

JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

B. KAHN

Quelques remarques sur le u -invariant

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 2, n° 1 (1990),
p. 155-161

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_1_155_0

© Université Bordeaux 1, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

Quelques remarques sur le u -invariant.

par B. KAHN

(Toutes les notations concernant les formes quadratiques sont empruntées au livre de T.Y. Lam [Lam]).

Soit F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$. Le u -invariant de F est le plus petit entier $u(F)$ tel que toute forme quadratique sur F de rang $\geq u(F)$ soit isotrope, ou $+\infty$ si un tel entier n'existe pas. Pour que $u(F) < +\infty$, il faut que F ne soit pas formellement réel. Pour certains corps F , on connaît la valeur de $u(F)$:

THEOREME 1. a) Si F est de type fini sur un corps algébriquement clos C , $u(F) = 2^{\deg \text{tr}(F/C)}$.

b) Si F est de type fini sur un corps fini \mathbb{F}_p , $u(F) = 2^{\deg \text{tr}(F/\mathbb{F}_p)} + 1$.

c) Si F est de type fini et de degré de transcendance 1 sur un corps ordonné maximal, et si F n'est pas formellement formellement réel, $u(F) = 2$.

d) Si F est un corps de nombres totalement imaginaire, $u(F) = 4$.

DÉMONSTRATION: a) L'inégalité $u(F) \leq 2^d$, où $d = \deg \text{tr}(F/C)$, résulte du théorème de Tsen- Lang qui implique que le corps F est C_d ([G], th. 3.6). L'inégalité opposée résulte du lemme suivant :

LEMME 1. 1) Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions F et de corps résiduel k (supposé de caractéristique $\neq 2$). Alors $u(F) \geq 2u(k)$.

2) Soit F/k une extension de type fini, de degré de transcendance d . Alors $u(F) \geq 2^d u(\ell)$ pour une extension finie ℓ de k convenable.

DÉMONSTRATION DE 1): Soit \bar{q} une forme quadratique anisotrope sur k . Relevons \bar{q} coefficient par coefficient en une forme quadratique q sur A . Si π est une uniformisante de A , on vérifie facilement par un raisonnement de descente infinie que la forme $q \perp \pi q$ est anisotrope sur F .

DÉMONSTRATION DE 2): Par récurrence, on se ramène au cas $d = 1$. On écrit F comme extension finie de $k(T)$ (fractions rationnelles) ; la valuation

discrète sur $k(T)$ donnée par l'idéal (T) de $k[T]$ peut se prolonger en une valuation discrète de F , dont le corps résiduel est une extension finie de k . On peut alors appliquer 1).

Remarque 1. Cette démonstration montre que, dans 2), on peut prendre $\ell = k$ si l'extension F/k est transcendante pure.

L'énoncé b) du théorème 1) se démontre comme a), en utilisant le théorème de Chevalley qui dit qu'un corps fini est $C_1([G]$, ch.3). Enfin, c) et d) sont bien connus ([Lam], ch. XI, exemples 4.2(2) et (5)).

Remarque 2. Tous les énoncés du théorème 1 peuvent se résumer par la formule $u(F) = 2^{cd(F)}$, où $cd(F)$ est la dimension cohomologique de F , c'est-à-dire de son groupe de Galois absolu, cf [CG], p. II-13 prop. 11, p. II-10 exemple 3.3, p. S-1 premier supplément, p. II-16 prop. 13.

En général, la détermination de $u(F)$ est un problème difficile. On ignore encore à l'heure actuelle quel est l'ensemble des valeurs prises par $u(F)$. On sait que :

$u(F) \notin \{3, 5, 7\}$ ([Lam], ch. XI, prop. 4.8) ; si $I^3 F = 0$, et $u(F) > 1$, $u(F)$ est pair (ibid., lemme 4.9).

On peut conjecturer que, si F est de type fini sur \mathbb{Q} ou sur un corps ordonné maximal et n'est pas formellement réel, on a encore $u(F) = 2^{cd(F)}$. En 1953, Kaplansky a conjecturé que $u(F)$ était toujours une puissance de 2 ([K]). Merkurjev vient de démontrer que cette conjecture est fausse, en prouvant que $u(F)$ peut prendre toute valeur paire ([M], cf aussi [T2]). Plus précisément, pour tout $m \geq 1$, Merkurjev montre qu'il existe un corps F tel que

$$u(F) = 2m ; cd(F) \leq 2 ; \text{ en particulier } I^3 F = 0.$$

Je me propose ici d'estimer $u(F)$ en termes du *groupe de Brauer* de F ; l'énoncé précis est essentiellement une reformulation de lemmes utilisés par Merkurjev, mais j'espère qu'il présentera malgré tout un intérêt. Notons $Br(F)$ le groupe de Brauer de F , et $Quad(F)$ le sous-groupe de $Br(F)$ engendré par les classes d'algèbres de quaternions.¹ A F , on associe un invariant $\lambda(F)$:

$\lambda(F) = \min\{\lambda \mid \text{tout élément de } Quad(F) \text{ est somme de } \lambda \text{ classes d'algèbres de quaternions}\}.$

THÉORÈME 2. a) Pour tout corps F , $u(F) \geq 2(\lambda(F) + 1)$.

¹Un théorème de Merkurjev [MS] implique que $Quad(F)$ est le sous-groupe de 2-torsion de $Br(F)$, mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

b) Si $I^3 F = 0$ et $u(F) > 1$, $u(F) = 2(\lambda(F) + 1)$.

Pour démontrer le théorème 2, on va rappeler quelques résultats sur l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique, démontrés et utilisés par Merkurjev dans [M]. Pour toute forme quadratique q , on note $C(q)$ l'algèbre de Clifford de q ([Lam], ch. V). Si q est de rang pair $2m$, $C(q)$ est une F -algèbre centrale simple de degré 2^m ; si q et q' sont de rang pair, on a la formule (loc. cit., cor. 2.7) :

$$(1) \quad C(q \perp q') \cong C(q) \otimes C(d_{\pm}q \cdot q'),$$

où $d_{\pm}q$ est le “discriminant à signe” de q , donné par $d_{\pm}q = (-1)^m \text{disc } q$ ([Lam], p. 38). Comme $C(< a, b >) = \begin{pmatrix} a & b \\ & F \end{pmatrix}$ ([Lam], ch. V, exemple 1.5 (3)), on voit que si q est de rang $2m$, $C(q)$ est produit tensoriel de m algèbres de quaternions. De plus, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. ([M]), lemme 1). 1) Si $q \in I^2 F$ est de rang $2m$, $C(q) \cong M_2(E(q))$, où $E(q)$ est produit tensoriel de $m - 1$ algèbres de quaternions.

2) Soit E un produit tensoriel de $m - 1$ -algèbres de quaternions. Alors il existe $q \in I^2 F$, de rang $2m$, telle que $E(q) \cong E$.

Soit $m = \lambda(F) + 1$ (supposé fini). Par définition de m , il existe des algèbres de quaternions $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ sur F telles que $[\kappa_1] + \dots + [\kappa_{m-1}] \in \text{Quad}(F)$ ne soit pas somme de $m - 2$ classes d'algèbres de quaternions. D'après la prop. 1, 1), il existe une forme quadratique $q \in I^2 F$, de rang $2m$, telle que $E(q) \cong \kappa_1 \otimes \dots \otimes \kappa_{m-1}$. Si q était isotrope, on pourrait écrire $q \cong q' \perp \mathbf{H}$, où $q' \in I^2 F$ est de rang $2m - 2$; alors on aurait $E(q) \cong M_2(E(q'))$, où $E(q')$ est produit tensoriel de $m - 2$ algèbres de quaternions. Cela montre que q est anisotrope, donc que $u(F) \geq 2m$. Si $\lambda(F)$ est infini, le même raisonnement montre que $u(F) = +\infty$.

Supposons maintenant $I^3 F = 0$. Cela entraîne que deux formes quadratiques sur F sont isométriques si et seulement si elles ont même rang, même discriminant à signe et même invariant de Clifford ([EL], th. 3.10 ; si q est de rang pair, son invariant de Clifford est par définition la classe de $C(q)$ dans $\text{Br}(F)$). On en déduit :

LEMME 2. Soit $q \in IF$ telle que $[C(q)] = 0$ dans $\text{Br}(F)$. Alors $q \cong < -1, a > \perp t\mathbf{H}$, où $a = d_{\pm}q$ et $t \in \mathbb{N}$.

Posons encore $m = \lambda(F) + 1$ (supposé fini), et soit q une forme quadratique de rang $2m + 2$. Par hypothèse, $[C(q)] = [E]$, où E est produit

tensoriel de $m - 1$ algèbres de quaternions. D'après la partie 2) de la proposition 1, il existe $Q \in I^2 F$, de rang $2m$, telle que $E(Q) \cong E$. D'après la formule (1), on a :

$$[C(q \perp -Q)] = [C(q)] + [C(-Q)] = [C(q)] + [C(Q)] = 0.$$

D'après le lemme 1, on a $q \perp -Q \cong \langle -1, a \rangle \perp t\mathbf{H}$, où $a = d_{\pm q}$ et $t \in \mathbb{N}$. Comme q est de rang $2m + 2$, on a $t = 2m$. On peut donc écrire :

$$q \perp -Q \cong \langle -1, a \rangle \perp Q \perp -Q.$$

Par le théorème de simplification de Witt, cela implique $q \cong \langle -1, a \rangle \perp Q$. Mais $Q \in I^2 F$ est universelle, c'est-à-dire représente tout élément de F^* (cf [Lam], ch. XI, dém. du lemme 4.9), donc q est isotrope. Comme $u(F)$ est pair (ibid.), on a $u(F) \leq 2m$, ce qui démontre la partie 2) du théorème 2.

COROLLAIRE. (cf [MS], prop. (16.10)). *Si F est l'un des corps apparaissant dans le th. 1, on a $\lambda(F) \leq 2^{cd(F)-1} - 1$.*

Remarque 3. Conurremment à $\lambda(F)$ on peut introduire un autre invariant $\lambda'(F)$, lui aussi lié aux algèbres centrales simples sur F :

$\lambda'(F) = \sup\{\lambda' \mid \text{il existe un corps gauche de centre } F, \text{ produit tensoriel de } \lambda' \text{ algèbres de quaternions}\}.$

Cet invariant tire son importance du théorème principal de Merkurjev ([M], th. 1, voir aussi [T2], th. 1), qui implique que, si q est une forme quadratique de corps de fonctions $F(q)$, on a $\lambda'(F(q)) \geq \lambda'(F)$ dès que $q \in I^3 F$, que $q \in I^2 F$ avec $\dim q \geq 2\lambda'(F) + 4$ ou que $q \notin I^2 F$ avec $\dim q \geq 2\lambda'(F) + 2$. Les deux invariants $\lambda'(F)$ et $\lambda(F)$ sont reliés par la

PROPOSITION 2. 1) Pour tout corps F , on a $\lambda'(F) \leq \lambda(F)$.

2) Si $\lambda'(F) \leq 2$, on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$.

3) Si $\lambda'(F) = 3$, on a $\lambda(F) = 3$ ou 4.

DÉMONSTRATION: 1) est évident. Si $n = \lambda(F)$, pour tout $(n + 1)$ -uplet $(\kappa_1, \dots, \kappa_{n+1})$ d'algèbres de quaternions sur F , l'algèbre $\kappa_1 \otimes \dots \otimes \kappa_{n+1}$ est de la forme $M_2(A)$, où A est une algèbre de degré 2^n . Si $n \leq 2$, il résulte d'un théorème d'Albert (cf [R]) que A est produit tensoriel de n algèbres de quaternions ; on a donc $\lambda'(F) \leq n$, et donc $\lambda(F) = \lambda'(F)$, ce qui démontre 2). Finalement, si $n = 3$ et si κ_5 est une autre algèbre de

quaternions, on a $A \otimes \kappa_5 \cong M_2(B)$, où B est de degré 8 ; il résulte d'un théorème de Tignol ([T1]) que $M_2(B)$ est produit tensoriel de 4 algèbres de quaternions, et donc que $\lambda(F) \leq 4$, ce qui démontre 3).

Si $n \geq 3$, on sait que pour F convenable il existe un corps gauche de centre F , de degré 2^n , dont la classe est dans $Quad(F)$ et qui n'est pas produit tensoriel d'algèbres de quaternions ([ART], [ELTW]) ; il est probable qu'on a en général $\lambda'(F) < \lambda(F)$. Des arguments "génériques" impliquent qu'il existe une fonction f telle que $\lambda(F) \leq f(\lambda'(F))$ pour tout corps F ([T3], §1) ; il serait intéressant d'estimer, ou au moins de majorer f de manière explicite. Par ailleurs, on peut se demander si on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$ lorsque F est d'un type particulier, par exemple lorsque $I^3F = 0$. C'est en tout cas vrai si $cd_2(F) = 2$; en fait :

THÉORÈME 3. (Merkurjev). *Supposons que $cd_2(F) = 2$. Alors :*

- a) *Tout corps gauche de centre F dont la classe est dans $Quad(F)$ est produit tensoriel d'algèbres de quaternions.*
- b) *Une forme quadratique $q \in I^2F$ est anisotrope si et seulement si $E(q)$ est un corps.*

En particulier, on a $\lambda'(F) = \lambda(F)$.

DÉMONSTRATION (Merkurjev). Soit F un corps quelconque. Il est clair que si $q \in I^2F$ et que $E(q)$ est un corps, alors q est anisotrope (cf [M], cor. au lemme 1, ou l'argument ci-dessus suivant la proposition 1). Inversement, la proposition 1 montre que b) implique formellement a) dans le théorème 3. Il suffit donc de montrer que, lorsque $cd_2(F) = 2$, $E(q)$ est un corps pour toute forme quadratique anisotrope $q \in I^2F$.

Soient F_1 une extension algébrique parfaite de F , L une clôture algébrique de F_1 et S un 2-sous-groupe de Sylow de $Gal(L/F_1)$. Le corps K des invariants de S a les propriétés suivantes :

- i) toute sous-extension finie de K/F est de degré impair ;
- ii) toute sous-extension finie de L/K est composée d'extensions quadratiques successives.

D'après le théorème de Springer ([Lam], ch. VII, th. 2.3), q_K est encore anisotrope, et on a évidemment encore $cd_2(K) \leq 2$; il suffit donc de démontrer 2) pour q_K , c'est-à-dire qu'on peut supposer $F = K$.

Soit $2m$ le rang de q , et soit $e(q)$ l'indice de $E(q)$: on a $e \leq 2^{m-1}$, et on doit montrer que $e = 2^{m-1}$. On va démontrer que $e \geq 2^{m-1}$ par récurrence sur e .

Le cas $e = 1$ est impossible. Si $e = 2$, $\dim q \geq 4$ et $E(q)$ est semblable à une algèbre de quaternions $\begin{pmatrix} a & b \\ & F \end{pmatrix}$, et le lemme 2 montre que $q \perp -q'$ est hyperbolique, donc que $q \cong q'$ puisque q est anisotrope. Supposons $e \geq 4$. Soit D un corps gauche de centre F semblable à $E(q)$ (donc $\deg D = e$), et soit M un sous-corps commutatif maximal de D . Vu la propriété (ii), M/F contient une sous-extension quadratique N/F ; il est clair que $D \otimes_F N$ n'est pas un corps, donc que $e(q_N) \leq e(q)/2$. Par récurrence, on a donc $e(q_N) \geq 2^{m'-1}$, où $2m'$ est le rang de la partie anisotrope de q_N , c'est-à-dire le $2m$ -indice (q_N). Le lemme suivant entraîne que $m' \geq m - 1$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. *Soit F un corps tel que $I^3F = 0$, soit N une extension quadratique de F et soit $q \in I^2F$ une forme quadratique anisotrope de rang ≥ 6 . Alors l'indice de q_N est ≤ 2 .*

DÉMONSTRATION: Soit $N = F(\sqrt{a})$. D'après [Lam], ch VII, lemme 3.1, q peut s'écrire $\langle 1, -a \rangle \otimes \Phi \perp \Psi$ avec Φ de rang ϵ , où 2ϵ est l'indice de q_N . Si $\epsilon \geq 2$, Φ contient une sous-forme de rang 2, donc $\langle 1, -a \rangle \otimes \Phi$ contient une sous-forme isométrique à une 2-forme de Pfister, qui est universelle puisque $I^3F = 0$. Si $\dim q \geq 6$, cela implique que q est isotrope, ce qui est absurde.

REFERENCES

- [ART] S.A. AMITSUR, L-H. ROWEN, J-P. TIGNOL, *Division algebras of degree 4 and 8 with involution* Israel J. Math. **33** (1979), 133–148.
- [CG] J-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, Lect. Notes in Math. **5**. Springer, Berlin, 1965.
- [EL] R. ELMAN, T.Y. LAM, *On the quaternion symbol homomorphism* $g_F : k_2F \rightarrow B(F)$, Lect. Notes in Math. **342**, 447–463. Springer, New-York, 1973.
- [ELTW] R. ELMAN, T.Y. LAM, J-P. TIGNOL, A. WADSWORTH, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions*, I, Amer. J. Math **105** (1983), 1119–1170.
- [G] M. GREENBERG, *Lectures on forms in many variables*. Benjamin, New York, 1969.
- [K] I. KAPLANSKY *Quadratic forms*, J. Soc. Math. Japan **5** (1953), 200–207.
- [Lam] T.Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms*. Benjamin, New-York, 1980.

- [M] A.S. MERKURJEV, *Simple algebras over function fields of quadrics*. preprint, 1989.
- [MS] A.S. MERKURJEV, A.A. SUSLIN, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011-1046. Trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307-341.
- [R] M.L. RACINE, *A simple proof of theorem of Albert*, Proc. AMS **43** (1974), 487-488.
- [T1] J-P. TIGNOL, *Sur les classes de similitude de corps à involution de degré 8*, C.R. Acad. Sci. Paris **286**.
- [T2] J-P. TIGNOL, *Réduction de l'indice d'une algèbre simple sur le corps des fonctions d'une quadrique*. preprint, 1989.
- [T3] J-P. TIGNOL, *On the length of decompositions of central simple algebras in tensor products of symbols*, in Methods of ring theory, NATO ASI Series, Ser. C **129**, 505-516. Reidel, Dordrecht, 1984.

URA 212-CNRS
Mathématiques-Université de Paris 7
5ème étage, couloir 45-55
2, Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05 (FRANCE).