORNE R., *"Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif"*, Sém. Bourbaki **592** (1982). Astérisque, **92-93** (1982), 301-313.

[HH] HARTSHORNE R., HIRSCHOWITZ A., *"Smoothing algebraic space curves"*, Alg. Geom. Proceedings, Sitges (1983). Lect. Notes Math., **1124**, Springer (1985), 98-131.

[K] KLEIMAN S., *"The transversality of a general translate"*, Compos. Math. (1974), 287–297.

[M] MATIGNON M., *"Genre et genre résiduel des corps de fonctions valués"*. Manuscr. Math., **58**, (1987), 179-214.

[N1] NOBILE A., *"Genera of curves varying in a family"*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.. **(4) 20**, (1987), 465-473.

[N2] NOBILE A., *"On specializations of curves I"*, Trans. A.M.S. **282** (1984), 739-748.

[N3] NOBILE A., *"On the geometric realization of Albanese's inequality"*. preprint.

[P] PÁSÁRESCU O., *"On the existence of the algebraic curves in projective n-space"*, Arch. Math. **51**. 255-265, (1988).

[R] RATHMAN J., *"The genus of algebraic spaces curves"*. Thesis, Univ. Of Cal., Berkeley, (1986).

[S] SERNESI E. *"On the existence of certain families of curves"*, Inv. Math. **75** (1984), 125–171.

Louisiana State University
Department of Mathematics
Baton Rouge, Louisiana, 70803
U.S.A.