JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Simon DAUGUET

Généralisations quantitatives du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

Tome 27, n° 2 (2015), p. 483-498.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2015__27_2_483_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **27** (2015), 483–498

Généralisations quantitatives du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

par Simon DAUGUET

A l'occasion de la conférence THUE 150
en l'honneur du 150e anniversaire d'Axel Thue

Résumé. Dans cet article, on étend un critère d'indépendance linéaire dû à Fischler, qui est une généralisation quantitative du critère de Nesterenko, en affaiblissant fortement les hypothèses sur les diviseurs des coefficients des formes linéaires et en autorisant (dans une certaine mesure) ces formes à ne plus tendre vers 0. Ce nouveau critère est ensuite formulé dans un esprit plus à la Siegel en faisant intervenir une relation de récurrence vérifiée par la suite de formes linéaires. On en démontre également une version plus générale, en termes de corps convexes et de réseaux de $\mathbb{R}^n$.

Abstract. *Quantitave Generalizations of Nesterenkos's Linear Independence Criteria.*
In this paper we extend Fischler's quantitative generalization of Nesterenko's linear independence criterion, by weakening the hypotheses on the divisors of the coefficients of the linear forms and allowing (to some extent) the linear forms not to tend to 0. Another version of this result is proved, in the spirit of Siegel's criterion, with a recurrence relation verified by the linear forms. Finally, the results are restated in a more general setting in terms of convex bodies and lattices of $\mathbb{R}^n$.

1. Introduction

En 2000, Rivoal [18] et Ball-Rivoal [1] ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers impairs en lesquels la fonction zêta de Riemann prend des valeurs irrationnelles. À la suite de ce théorème, une recherche du prochain $\zeta(2k+1)$ irrationnel après la constante d'Apéry $\zeta(3)$ a été lancée. Après un premier résultat de Rivoal [19], Zudilin [23] a démontré qu'au moins un des quatre nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel. Il a également montré avec Fischler [13] qu'il existe un entier impair $j \leq 139$ tel que $1, \zeta(3), \zeta(j)$

Manuscrit reçu le 14 mars 2014, révisé le 8 avril 2014, accepté le 4 septembre 2014.
Mathematics Subject Classification. 11J13, 11J72, 11J82.

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (ce qui raffine des résultats antérieurs de Ball-Rivoal [1] et Zudilin [24]).

Dans les preuves de ces énoncés (et notamment du résultat de Rivoal et Ball-Rivoal), le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [16] joue un rôle déterminant.

Théorème 1.1 (Critère d'indépendance linéaire de Nesterenko)**.** *Soit* $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ *des réels,* $p \geq 2$*. Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta > 1$*. On considère* p *suites d'entiers* $(\ell_{1,n})_n, \ldots, (\ell_{p,n})_n$ *telles que :*

(1) $\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{p-1} \ell_{i,n}\xi_i + \ell_{p,n}\right|^{1/n} = \alpha$,

(2) pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\limsup_{n\to\infty} |\ell_{i,n}|^{1/n} \leq \beta$.

Alors on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \geq 1 - \frac{\log \alpha}{\log \beta}\,.$$

Il fut généralisé à plusieurs reprises. Nesterenko lui-même [17] en donne une version p-adique. Chantanasiri [4] a donné une généralisation à $\mathbb{C}_p$. Töpfer [21] a utilisé la méthode de Nesterenko pour développer un critère d'indépendance algébrique et l'utilise [22] pour démontrer des résultats d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions de Mahler. Bedulev [2] donne un critère pour des formes linéaires à coefficients dans un corps de nombres.

Dans [13], Fischler et Zudilin ont généralisé le critère de Nesterenko pour exploiter la présence de diviseurs des coefficients des formes linéaires. Fischler démontre aussi dans [9] une version du critère de Nesterenko pour des formes linéaires oscillantes. Et dans [10], il en donne une version dans le cas d'une suite de formes linéaires petites en plusieurs vecteurs. Il démontre notamment le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Fischler, 2011)**.** *Soit* $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$ *avec* $p \geq 2$*.*

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > 0$ *des réels deux à deux distincts et* $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \geq 0$*. Soit* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que*

$$Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$$

quand $n \to +\infty$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$*, soit* $\ell_{i,n} \in \mathbb{Z}$ *et* $\delta_{i,n}$ *un diviseur positif de* $\ell_{i,n}$ *tels que :*

(1) $\delta_{i,n}$ *divise* $\delta_{i+1,n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, p-1\}$*.*

(2) $\frac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}}$ *divise* $\frac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $0 \leq i < j \leq p$*, avec* $\delta_{0,n} = 1$*.*

(3) pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$*.*

(4) $|\ell_{p,n}\xi_j - \ell_{j,n}| = Q_n^{-\tau_j + o(1)}$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, p-1\}$*.*

(5) $\max_{1\leq i\leq p} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$*.*

Soient $\varepsilon > 0$*,* Q *suffisamment grand par rapport à* ε*, et* $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$*,* $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$ *et pour tout* $i \in \{1, \ldots, p-1\}$*,* $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$*, où* $\Phi(Q) = \max\{k \in \mathbb{N}, Q_k \leq Q\}$*. Alors on a :*

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}.$$

En particulier, les nombres $1, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$*.*

Cet énoncé est le Corollary 3 de [10] dans le cas où $\delta_{i,n} = 1$ pour tous i, n. Le cas général se déduit facilement du Theorem 3 de [10] en prenant $k+1 = p$, $\omega_j = \varphi_j = 0$, $v_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -\xi_i)$ avec le 1 en i-ème position pour $1 \leq i \leq p-1$ et $v_p = (\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, 1)$.

Dans cet article, on généralise le théorème 1.2 en démontrant notamment le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ *des réels. Soient* $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$ *des réels 2 à 2 distincts et* $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'entiers strictement croissante telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$*. Pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$*. Soient maintenant des entiers* $\ell_{i,n}$ *pour* $i = 1, \ldots, p$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, tels que :*

(1) $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$*,* $\delta_{i,n} | \ell_{i,n}$ *;*

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$*,* $|\ell_{i,n} - \ell_{p,n}\xi_i| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$ *;*

(3) $|\ell_{p,n}| = Q_n^{1+o(1)}$*.*

Soient $\varepsilon > 0$*,* Q *suffisamment grand par rapport à* ε *et* $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ *tel que pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$*,* $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$ *et pour tout* $i \in \{1, \ldots, p-1\}$*,* $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$*, où* $\Phi(Q) = \max\{k \in \mathbb{N}, Q_k \leq Q\}$*. Alors on a :*

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}.$$

La différence majeure avec le théorème 1.2 de Fischler est certainement le fait qu'ici, les τ_i peuvent être négatifs, tant qu'ils restent > -1. Auparavant, les formes linéaires en 1 et ξ_i devaient tendre vers 0, alors que maintenant, elles peuvent tendre vers $+\infty$. En revanche, on perd l'indépendance linéaire des ξ_i qui provenait justement du fait d'avoir les $\tau_i > 0$. D'autre part, les conditions de divisibilité sur les diviseurs $\delta_{i,n}$ ont été fortement affaiblies. On ne demande même plus de comportement asymptotique spécifique pour ces suites de diviseurs. En revanche, les comportements asymptotiques des suites de formes linéaires ont été renforcés : dans le théorème 1.2 de Fischler, on ne demande qu'une majoration alors que dans le théorème 1.3 on exige que les coefficients soient exactement de taille $Q_n^{1+o(1)}$.

Le théorème 1.3 est démontré au § 4 ci-dessous, comme cas particulier d'un résultat plus général qui fait l'objet du § 3 et qui concerne une base et une suite de réseaux quelconques. Par ailleurs, dans le cas général comme dans le cas particulier, on démontre des variantes “à la Siegel” de ces critères. Enfin, au § 5, on étudie l'optimalité de ces critères et on démontre une réciproque partielle.

Ces critères ont été appliqués dans [6], en collaboration avec Zudilin : en construisant des approximations simultanées de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ à l'aide d'outils hypergéométriques, ils permettent d'obtenir une mesure d'indépendance linéaire restreinte de 1, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ (sachant que l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de ces trois nombres reste conjecturale).

Certains détails supplémentaires pourront être obtenus dans la thèse de l'auteur [5], notamment sur l'application des résultats montrés ici à des formes linéaires en 1, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

2. Notations

Dans la suite de cet article, p sera un entier ≥ 2.

Étant donné une suite strictement croissante d'entiers $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$\Phi(Q) = \max\{k \in \mathbb{N}, Q_k \leq Q < Q_{k+1}\}\,.$$

Lorsque $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$, on s'intéresse pour $\varepsilon, Q > 0$ au corps convexe suivant :

$$\mathcal{C}_{Q,\varepsilon} = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, |\lambda_i| \leq Q^{\tau_i-\varepsilon} \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1 \text{ et } |\lambda_p| \leq Q^{-1-\varepsilon}\right\}$$

qui est symétrique par rapport à l'origine. Dans le cas particulier étudié au paragraphe 4, il s'agit essentiellement de

$$\mathcal{C}'_{Q,\varepsilon} = \left\{\begin{matrix}(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p, |a_i| \leq Q^{\tau_i-\varepsilon} \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1 \\ \text{et } |a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| \leq Q^{-1-\varepsilon}\end{matrix}\right\}\,.$$

Par ailleurs, étant donné un réseau Λ du dual $(\mathbb{R}^p)^*$ de $\mathbb{R}^p$, on note $\Lambda^\perp$ le réseau dual, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^p$ tels que $L(x) \in \mathbb{Z}$ pour toute forme linéaire $L \in \Lambda$ (voir par exemple [3] chapitre I.5 page 23). Dans le cas particulier de la section 4 ci-dessous, $\Lambda_n = \bigoplus_{i=1}^p \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ est l'ensemble des formes linéaires $L = \ell_1 X_1 + \cdots + \ell_p X_p$ telles que $\delta_{i,n}|\ell_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$. On voit alors que $\Lambda_n^\perp$ est l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{Q}^p$ tels que $\delta_{i,n} x_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

On introduit également le cadre particulier dans lequel on se place dans toute la section 4 :

(†) $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\xi_i)$ avec le 1 en i-ème position pour $1 \leq i \leq p-1$ et $e_p = (\xi_1, \dots, \xi_{p-1}, 1)$, avec le réseau Λ_n de la forme $\bigoplus_{i=1}^p \delta_{i,n}\mathbb{Z}$.

Enfin, on fixe une norme $\|.\|$ sur $(\mathbb{R}^p)^*$.

3. Critères quantitatifs généraux

Le théorème suivant généralise le théorème 1.3 de l'introduction (qui est obtenu dans le cas particulier (†)).

Théorème 3.1. *Soit* $(e_1, \dots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{R}^p$*.*

Soient $\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$ *des réels* > -1 *et 2 à 2 distincts et* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers strictement croissante telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$*. Soit* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réseaux de* $(\mathbb{R}^p)^*$ *telle que* $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$*. On considère une suite* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de formes linéaires telle que*

(1) $L_n \in \Lambda_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

(2) $|L_n(e_i)| = Q_n^{-\tau_i+o(1)}$ *pour* $1 \leq i \leq p-1$*,*

(3) $\|L_n\| = Q_n^{1+o(1)}$*.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ *et pour tout* Q *assez grand en termes de* ε*, on a*

$$\Lambda^{\perp}_{\Phi(Q)} \cap \mathcal{C}_{Q,\varepsilon} = \{\mathbf{0}\}\,.$$

La preuve [10] du théorème 1.2 repose sur le lemme suivant (Lemma 3 de [10]) :

Lemme 3.1 (Fischler, 2011)**.** *Soit* $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *une matrice carrée de taille* p*, dont les coefficients* $m_{i,j}$ *sont non nuls et vérifient*

(3.1)

$$|m_{i',j}m_{i,j'}| \leq \frac{1}{(p+1)!}|m_{i,j}m_{i',j'}| \text{ pour tous } i,j,i',j' \text{ avec } i < i' \text{ et } j < j'\,.$$

Alors M *est inversible.*

Ce lemme est démontré et utilisé dans [10] (avec une majoration des coeficients de M^{-1} qui est inutile ici) sous l'hypothèse que les coefficients $m_{i,j}$ sont strictement positifs. Mais la preuve de [10] fonctionne plus généralement dès que $m_{i,j} \neq 0$, car elle utilise seulement les majorations (3.1) sur les valeurs absolues des coefficients.

Démonstration du théorème 3.1. Tout d'abord, considérons la norme N sur $\mathbb{R}^p$ définie par $N(\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p) = \max_{1\leq i\leq p} |\mu_i|$ et notons $|||.|||$ la norme duale sur $(\mathbb{R}^p)^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p$ tel que $N(x) = 1$ et

$$|||L_n||| = |L_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{p} |\mu_i L_n(e_i)| \leq |L_n(e_p)| + \sum_{i=1}^{p-1} Q_n^{-\tau_i+o(1)}\,.$$

Comme $\tau_i > -1$ pour tout $1 \leq i \leq p-1$, l'hypothèse (3) montre (puisque toutes les normes sont équivalentes sur $(\mathbb{R}^p)^*$) que $|L_n(e_p)| \geq Q_n^{1+o(1)}$. Comme l'inégalité dans l'autre sens découle immédiatement de l'hypothèse (3), on a égalité.

Comme les τ_i jouent des rôles symétriques, quitte à les réordonner, on peut supposer $-1 < \tau_1 < \cdots < \tau_{p-1}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et Q suffisamment grand par rapport à ε. Soit $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\begin{cases} \tau_i\left(1-(1+\varepsilon_1)^{p-1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} & \text{pour tout } i \in \{1,\dots,p-1\} \\ (\varepsilon_1+1)^{p-1} - 1 < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} . \tag{3.2}$$

On remarque que seuls les $i \in \{1,\dots,p-1\}$ tels que $\tau_i < 0$ fournissent une contrainte sur ε_1.

On définit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par $\varphi(n) - 1 = \Phi(Q_n^{1+\varepsilon_1}) = \max\{k \in \mathbb{N}, Q_k \leq Q_n^{1+\varepsilon_1}\}$. On en déduit $\varphi(n) \geq n+1$, d'où $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$. Ainsi, $Q_{\varphi(n)} = Q_{\varphi(n)-1}^{1+o(1)}$. Mais d'autre part, la définition de φ nous donne

$$Q_{\varphi(n)} = Q_n^{1+\varepsilon_1+o(1)},$$

de sorte que

$$Q_{\varphi_i(n)} = Q_{\varphi_{i-1}(n)}^{1+\varepsilon_1+o(1)} = Q_n^{(1+\varepsilon_1)^i+o(1)},$$

où φ_i est la i-ème itérée de φ (*i.e.*, $\varphi_i = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{i \text{ fois}}$), avec $\varphi_0(n) = n$ et $\varphi_1(n) = \varphi(n)$.

On choisit maintenant $n = \Phi(Q)$. Par définition de $\Phi(Q)$, on a donc $Q_n \leq Q < Q_{n+1} \leq Q_{\varphi(n)}$. On remarque alors que $n \xrightarrow[Q\to\infty]{} +\infty$ et donc $o(1)$ est une suite tendant vers 0 quand n ou Q tendent vers $+\infty$ indifféremment. On pourra donc utiliser $o(1) \xrightarrow[Q\to\infty]{} 0$ ou $o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sans distinction ; on notera simplement $o(1)$. De plus, l'encadrement précédent nous donne aussi $Q_n = Q^{1+o(1)}$.

En posant $M_n = (L_{\varphi_{i-1}(n)}(e_j))_{1\leq i,j\leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a

$$\left|\frac{L_{\varphi_{i'-1}(n)}(e_j)L_{\varphi_{i-1}(n)}(e_{j'})}{L_{\varphi_{i-1}(n)}(e_j)L_{\varphi_{i'-1}(n)}(e_{j'})}\right| = Q_n^{-(\tau_{i'}-\tau_i)((1+\varepsilon_1)^{j'}-(1+\varepsilon_1)^j)+o(1)},$$

et donc le lemme 3.1 s'applique pour n suffisamment grand. Ainsi, la matrice M_n est inversible et les formes linéaires $L_n, \dots, L_{\varphi_{p-1}(n)}$ sont linéairement indépendantes.

On considère $P \in \mathcal{C}_{Q,\varepsilon} \cap \Lambda_n^\perp$ non nul. Si Q est assez grand, $L_n, \dots, L_{\varphi_{p-1}(n)}$ forment une base de l'espace dual de $\mathbb{R}^p$: il existe $k \in \{0,\dots,p-1\}$ tel que $L_{\varphi_k(n)}(P) \neq 0$.

Par hypothèse sur la suite de réseaux, on a $\Lambda_n^\perp \subset \Lambda_{\varphi^k(n)}^\perp$. Donc, par définition du réseau dual, $L_{\varphi_k(n)}(P) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Mais en notant $P = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ comme dans la définition de $\mathcal{C}_{Q,\varepsilon}$, on a :

$$
\begin{aligned}
|L_{\varphi_k(n)}(P)| &\leq \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i||L_{\varphi_k(n)}(e_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p-1} Q^{\tau_i-\varepsilon}\left(Q_n^{(1+\varepsilon_1)^k+o(1)}\right)^{-\tau_i+o(1)} \\
&\qquad\qquad\qquad + Q^{-1-\varepsilon}\left(Q_n^{(1+\varepsilon_1)^k+o(1)}\right)^{1+o(1)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{p-1} Q^{\tau_i(1-(1+\varepsilon_1)^k)-\varepsilon/2} + Q^{(1+\varepsilon_1)^k-1-\varepsilon/2}.
\end{aligned}
$$

Mais par le choix (3.2) de ε_1, chacun des exposants est < 0. Donc, en prenant Q assez grand, on aura $|L_{\varphi_k(n)}(P)| < 1$, ce qui aboutit à une contradiction. □

Le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [16] admet un analogue "à la Siegel" [20] (voir [7] Chapitre 2, §1, pages 81-82 et Chapitre 5, §2, pages 215-216) dont la preuve repose simplement sur un calcul de déterminant (voir par exemple la proposition 1 de [10] ou la proposition 4.1 de Marcovecchio [15]). Dans le cas dual où on part d'approximations simultanées de $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$, on peut de même obtenir un analogue du théorème 1.2 ; il s'agit (en l'absence de diviseurs) d'un cas particulier de la proposition 1 de [10]. Pour exploiter la présence de diviseurs $\delta_{i,n}$, on peut appliquer le résultat suivant "à la Siegel", dans lequel les conditions sur les tailles des objets sont affaiblies.

Théorème 3.2. *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$.*

Soient $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}$ des réels > -1 et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. Soit $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réseaux de $(\mathbb{R}^p)^*$ telle que $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$. On considère une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires telle que

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n \in \Lambda_n$;*
2. *$|L_n(e_i)| \leq Q_n^{-\tau_i+o(1)}$ pour $1 \leq i \leq p-1$;*
3. *$\|L_n\| \leq Q_n^{1+o(1)}$;*
4. *la suite de formes linéaires vérifie une relation de récurrence : il existe $n_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, il existe des nombres réels $\alpha_0(n), \ldots, \alpha_{p-1}(n)$ tels que $L_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(n) L_{n+i}$ avec $\alpha_0(n) \neq 0$.*

On suppose enfin qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $L_{n_2}, \ldots, L_{n_2+p-1}$ soient linéairement indépendantes.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout Q assez grand en termes de ε, on a

$$\Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} \cap \mathcal{C}_{Q,\varepsilon} = \{\mathbf{0}\}.$$

Notons qu'à la place de la relation de récurrence et de l'existence de p formes linéaires consécutives linéairement indépendantes, on peut supposer que parmi k formes linéaires consécutives $L_n, \dots, L_{n+k-1}$, il y en a toujours p qui sont linéairement indépendantes (où $k \geq p$ est un entier fixé). En effet, on peut alors noter φ l'extraction telle que $\varphi(n+1) = \min\Big\{m > \varphi(n), L_m \notin \mathrm{Vect}(L_{\varphi(n-p+2)}, \dots, L_{\varphi(n)})\Big\}$, et on a $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq k-1$ qui est une constante, de sorte que $Q_{\varphi(n+1)} = Q_{\varphi(n)}^{1+o(1)}$. Comme $L_{\varphi(n)}, \dots, L_{\varphi(n+p-1)}$ est une base de $(\mathbb{R}^p)^*$, on peut écrire

$$L_{\varphi(n+p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) L_{\varphi(n+j)}$$

et on a nécessairement $\alpha_0(n) \neq 0$, car sinon

$$L_{\varphi(n+p)} \in \mathrm{Vect}(L_{\varphi(n+1)}, \dots, L_{\varphi(n+p-1)})$$

ce qui n'est pas possible par choix de φ. Et le théorème s'applique donc à la suite extraite grâce à φ.

Démonstration. Comme au début de la preuve de la proposition 3.1, on remarque que $|L_n(e_p)| \leq Q_n^{1+o(1)}$.

La matrice

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} L_n(e_1) & \dots & L_{n+p-1}(e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n(e_p) & \dots & L_{n+p-1}(e_p) \end{pmatrix}$$

est de déterminant non nul pour $n = n_2$. D'autre part, on remarque que $\mathrm{rg}(\Delta_{n+1}) = \mathrm{rg}(\Delta_n)$ car $\alpha_0(n) \neq 0$ donc pour tout $n \geq n_2$, $\mathrm{rg}(\Delta_n) = \mathrm{rg}(\Delta_{n_2}) = p$. Donc toutes les matrices Δ_n sont de déterminant non nul.

De même que dans la démonstration du théorème 3.1, on a $n \xrightarrow[Q \to +\infty]{} +\infty$ si $n = \Phi(Q)$, de sorte que $Q_n = Q^{1+o(1)}$ et les suites $o(1)$ sont des suites tendant vers 0 quand n ou Q tendent vers $+\infty$ indifféremment.

Soit $\varepsilon > 0$ et Q assez grand en termes de ε pour avoir $n = \Phi(Q) \geq n_1, n_2$. Soit $P \in \Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} \cap \mathcal{C}_{Q,\varepsilon} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Comme $\det(\Delta_n) \neq 0$, on sait que toute combinaison linéaire non triviale des lignes de la matrice Δ_n est non nulle. En particulier, il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $L_{n+k}(P) \neq 0$. En outre, $L_{n+k}(P) \in \mathbb{Z}$ car $P \in \Lambda_n^{\perp} \subset \Lambda_{n+k}^{\perp}$.

La fin de la preuve est alors identique à celle du théorème 3.1. $\square$

La fin de la preuve pourrait être remplacé par une appication de la partie facile du résultat de Mahler [14] sur les minimums successifs d'un convexe polaire par rapport au réseau dual.

4. Applications à une base particulière de $\mathbb{R}^p$ et à des réseaux particuliers

Dans toute cette section, on se place dans le cadre particulier (†) exposé dans la partie 2.

Pour démontrer le théorème 1.2, Fischler combine le lemme 3.1 (avec $p-1$ au lieu de p) avec le premier théorème de Minkowski sur les corps convexes. Pour démontrer le théorème 1.3 qui raffine le théorème 1.2, on applique ce lemme à une matrice carrée de taille p (en utilisant notamment l'hypothèse (iii)) et on obtient ainsi p vecteurs linéairement indépendants qui fournissent des approximations simultanées de $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ par des nombres rationnels ayant le même dénominateur. Cela permet de conclure la preuve par un argument à la Siegel, sans utiliser la géométrie des nombres. On évite ainsi les hypothèses sur les diviseurs, présentes dans le théorème 1.2, et on n'a pas besoin de supposer $\tau_1, \dots, \tau_{p-1} > 0$.

Une preuve directe du théorème 1.3 figure dans le paragraphe 4 de [5]. Dans cet article, on déduit ce résultat du théorème 3.1 démontré au § 3.

Outre les formes linéaires qui peuvent tendre vers $+\infty$ au lieu de seulement 0, les différences entre le théorème 1.3 et le théorème 1.2 sont les suivantes :

- Dans le théorème 1.3, on ne démontre plus que $1, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. C'est une contrepartie de la remarque précédente selon laquelle les formes linéaires ne tendent pas forcément vers 0. La conclusion du théorème 1.3 n'est donc que quantitative.
- Si $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$ quand $n \to +\infty$ avec $1 \le i \le p-1$ et $\gamma_i \ge 0$ tel que $\tau_i \le -\gamma_i$, alors l'entier $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i$ est majoré par $Q^{-\varepsilon + o(1)}$, donc $a_i = 0$ dès que Q est assez grand. Dans ce cas, le théorème 1.3 ne concerne pas vraiment ξ_i. Lorsque $\gamma_i = 0$ pour tout i (notamment si $\delta_{i,n} = 1$), la situation est identique à celle du théorème 1.2 : la conclusion concerne uniquement les ξ_i tels que $\tau_i > 0$.
- La condition (a) du théorème 1.2 sur les diviseurs a disparu et la condition (b) sur la divisibilité des quotients successifs a été restreinte à $i = 0$.
- La condition asymptotique (c) sur les suites de diviseurs $(\delta_{i,n})_{n \ge 0}$ a disparu. En revanche, la condition (e) sur la taille des coefficients de la suite des formes linéaires a été renforcée : dans le théorème 1.2, seule l'inégalité $\max_{0 \le i \le p} |\ell_{i,n}| \le Q_n^{1+o(1)}$ lorsque $n \to +\infty$ est exigée. Mais dans le théorème 1.3, on exige que la taille soit exactement de $Q_n^{1+o(1)}$. En d'autres termes, on change cette hypothèse en la condition plus forte $|\ell_{p,n}| = Q_n^{1+o(1)}$ quand $n \to +\infty$. Cette condition est cruciale dans la preuve et elle est souvent vérifiée en pratique.

Démonstration du théorème 1.3. Dans le cadre de (†), la famille $(e_1, \dots, e_p)$ forme une base de $\mathbb{R}^p$. On pose $\varepsilon' = \varepsilon/2$ et

$$Q' = \left(\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_i^2\right) Q^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon'}} . \tag{4.1}$$

Q' peut donc être pris aussi grand que nécessaire par rapport à ε', en choisissant Q assez grand.

La forme particulière des réseaux et l'hypothèse sur les $\delta_{i,n}$ nous permet d'avoir $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$. De plus, ce cadre nous permet également de vérifier toutes les hypothèses du théorème 3.1 pour obtenir, si Q est assez grand,

$$\Lambda_{\Phi(Q')}^{\perp} \cap \mathcal{C}_{Q',\varepsilon'} = \{\mathbf{0}\} . \tag{4.2}$$

Supposons qu'il existe $P = (a_1, \dots, a_p) \neq \mathbf{0}$ dans $\Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} \cap \mathcal{C}'_{Q,\varepsilon}$. On pose, pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\lambda_i = a_i - \xi_i \frac{\sum_{k=1}^{p-1} a_k \xi_k + a_p}{1 + \sum_{k=1}^{p-1} \xi_k^2}$$

et

$$u = \frac{\sum_{1\le k\le p-1} a_k \xi_k + a_p}{1 + \sum_{1\le k\le p-1} \xi_k^2} .$$

On obtient alors les relations suivantes pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$: $a_i = \lambda_i + u\xi_i$ et $a_p = u - \sum_{1\le i\le p-1} \lambda_i \xi_i$, d'où $P = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{p-1} e_{p-1} + u e_p$.

On a les majorations suivantes :

$$|u| \le \frac{1}{1 + \sum_{1\le i\le p-1} \xi_i^2} Q^{-1-\varepsilon} = Q'^{-1-\varepsilon'}$$

et, pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$ avec Q suffisamment grand :

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &\le \left(1 + \frac{|\xi_i|}{1 + \sum_{k=1}^{p-1} \xi_k^2}\right) Q^{\tau_i - \varepsilon} \\ &= \left(\left(1 + \sum_{k=1}^{p-1} \xi_k^2\right) Q^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\tau_i - \varepsilon/2}{1+\varepsilon}} \\ &= Q'^{\frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon}\left(\tau_i - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \le Q'^{\tau_i - \varepsilon'} \end{aligned}$$

par définition de Q' et car $\tau_i > -1$, $\frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon'}{1+2\varepsilon'} < 1$ et $\varepsilon/2 = \varepsilon'$. On a donc $P \in \mathcal{C}_{Q',\varepsilon'}$.

En outre, on a $Q' = \left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon'}} Q^{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}} > Q$ si Q est assez grand donc $\Phi(Q') \ge \Phi(Q)$ et $\Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} \subset \Lambda_{\Phi(Q')}^{\perp}$. Ce qui aboutit à une contradiction avec (4.2). □

En fait, l'implication démontrée ci-dessus entre la conclusion du théorème 3.1 et celle du théorème 1.3 est une équivalence. Le lecteur pourra trouver la preuve précise de cette équivalence dans la thèse de l'auteur [5] (proposition 6.3 au paragraphe 6.2).

Comme dans la section 3, on donne ici une version du théorème 1.3 plus "à la Siegel" dans le cadre particulier de cette section.

Théorème 4.1. *Soient $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ des réels quelconques, et $\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$ des réels > -1. Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \mathbb{Z}$ tels que $\delta_{i,n}$ divise $\delta_{i,n+1}$ et :*

(1) $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\delta_{i,n} | \ell_{i,n}$;

(2) $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, $|\ell_{i,n} - \xi_i \ell_{p,n}| \leq Q_n^{-\tau_i + o(1)}$;

(3) $|\ell_{p,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$;

(4) il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, il existe des réels $\alpha_0(n)$, $\alpha_1(n)$, ..., $\alpha_{p-1}(n)$ avec $\alpha_0(n) \neq 0$, tels que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on ait :

$$\ell_{i,n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) \ell_{i,n+j} .$$

On suppose enfin que si l'on note Δ_n la matrice suivante de taille $p \times p$:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \ell_{1,n} & \cdots & \ell_{1,n+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{p,n} & \cdots & \ell_{p,n+p-1} \end{pmatrix} ,$$

il existe un certain $n_2 \geq n_1$ tel que $\det(\Delta_{n_2}) \neq 0$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $Q > 0$ suffisamment grand en fonction de ε, on a

$$\Lambda^{\perp}_{\Phi(Q)} \cap \mathcal{C}'_{Q,\varepsilon} = \{\mathbf{0}\} .$$

Ce résultat découle du théorème 3.2 exactement comme le théorème 1.3 se déduit du théorème 3.1.

De même que pour le théorème 3.2, il suffirait que parmi k formes linéaires consécutives $L_n, \dots, L_{n+k-1}$ avec $L_n = (\ell_{1,n}, \dots, \ell_{p,n})$, il y en ait toujours p qui soient linéairement indépendantes (où $k \geq p$ est un entier fixé).

La conclusion de ce critère "à la Siegel" est la même que celle du théorème 1.3 (qui est davantage dans l'esprit du critère de Nesterenko). Les différences entre ces deux énoncés sont les suivantes :

- Dans tout critère à la Siegel, on a besoin d'une hypothèse assurant l'indépendance linéaire de p formes linéaires. Dans le théorème 4.1, cette hypothèse prend la forme d'un déterminant non nul (celui de Δ_{n_2}, avec une valeur fixée de n_2) et d'une relation de récurrence. L'absence de cette hypothèse est un des intérêts des critères à la Nesterenko.
- Les formes linéaires $\ell_{i,n} - \ell_{p,n}\xi_i$ ne doivent pas être trop petites dans le théorème 1.3 : on a besoin d'une estimation exacte et pas seulement d'une majoration de $|\ell_{i,n} - \ell_{p,n}\xi_i|$. C'est l'une des différences majeures entre les critères à la Nesterenko et ceux à la Siegel ; lorsqu'on ne fait aucune hypothèse d'indépendance sur les formes linéaires, une minoration de $|\ell_{i,n} - \ell_{p,n}\xi_i|$ s'avère toujours nécessaire (voir cependant la proposition 1 de [13]), alors qu'elle est inutile dans les critères à la Siegel comme le théorème 4.1.
- Une majoration $|\ell_{p,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$ est suffisante dans le théorème 4.1 alors qu'une égalité est requise dans le théorème 1.3. Cette différence est plutôt inhabituelle, car une majoration à cet endroit suffit généralement, même dans les critères de type Nesterenko.

5. Optimalité

Dans cette section, on se place encore dans le cadre particulier qui a fait l'objet de l'étude du § 4.

On vérifie que les conclusions des théorèmes 1.3 et 4.1 sont optimales en construisant une réciproque à ces énoncés. Il ne s'agit cependant pas de réciproques au sens propre du terme, car les formes linéaires qu'on va construire (en supposant fausses les conclusions des critères, c'est-à-dire les mesures d'indépendance linéaire restreintes) ne satisferont pas (*a priori*) à toutes les hypothèses de ces critères.

Dans le cas le plus simple où on considère un seul nombre et pas de diviseurs, le critère de Nesterenko se réduit au lemme classique suivant.

Lemme 5.1. *Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Supposons qu'il existe des suites d'entiers $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} = \alpha \ \textit{et} \ \limsup_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} \leq \beta\,.$$

Alors $\mu(\xi) \leq 1 - \frac{\log\beta}{\log\alpha}$.

Dans ce cas particulier, Fischler et Rivoal ont quasiment démontré [11] la réciproque, au sens propre du terme, de ce résultat. Ils obtiennent même des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant à des estimations asymptotiques plus précises que celles des hypothèses du lemme 5.1. Le seul défaut de leur énoncé pour que ce soit véritablement une réciproque, est l'inégalité stricte

$\mu(\xi) < 1 - \frac{\log \beta}{\log \alpha}$ dans l'hypothèse, au lieu de l'inégalité au sens large. Dans [8], Fischler établit également une réciproque presque complète pour l'exposant d'approximation rationnelle restreinte μ_ψ qui inclut des diviseurs. Ici encore, la réciproque construite n'est pas complète car l'inégalité large du résultat est prise au sens strict dans la réciproque.

Mais ces deux exemples de réciproques de critères "à la Nesterenko" ne concernent qu'une seule variable : les formes linéaires construites sont des formes linéaires en 1 et ξ seulement. Or, nous avons besoin de formes en plusieurs variables $1, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$. L'article [12] de Fischler, Hussain, Kristensen et Levesley contient une réciproque au critère de Nesterenko à plusieurs variables, valable presque partout au sens de la mesure de Lebesgue. Ce résultat fournit une sorte de réciproque (valable presque partout) aux théorèmes 1.3 et 4.1 lorsque Λ_n est le réseau des formes linéaires à coefficients entiers. Toujours dans la direction de formes linéaires en plusieurs variables, Chantanasiri démontre également (§ 3 de [4]) une sorte de réciproque sous une hypothèse très forte (une mesure d'indépendance linéaire). Plus de détails à ce sujet peuvent être trouvés dans le paragraphe 2.4 de [5].

On va déduire la réciproque cherchée (proposition 5.2) du résultat suivant.

Proposition 5.1. *Soient $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ des réels quelconques et $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}$ des réels > -1.*

On prend pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ avec $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$. On note Λ_n le réseau définit dans (†). On considère aussi $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante avec $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{R}$ tel que $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$. Alors :

- *Si*

$$\gamma_p + \sum_{\substack{1 \le i \le p-1 \\ \tau_i + \gamma_i \ge 0}} \tau_i + \gamma_i \le 1\,, \tag{5.1}$$

  alors il existe, à partir d'un certain rang, $(\ell_{1,n}, \ldots, \ell_{p,n}) \in \Lambda_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| \le Q_n^{-\tau_i + o(1)}$ pour $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $|\ell_{p,n}| \le Q_n^{1+o(1)}$.
- *Si*

$$\gamma_p + \sum_{\substack{1 \le i \le p-1 \\ \tau_i + \gamma_i \ge 0}} \tau_i + \gamma_i > 1\,, \tag{5.2}$$

  alors, pour tout $\varepsilon > 0$, tout Q suffisamment grand par rapport à ε, on a $\Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} \cap \mathcal{C}'_{Q,\varepsilon} \neq \{\mathbf{0}\}$.

Démonstration. On note $J = \left\{j \in \{1, \dots, p-1\}, \tau_j + \gamma_j \geq 0\right\}$ et $\alpha = p - |J| \in \{0, \dots, p\}$. On a donc $|J| = p - \alpha$. On considère aussi le réseau $\Lambda'_n = \bigoplus_{j \in J \cup \{p\}} \delta_{j,n}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{J\cup\{p\}}$ qui est de déterminant $\delta_{p,n} \prod_{j\in J} \delta_{j,n}$.

Commençons par démontrer le premier point.

On considère

$$K_n = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{J\cup\{p\}}, |x_p\xi_j - x_j| \leq \delta_{j,n} Q_n^{-\tau_j - \gamma_j}, j \in J, \text{ et } |x_p| \leq \delta_{p,n} Q_n^{1-\gamma_p}\right\}.$$

C'est un compact convexe, symétrique, centré en l'origine et de volume

$$2^{p-\alpha+1} \det(\Lambda'_n) Q_n^{1-\gamma_p - \sum_{j\in J} \tau_j + \gamma_j}.$$

En utilisant l'hypothèse (5.2), le théorème de Minkowski assure l'existence de $\ell_{j,n}$, pour $j \in J$, et $\ell_{p,n}$ tels que $|\ell_{p,n}\xi_j - \ell_{j,n}| \leq Q_n^{-\tau_j + o(1)}$ pour tout $j \in J$ et $|\ell_{p,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$.

On choisit maintenant la suite $o(1)$ comme étant une suite (ε_n) strictement positive telle que $\varepsilon_n \log Q_n \not\to 0$ quand $n \to +\infty$ et on prend un $j \notin J$. Alors, puisque $\tau_j + \gamma_j < 0$, on a $Q_n^{\tau_j - \varepsilon_n}\delta_{j,n} + Q_n^{-2\varepsilon_n} \leq Q_n^{\tau_j+\gamma_j} + Q_n^{-2\varepsilon_n} < 1$ pour tout n assez grand. Ainsi, $Q_n^{-\tau_j+\varepsilon_n} - Q_n^{-\tau_j-\varepsilon_n} > \delta_{j,n}$ dès que n est assez grand, et donc l'intervalle $\left[-\ell_{p,n}\xi_j - Q_n^{-\tau_j+\varepsilon_n}, -\ell_{p,n}\xi_j - Q_n^{-\tau_j-\varepsilon_n}\right]$ contient forcément un multiple $\ell_{j,n}$ de $\delta_{j,n}$. Et $\ell_{j,n}$ vérifie donc $|\ell_{j,n} - \xi_j \ell_{p,n}| \leq Q_n^{-\tau_j+\varepsilon_n}$, ce qui finit la preuve du premier point.

Montrons maintenant le deuxième point de la proposition.

On introduit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\gamma_p + \sum_{\substack{1\leq i\leq p-1 \\ \tau_i+\gamma_i\geq 0}} \tau_i + \gamma_i > 1 + (p - \alpha + 2)\varepsilon.$$

On considère le compact

$$K_Q = \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{J\cup\{p\}}, \forall j \in J, |a_j| \leq Q^{\tau_j - \varepsilon} \text{ et } \left|\sum_{j\in J} a_j\xi_j + a_p\right| \leq Q^{-1-\varepsilon}\right\}$$

et $n = \Phi(Q)$. K_Q est un compact convexe, symétrique, centré en l'origine, de volume $2^{p-\alpha+1} Q^{\sum_{j\in J} \tau_j - 1 - (p-\alpha+1)\varepsilon}$.

$\Lambda_n'^{\perp}$, le réseau dual de Λ'_n, est de déterminant inverse de celui de Λ'_n, c'est-à-dire $\prod_{j\in J\cup\{p\}} \frac{1}{\delta_{j,n}} \leq Q^{-\gamma_p - \sum_{j\in J}\gamma_j + \varepsilon}$, en prenant Q suffisamment grand.

On a alors, $\mathrm{Vol}(K_Q) > 2^{p-\alpha+1} \det(\Lambda'^{\perp}_{\Phi(Q)})$ et le théorème de Minkowski assure l'existence d'un $(a_j)_{j\in J\cup\{p\}} \in K_Q \cap \Lambda'^{\perp}_{\Phi(Q)}$ non nul. On pose $a_j = 0$ pour $j \notin J \cup \{p\}$, ce qui termine la démonstration. □

Le deuxième point de la proposition précédente permet donc de construire une forme linéaire en $1, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ qui contredit les conclusions des théorèmes 1.3 et 4.1 de la section 4. Ainsi, les conclusions de ces théorèmes impliquent que l'hypothèse (5.2) faite dans le second point de la proposition 5.1 est fausse. On peut alors appliquer le premier point et construire des $\ell_{i,n}$ qui vérifient une partie des hypothèses des théorèmes 1.3 et 4.1. Par conséquent, la combinaison des deux points de la proposition 5.1 ci-dessus permet d'établir une sorte de réciproque aux théorèmes 1.3 et 4.1.

Proposition 5.2. *Soit $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ des réels quelconques et $\tau_i, \ldots, \tau_{p-1}$ des réels > -1. Soit $(Q_n)_n$ une suite d'entiers strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. Soit p suites d'entiers $(\delta_{i,n})_n$ telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$ et il existe $\gamma_i \in \mathbb{R}$ tel que $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$.*

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une infinité de Q tels que $\Lambda_{\Phi(Q)} \cap \mathcal{C}'_{Q,\varepsilon} = \{\mathbf{0}\}$.

Alors pour tout n assez grand, il existe $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, non tous nuls, tels que pour $1 \leq i \leq p-1$, $|\ell_{i,n} - \xi_i \ell_{p,n}| \leq Q_n^{-\tau_i + o(1)}$ et $|\ell_{p,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$.

Ce n'est pas une réciproque exacte du théorème 1.3 car les estimations sur les tailles des formes linéaires et de leurs coefficients y sont exactes, alors que nous ne sommes en mesure ici d'obtenir que des majorations.

Comme nous l'a signalé le referee, on peut démontrer la conclusion de la proposition 5.2 pour une infinité de n en appliquant directement un théorème de Mahler [14] (voir aussi [3] Chap. 8 p. 201) : le premier minimum successif relatif à $\Lambda_{\Phi(Q)}$ et $\mathcal{C}'_{Q,\varepsilon}$ étant > 1, le dernier minimum successif relatif à $\Lambda^{\perp}_{\Phi(Q)}$ et au convexe polaire de $\mathcal{C}'_{Q,\varepsilon}$ est $< p!$.

Bibliographie

[1] Keith Ball et Tanguy Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math. **146-1** (2001), 193–207.

[2] Egor V. Bedulev, *On the linear independence of numbers over number fields.* Mat. Zametki **64-4** (1998), 506–517.

[3] John W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers.* Springer-Verlag, 1997.

[4] Amarisa Chantanasiri, *Généralisation des critères pour l'indépendance linéaire de Nesterenko, Amoroso, Colmez, Fischler et Zudilin.* Ann. Math. Blaise Pascal **19-1** (2012), 75–105.

[5] Simon Dauguet, *Généralisations du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, (2014).
`http://www.math.u-psud.fr/~dauguet/These.html`.

[6] Simon Dauguet et Wadim Zudilin, *On simultaneous diophantine approximations to $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$.* Soumis (2014), arXiv:1401.5322.

[7] Naum I. Fel'dman et Yuri V. Nesterenko, *Transcendental numbers, in Number theory, IV.* Springer, Berlin (1998).

[8] Stéphane Fischler, *Restricted rational approximation and Apéry-type constructions.* Indagationes Mathematicae, **20-2** (2009), 201–215.

[9] Stéphane Fischler, *Nesterenko's criterion when the small linear forms oscillate*. Arch. Math. (Basel) **98-2** (2012), 143–151.

[10] Stéphane Fischler, *Nesterenko's linear independence criterion for vectors*. Soumis (2013), arXiv:1202.2279v2.

[11] Stéphane Fischler et Tanguy Rivoal, *Irrationality exponent and rational approximations with prescribed growth*. Proc. Amer. Math. Soc. **138-3** (2010), 799–808.

[12] Stéphane Fischler, Mumtaz Hussain, Simon Kristensen et Jason Levesley, *A converse to linear independence criteria, valid almost everywhere*. Soumis (2013), arXiv:1302.1952.

[13] Stéphane Fischler et Wadim Zudilin, *A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values*. Math. Annalen **347** (2010), 739–763.

[14] Kurt Mahler, *Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper*. Časopis Pěst. Mat. Fys. **68** (1939), 93–102.

[15] Raffaele Marcovecchio, *Linear independence of linear forms in polylogarithms*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. **5-1** (2006), 1-11.

[16] Yuri V. Nesterenko, *Linear independence of numbers*. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **1** (1985), 46–49, 108.

[17] Yuri V. Nesterenko, *On a criterion of linear independence of p-adic numbers*. Manuscripta Math. **139-3/4** (2012), 405–414.

[18] Tanguy Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*. C.R.A.S. Paris Série I Math. **336-4** (2000), 267–270.

[19] Tanguy Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$. Acta Arith. **103-2** (2002), 157–167.

[20] Carl L. Siegel, *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*. Abh. Press. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. **1** (1929), 1–70.

[21] Thomas Töpfer, *An axiomatization of Nesterenko's method and applications on Mahler functions*. J. Number Theory **49-1** (1994), 1—26.

[22] Thomas Töpfer, *An axiomatization of Nesterenko's method and applications on Mahler functions. II*. Compositio Math. **95-3** (1995), 323–342.

[23] Wadim Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational*. Russian Math. Surveys **56-4** (2001), 775–776.

[24] Wadim Zudilin, *Irrationality of values of the Riemann zeta function*. Izv. Math. **66-3** (2002), 489–542.

Simon Dauguet
Université Paris-Sud,
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,
91405 Orsay Cedex, France
E-mail: `simon.dauguet@gmail.com`
URL: `http://www.math.u-psud.fr/~dauguet`