JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Cécile LE RUDULIER

Points algébriques de hauteur bornée sur la droite projective

Tome 26, n° 3 (2014), p. 789-812.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2014__26_3_789_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **26** (2014), 789–812

Points algébriques de hauteur bornée sur la droite projective

par Cécile LE RUDULIER

Résumé. On considère une hauteur adélique absolue sur l'ensemble des points algébriques de la droite projective $\mathbf{P}^1$, relative à un fibré en droites ample. Nous donnons une formule asymptotique pour le nombre de points algébriques de $\mathbf{P}^1$ de degré fixé et de hauteur inférieure à B, lorsque B tend vers l'infini. Le cas où la hauteur considérée est la hauteur absolue usuelle a été traité par Masser et Vaaler. Nous généralisons ce résultat pour les hauteurs adéliques quelconques, en adoptant un point de vue géométrique faisant appel à l'un des résultats connus de la conjecture de Batyrev et Manin.

Abstract. *Algebraic points of bounded height on the projective line.*
We consider an absolute adelic height on the set of algebraic points of the projective line P^1, associate to an ample line bundle. We give an asymptotic formula for the number of algebraic points of fixed degree and of height lower than B, when B tends to infinity. The case of the standard height on P^1 has been studied by Masser and Vaaler. We generalize this result for any adelic height using a geometric point of view and one of he known cases of the Batyrev-Manin conjecture.

1. Introduction

Soit K un corps de nombres, de clôture algébrique $\bar{K}$. Nous nous intéressons ici à la répartition des points algébriques de l'espace projectif $\mathbf{P}^n_K$, et plus particulièrement de la droite projective $\mathbf{P}^1_K$. Par définition, le degré sur K d'un point $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_n] \in \mathbf{P}^n(\bar{K})$ est le degré sur K du corps

$$K\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right),$$

où α_i est non nul. Ce corps ne dépend pas d'un tel α_i choisi et nous le noterons $K(\alpha)$. Il existe une hauteur (exponentielle) naturelle, que nous appellerons hauteur absolue usuelle et qui, à un point algébrique $\alpha \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$,

Manuscrit reçu le 7 juillet 2012, accepté le 27 juin 2014.

associe un réel $H(\alpha) \geqslant 1$. Le théorème de Northcott dit alors que, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$ et tout nombre réel $B \geqslant 1$, l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m,\ H(\alpha) \leqslant B\},$$

est fini.

De manière plus générale, si V est une variété projective lisse définie sur K et munie d'un fibré en droites ample $\mathcal{L}$, la donnée d'une *métrique adélique* (voir les définitions 2.1, 2.4 et 2.7) sur $\mathcal{L}$ permet de définir une hauteur $H_{\mathcal{L}}$ sur $V(\bar{\mathbf{Q}})$ et le théorème de Northcott est toujours valable pour cette hauteur. Il est alors naturel d'étudier le comportement asymptotique du cardinal de l'ensemble

$$\{\alpha \in V(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m,\ H_{\mathcal{L}}(\alpha) \leqslant B\},$$

lorsque B tend vers l'infini.

Le cas des points rationnels ($m = 1$) a fait l'objet de nombreuses études. Schanuel [14] a montré la formule suivante

$$\#\{\alpha \in \mathbf{P}^n(K) \mid H(\alpha) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} S_K(n) B^{(n+1)[K:\mathbf{Q}]},$$

où $S_K(n)$ est une constante strictement positive. Par ailleurs, en 1990, Batyrev et Manin [2] ont proposé une formule asymptotique conjecturale pour le nombre de points rationnels de hauteur bornée sur une variété de Fano V, variété projective lisse dont le fibré anticanonique est ample, ainsi qu'une interprétation géométrique de cette formule. Elle a été par la suite précisée, en particulier par Peyre [12]. Ce dernier a montré que cette conjecture était vérifiée, lorsque V est l'espace projectif, pour toute hauteur issue d'une métrique adélique.

Le cas des points algébriques sur $\mathbf{P}^n_K$ n'a été étudié que beaucoup plus récemment. Parmi les résultats démontrés, tous pour la hauteur usuelle, nous pouvons citer les travaux de Schmidt [15] pour les points quadratiques, puis de Gao [8]. Cependant ceux-ci ne sont valables que lorsque le corps de base est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. En 2007, Masser et Vaaler [9] obtiennent une formule asymptotique pour la droite projective $\mathbf{P}^1_K$. Pour finir, en 2009, Widmer [17] obtient des résultats dans le cas général.

Dans ces études, le produit symétrique apparaît de manière naturelle. Dans l'article de Masser et Vaaler, il apparaît dans les coefficients du polynôme minimal, fonctions symétriques élémentaires des racines. Notre but est de reprendre le cas de la droite projective en traduisant le problème en termes de points rationnels de hauteur bornée sur le m-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1$. Cette variété projective est en fait isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^m$, variété pour laquelle la conjecture de Batyrev-Manin est connue. Nous retrouvons alors le résultat énoncé par Masser et Vaaler et généralisons celui-ci aux hauteurs définies par une métrique adélique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Plus précisément, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}$ une hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ définie par une métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Soient K un corps de nombres de degré d, m un entier naturel non nul et B un réel. Alors l'ensemble*

$$\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha) \leqslant B\}$$

est fini et son cardinal $N_{m,K}(B)$ vérifie

$$N_{m,K}(B) \underset{B \to +\infty}{\sim} C_{H,m,K} B^{dm(m+1)},$$

où $C_{H,m,K}$ est une constante strictement positive dépendant de la hauteur considérée, de m et de K.

La constante $C_{H,m,K}$ sera explicitée dans la suite de cet article. Elle s'exprime notamment à l'aide d'un volume pour une certaine mesure de Tamagawa.

La partie 2 de cet article sera consacrée à rappeler la notion de métrique adélique sur un fibré en droites $\mathcal{L}$ d'une variété projective lisse V définie sur un corps de nombres K. à partir d'une telle métrique, nous pouvons définir une hauteur sur $V(K)$, mais aussi une hauteur absolue sur $V(\bar{\mathbf{Q}})$. Nous nous référons ici à [12] et [13], §1. Dans la partie 3, nous rappellerons le résultat de Peyre pour la conjecture de Batyrev-Manin sur l'espace projectif. Ceci nous permettra, dans la partie 4, de déterminer le nombre de points rationnels de hauteur bornée sur le m-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1$. Enfin, dans la partie 5, nous expliciterons le lien entre les points algébriques de $\mathbf{P}^1$ de hauteur bornée, et les points rationnels du m-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1$ de hauteur bornée, en vue de démontrer le théorème 1.1.

Notations. Nous introduisons ici les notations valables pour l'ensemble de ce texte.

Nous noterons M_K l'ensemble des places de K, $M_{K,f}$ l'ensemble des places finies de K et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques de K. De plus, r désignera le nombre de plongements réels de K, s le nombre de paires de plongements complexes conjugués de K, Δ_K le discriminant de K, h_K le nombre de classes d'idéaux de K, w_K le nombre de racines de l'unité de K, R_K le régulateur de K et ζ_K la fonction zÃªta du corps de nombres K. L'ensemble $M_{\mathbf{Q}}$ sera identifié à l'ensemble

$$M_{\mathbf{Q}} = \{p \mid p = \infty \text{ ou } p \text{ nombre premier}\}.$$

Nous noterons $|\cdot|_\infty$ la restriction à $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue usuelle de $\mathbf{R}$ et $|\cdot|_p$, si p est un nombre premier, la valeur absolue p-adique vérifiant $|p|_p = \frac{1}{p}$. Nous définissons alors $\mathbf{Q}_p$ comme le complété de $\mathbf{Q}$ pour la topologie donnée par valeur absolue $|\cdot|_p$. Sa clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_p$ possède une unique valeur absolue, qui sera toujours notée $|\cdot|_p$. Si $p = \infty$, $\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}$ et $\bar{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{C}$ est complet et algébriquement clos. Si p est un nombre premier, ce n'est pas le cas, mais le complété $\mathbf{C}_p$ de $(\bar{\mathbf{Q}}_p, |\cdot|_p)$ est, lui, algébriquement clos. Le prolongement de la valeur absolue $|\cdot|_p$ de $\bar{\mathbf{Q}}_p$ à $\mathbf{C}_p$ sera toujours noté $|\cdot|_p$.

Lorsque K est un corps de nombres quelconque, nous noterons $|\cdot|_v$ le représentant de la place $v \in M_K$ dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est l'une des valeurs absolues sur $\mathbf{Q}$ définies ci-dessus et nous noterons p_v la place de $\mathbf{Q}$ correspondante. Ces valeurs absolues sont de la forme $x \mapsto |\sigma(x)|_{p_v}$ où σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}_{p_v}$. Comme précédemment, K_v désignera le complété de K pour la topologie induite par v et $\mathbf{C}_v$ le complété de la clôture algébrique de K_v. Le nombre d_v de plongements de K dans $\mathbf{C}_{p_v}$ est alors égal au degré $[K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$.

Ces valeurs absolues vérifient la *formule du produit* : pour tout $x \in K^*$,

$$\prod_{v \in M_K} |x|_v^{d_v} = 1. \tag{1.1}$$

2. Fibrés en droites adéliquement métrisés et hauteurs

Soient V une variété projective lisse définie sur un corps de nombres K et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V. Nous souhaitons définir des hauteurs sur les ensembles $V(K)$ et $V(\bar{\mathbf{Q}})$. Pour cela, nous commençons par rappeler la notion de métrique adélique sur $\mathcal{L}$, introduite par S. Zhang [19].

2.1. Métrique adélique.

Définition 2.1. Une *métrique sur* $\mathcal{L}$ est la donnée, pour toute place v sur K, d'une application qui à tout point $x \in V(\mathbf{C}_v)$ associe une norme $\|\cdot\|_v$ sur $\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}_v \otimes_{\mathcal{O}_{V,x}} \mathcal{L}_x$ telle que, pour tout ouvert U de V et toute section $s \in \Gamma(U, \mathcal{L})$,

(1) l'application $x \mapsto \|s(x)\|_v$ soit continue sur $U(\mathbf{C}_v)$ pour la topologie v-adique ;

(2) pour tout $x \in U(\mathbf{C}_v)$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$,

$$\|\sigma(s)(x)\|_v = \|s(x^\sigma)\|_v .$$

Remarque 2.2. Ici, les actions de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$ sur $\mathbf{C}_v \otimes \Gamma(U, \mathcal{L})$ et sur $U(\mathbf{C}_v)$ sont données, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$, tout $s = \sum_i c_i \otimes f_i \in \mathbf{C}_v \otimes \Gamma(U, \mathcal{L})$ et tout point $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in U(\mathbf{C}_v)$, par

$$\sigma(s) := \sum_i \sigma(c_i) \otimes f_i,$$

$$x^\sigma := [\sigma^{-1}(x_0) : \sigma^{-1}(x_1) : \cdots : \sigma^{-1}(x_n)].$$

Exemple 2.3. Si $\mathcal{L}$ est très ample et $(s_1, \dots, s_q)$ est une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$, les normes $\|\cdot\|_v$ définies, pour tout $x \in V(\mathbf{C}_v)$ et pour toute section $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ ne s'annulant pas en x, par

$$\|s(x)\|_v = \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1},$$

donnent une métrique sur $\mathcal{L}$, que nous appellerons *métrique usuelle* pour la base $(s_1, \dots, s_q)$.

Métrique produit — étant données deux métriques $(\|\cdot\|_{1,v})_v$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_v$ sur des fibrés en droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement, nous pouvons munir le fibré en droites $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ d'une métrique produit donnée, pour tout ouvert U de V, toutes sections $s_1 \in \Gamma(U, \mathcal{L}_1)$ et $s_2 \in \Gamma(U, \mathcal{L}_2)$ et tout $x \in U(\mathbf{C}_v)$, par

$$\|s_1 \otimes s_2(x)\|_v = \|s_1(x)\|_{1,v} \, \|s_2(x)\|_{2,v} \, .$$

Métrique tirée en arrière — Soient V et V' deux variétés projectives lisses et $f\colon V' \to V$ un morphisme. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$. Alors, pour tout $x \in V'$, $(f^*\mathcal{L})(x) = \mathcal{L}(f(x))$. De plus, l'application $V'(\mathbf{Q}_v) \to V(\mathbf{Q}_v)$ induite par f est continue pour toute place v. Par conséquent, le fibré en droites $f^*\mathcal{L}$ sur V' est naturellement muni d'une métrique donnée, pour tout ouvert U de V, toute section s de $\Gamma(U, \mathcal{L})$ et tout $x \in f^{-1}(U)(\mathbf{C}_v)$, par

$$\|(f^*s)(x)\|_v = \|s(f(x))\|_v \, .$$

Une métrique *adélique* sur $\mathcal{L}$ est une métrique qui vérifie une condition supplémentaire, de nature globale. Nous commençons par le cas où $\mathcal{L}$ est très ample.

Définition 2.4. Supposons $\mathcal{L}$ très ample. Soient $(s_0, \dots, s_n)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$ et $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ une métrique sur $\mathcal{L}$. Notons, pour tout $x \in V(\mathbf{C}_v)$,

$$\delta_v(x) = \log \left(\|s(x)\|_v \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right),$$

où $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ est une section quelconque ne s'annulant pas en x. La métrique $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ sera dite *adélique* si

(1) Pour toute place $v \in M_K$, la fonction δ_v est bornée sur $V(\mathbf{C}_v)$;

(2) Pour presque toute place $v \in M_K$, $\delta_v = 0$.

Le lemme suivant assure, en particulier, que cette définition ne dépend pas de la base de $\Gamma(\mathcal{L}, V)$ choisie.

Lemme 2.5. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur V muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Soient $(s_0,\dots,s_n)$ une base de $\Gamma(V,\mathcal{L})$ et $(\tau_0,\dots,\tau_q)$ une famille de sections de $\Gamma(V,\mathcal{L})$ sans point base sur V. Pour $x\in V(\mathbf{C}_v)$ et $s\in\Gamma(V,\mathcal{L})$ non nulle en x, on note*

$$\epsilon_v(x)=\log\left(\|s(x)\|_v\max_{0\leqslant j\leqslant q}\left|\frac{\tau_j(x)}{s(x)}\right|_v\right).$$

Alors, $\delta_v-\epsilon_v$ est bornée pour toute place v et nulle pour presque toute place v.

Démonstration. On a un plongement $\varphi\colon V\hookrightarrow\mathbf{P}^n$ tel que $\mathcal{L}=\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ et pour tout i, une section y_i de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ correspondant à la i-ième coordonnée homogène et telle que $s_i=\varphi^*y_i$. Alors, pour tout j, $\tau_j=\varphi^*(\phi_j(y_0,\dots,y_n))$, où les ϕ_j sont des formes linéaires en $(y_0,\dots,y_n)$. On a alors, pour tout point $x\in V(\mathbf{C}_v)$,

$$(\delta_v-\epsilon_v)(x)=\log\left(\frac{\max_{0\leqslant i\leqslant n}|y_i|_v}{\max_{0\leqslant j\leqslant q}|\phi_j(y_0,\dots,y_n)|_v}\right),$$

où $y=\varphi(x)$, de coordonnées homogènes $[y_0:\dots:y_n]$.
Notons, pour tout $j\in\{0,1,\dots,q\}$,

$$\phi_j=a_{0,j}y_0+a_{1,j}y_1+\dots+a_{n,j}y_n,$$

avec $a_{i,j}\in K$ pour tout (i,j). Alors, pour tout $j\in\{0,1,\dots,q\}$,

$$|\phi_j(y_0,\dots,y_n)|_v\leqslant c_v\max_{0\leqslant i\leqslant n}|y_i|_v\,,$$

avec

$$c_v=\begin{cases}\max\limits_{i,k}\{\,|a_{i,k}|_v\,\}, & \text{si } v \text{ est ultramétrique ;}\\[2ex] \max\limits_{k}\Big(\sum\limits_{i=0}^{n}|a_{i,k}|_v\Big), & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi,

$$(\delta_v-\epsilon_v)(x)\geqslant\log\left(\frac{1}{c_v}\right),$$

et de plus, $c_v=1$ pour presque toute place v.
Pour l'inégalité inverse, notons $P_1,\dots,P_r$ des polynômes homogènes définissant la variété $\varphi(V)$, c'est-à-dire $\varphi(V)=\mathcal{V}(P_1,\dots,P_r)$. Puisque le système $(\tau_0,\dots,\tau_q)$ est sans point base,

$$\mathcal{V}(P_1,\dots,P_r,\phi_0,\dots,\phi_q)=\varnothing.$$

Par le théorème des zéros de Hilbert dans sa version homogène, il existe un entier naturel non nul t et des polynômes homogènes $G_{i,j}$, $H_{i,j}$ tels que

$$y_i^t=\sum_{j=1}^{r}G_{i,j}(y)P_j(y)+\sum_{j=0}^{q}H_{i,j}(y)\phi_j(y),$$

pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et tout $y \in \mathbf{P}^n$. Alors pour $y = [y_0 : \cdots : y_n]$, point de $\varphi(V)$,

$$y_i^t = \sum_{j=0}^{q} H_{i,j}(y)\phi_j(y).$$

Ainsi, les $H_{i,j}$ sont de degré $t-1$ et nous obtenons, sur $\varphi(V)(\mathbf{C}_v)$,

$$|y_i|_v^t \leqslant c'_v \max_{0 \leqslant \ell \leqslant n} |y_\ell|_v^{t-1} \max_{0 \leqslant j \leqslant q} |\phi_j(y)|_v \,,$$

avec

$$c'_v = \begin{cases} \max\limits_{\ell,j} \left(\max \{ \, |h|_v \,, \ h \text{ coefficient de } H_{\ell,j} \} \right), & \text{si } v \text{ est ultramétrique} \\ \max\limits_{\ell} \Big(\sum\limits_{j=0}^{q} \sum\limits_{\substack{h \text{ coefficient} \\ \text{de } H_{\ell,j}}} |h|_v \Big), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i|_v \leqslant c'_v \max_{0 \leqslant j \leqslant q} |\phi_j(y)|_v \,,$$

et donc,

$$(\delta_v - \epsilon_v)(x) \leqslant \log \left(\frac{1}{c'_v} \right),$$

avec $c'_v = 1$ pour presque toute place v.

□

Remarque 2.6. (1) Les *métriques usuelles* définies dans l'exemple 2.3 sont adéliques.

(2) Si $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ est une famille de normes sur un fibré en droites très ample $\mathcal{L}$, la continuité de δ_v implique la condition de continuité de la métrique dans la définition 2.1.

Si $\mathcal{L}$ n'est pas très ample, il est tout de même toujours possible de l'écrire sous la forme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des fibrés en droites très amples sur V (cela se déduit du fait que si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites et $\mathcal{M}$ un fibré en droites très ample, il existe un entier $k > 0$ tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{\otimes k}$ soit très ample, voir [16, page 22]). Nous définissons alors une métrique adélique sur un fibré en droites $\mathcal{L}$ quelconque de la manière suivante.

Définition 2.7. Soit $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur V muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$. Cette métrique sera dite *adélique* s'il existe deux fibrés en droites très amples $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ munis de métriques adéliques $(\|\cdot\|_{1,v})_{v \in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_{v \in M_K}$, respectivement, tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ et que $(\|\cdot\|_{1,v})_{v \in M_K}$ soit la métrique produit de $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_{v \in M_K}$ sur $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_2$.

La notion de métrique adélique est compatible au produit et au tiré en arrière de métriques, comme le montrent les deux propositions suivantes.

Proposition 2.8. *Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux fibrés en droites sur V munis de métriques adéliques. Alors la métrique produit induite sur $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est également adélique.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ très amples et munis des métriques adéliques $(\|\cdot\|_{v,1})_{v\in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{v,2})_{v\in M_K}$, respectivement. Nous noterons $(\|\cdot\|_v)_v$ la métrique produit sur $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Soit $(s_0, \dots, s_n)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L}_1)$, soit $(\tau_0, \dots, \tau_m)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L}_2)$ et soient $\varphi_1 \colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ et $\varphi_2 \colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^m$ des plongements tels que $\varphi_1^* x_i = s_i$ et $\varphi_2^* x'_j = \tau_j$, pour tous i, j, où x_i (respectivement x'_i) désigne la section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$) correspondant à la i-ème coordonnée homogène. Le plongement de Segre $\phi \colon \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^{nm+n+m}$ induit un plongement

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & V & \longrightarrow & \mathbf{P}^{nm+n+m} \\ & x & \longmapsto & \phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$$

tel que

$$\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{nm+n+m}}(1) = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2.$$

Par conséquent, le fibré en droites $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est également très ample et l'espace $\Gamma(V, \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ est engendré par les sections $s_i \otimes \tau_j$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant m$. Soit alors, pour $s \in \Gamma(V, \mathcal{L}_1)$, $\tau \in \Gamma(V, \mathcal{L}_2)$ et $x \in V(\mathbf{C}_v)$,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s \otimes \tau(x)\|_v \max_{i,j} \left| \frac{s_i \otimes \tau_j(x)}{s \otimes \tau(x)} \right|_v \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \delta_v(x) &= \log\left(\|s(x)\|_v \max_i \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right) + \log\left(\|\tau(x)\|_v \max_j \left| \frac{\tau_j(x)}{\tau(x)} \right|_v \right) \\ &= \delta_{v,1}(x) + \delta_{v,2}(x). \end{aligned}$$

Les métriques $(\|\cdot\|_{v,1})_{v\in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{v,2})_{v\in M_K}$ étant adéliques, les fonctions $\delta_{v,1}$ et $\delta_{v,2}$ sont bornées pour toute place et nulles pour presque toute place. C'est donc également le cas pour la fonction δ_v et la métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ est adélique. Le cas général se déduit alors facilement en remarquant que si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2^{-1}$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4^{-1}$, pour des fibrés en droites très amples $\mathcal{M}_i$, alors

$$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_3) \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_4)^{-1}.$$

□

Proposition 2.9. *Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V muni d'une métrique adélique et $f \colon V' \to V$ un morphisme de variétés projectives lisses. Alors la métrique tirée en arrière induite sur $f^*\mathcal{L}$ est adélique.*

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de traiter le cas où $\mathcal{L}$ est très ample. Notons $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ la métrique adélique sur $\mathcal{L}$. Le fibré $\mathcal{L}' = f^*\mathcal{L}$ est muni de la métrique, toujours notée $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$, vérifiant, pour tout $x \in V'(\mathbf{C}_v)$ et toute $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$,

$$\|(f^*s)(x)\|_v = \|s(f(x))\|_v .$$

Il existe un fibré en droites très ample $\mathcal{L}_1$ sur V' tel que $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}_1$ soit très ample. On munit alors $\mathcal{L}_1$ de la métrique adélique usuelle $(\|\cdot\|_{1,v})_{v\in M_K}$, définie dans l'exemple 2.3. Nous obtenons une métrique produit $(\|\cdot\|_{2,v})_{v\in M_K}$ sur le fibré $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}_1$. Montrons alors que cette dernière est adélique. Soient $(s_1, \ldots, s_n)$ une base de $\Gamma(V', \mathcal{L}_2)$, $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ une base de $\Gamma(V', \mathcal{L}_1)$ et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$. Alors la famille $(f^*\sigma_i \otimes \tau_j)_{i,j}$ de sections de $\mathcal{L}_2$ est sans point base. Notons, pour $x \in V'(\mathbf{C}_v)$ et $s = f^*\sigma \otimes \tau$ une section de $\mathcal{L}_2$ non nulle en x,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_{2,v} \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right)$$

et

$$\epsilon_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_{2,v} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}\left|\frac{(f^*\sigma_i \otimes \tau_j)(x)}{s(x)}\right|_v\right).$$

D'après le lemme 2.5, $\delta_v - \epsilon_v$ est bornée pour toute place et nulle pour presque toute place. De plus,

$$\epsilon_v(x) = \log\left(\|\sigma(f(x))\|_v \max_{1\leqslant i\leqslant p}\left|\frac{\sigma_i(f(x))}{\sigma(f(x))}\right|_v\right) + \log\left(\|\tau(x)\|_{1,v} \max_{1\leqslant j\leqslant q}\left|\frac{\tau_j(x)}{\tau(x)}\right|_v\right).$$

Les métriques sur $\mathcal{L}$ et sur $\mathcal{L}_1$ étant adéliques, la fonction ϵ_v est bornée pour toute place v et nulle pour presque toute place. Par conséquent, δ_v l'est également. □

2.2. Hauteurs. Soient V une variété projective définie sur K et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V. Nous supposerons à partir de maintenant que $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Nous définissons maintenant des hauteurs sur $V(K)$ et $V(\bar{\mathbf{Q}})$ relatives à cette métrique.

Commençons par énoncer un lemme sur lequel reposent les définitions. Remarquons d'abord que si L est une extension finie de K, toute métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{L}$ induit une métrique adélique $(\|\cdot\|_w)_{w\in M_L}$ sur $\mathcal{L} \otimes_K L$, avec, pour toute $w \in M_L$ divisant $v \in M_K$, $\|\cdot\|_w = \|\cdot\|_v$.

Lemme 2.10. *Soient V une variété projective définie sur K et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V muni d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_v$. Soient $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$, L un corps de nombres tel que $x \in V(L)$ et s une section locale de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en x.*

(1) $\|s(x)\|_v = 1$ *sauf pour un nombre fini de places* $v \in M_L$.

(2) La quantité

$$\prod_{v \in M_L} \|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_v]}$$

est un produit fini et ne dépend pas du choix de la section s.

(3) La quantité

$$\prod_{v \in M_L} \|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_v]/[L:\mathbf{Q}]}$$

ne dépend pas, de plus, du choix de L.

Démonstration. La première partie vient du fait que, pour tout $a \in L^*$,

$$|a|_v = 1$$

pour presque toute place (finie) $v \in M_L$. La deuxième partie découle de la formule du produit (1.1) énoncée en introduction. Enfin, si F est une extension de L

$$\begin{aligned} \prod_{w \in M_F} \|s(x)\|_w^{-[F_w:\mathbf{Q}_{p_w}]/[F:\mathbf{Q}]} &= \prod_{v \in M_L} \prod_{\substack{w \in M_F \\ w|v}} \|s(x)\|_v^{-[F_w:\mathbf{Q}_{p_v}]/[F:\mathbf{Q}]} \\ &= \prod_{v \in M_L} \|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_{p_v}]/[L:\mathbf{Q}]}, \end{aligned}$$

compte tenu de la formule

$$\sum_{\substack{w \in M_F \\ w|v}} [F_w : L_v] = [F : L].$$

□

Nous pouvons maintenant définir les hauteurs associées à une métrique adélique.

Définition 2.11. Soit $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ une métrique adélique sur $\mathcal{L}$.

(1) La *hauteur* $H_{\mathcal{L},K}$ sur $V(K)$ associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L},K}(x) = \prod_{v \in M_K} \|s(x)\|_v^{-d_v},$$

où s est une section de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en x.

(2) La *hauteur absolue* $H_{\mathcal{L}}$ sur $V(\bar{\mathbf{Q}})$ associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L}}(x) = \prod_{v \in M_K} \|s(x)\|_v^{-d_v/[K:\mathbf{Q}]},$$

où K est un corps de nombres tel que $x \in V(K)$ et $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ ne s'annule pas en x.

Remarque 2.12. Si $H_{\mathcal{L}}$ et $H'_{\mathcal{L}}$ sont deux hauteurs associées à des métriques adéliques sur $\mathcal{L}$, alors la définition 2.4 assure qu'il existe des constantes strictement positives c et c' telles que, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$,

$$cH'_{\mathcal{L}}(x) \leqslant H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant c'H'_{\mathcal{L}}(x).$$

Exemple 2.13. Soit $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ la base usuelle de $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$, correspondant aux coordonnées homogènes. La métrique usuelle associée à cette base est donnée, pour toute place v, tout $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ et toute section $s \in \mathbf{C}_v \otimes \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ne s'annulant pas en x, par

$$\|s(x)\|_v = \left(\max\left\{\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v, \ldots, \left|\frac{s_n(x)}{s(x)}\right|_v\right\}\right)^{-1}.$$

Soit $x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbf{P}^n(K)$ tel que $x_i \neq 0$. Alors s_i ne s'annule pas en x et on a

$$\|s_i(x)\|_v = \frac{|x_i|_v}{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}},$$

d'où

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1),K}(x) &= \prod_{v \in M_K} \frac{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v}}{|x_i|_v^{d_v}} \\ &= \prod_{v \in M_K} \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v} \end{aligned}$$

par la formule du produit (1.1). On retrouve la *hauteur usuelle* sur l'espace projectif, que nous noterons H_K. La hauteur absolue associée sera notée H.

Citons maintenant quelques propriétés de ces hauteurs qui découlent directement des définitions.

Proposition 2.14. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V muni d'une métrique adélique. Alors, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$,*

$$H_{\mathcal{L}}(x^\sigma) = H_{\mathcal{L}}(x).$$

Proposition 2.15. *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux fibrés en droites sur V muni de métriques adéliques. La hauteur donnée par la métrique produit sur $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ vérifie, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$*

$$H_{\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'}(x) = H_{\mathcal{L}}(x) H_{\mathcal{L}'}(x).$$

Proposition 2.16. *Soient $f\colon W \to V$ un morphisme et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V muni d'une métrique adélique. La métrique tirée en arrière de celle-ci sur le fibré en droites $f^*\mathcal{L}$ de W induit une hauteur $H_{f^*\mathcal{L}}$ vérifiant*

$$H_{f^*\mathcal{L}}(x) = H_{\mathcal{L}}(f(x)).$$

Enfin, ces hauteurs vérifient la propriété de finitude suivante.

Proposition 2.17 (Finitude). *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur V muni d'une métrique adélique. Alors, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$ et tout nombre réel $B \geqslant 1$, l'ensemble*

$$\{x \in V(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = m \text{ et } H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

est fini, où $\mathbf{Q}(x)$ désigne le corps résiduel de V en x.

Démonstration. Quitte à changer $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}^{\otimes k}$, pour un certain entier k, et la hauteur $H_{\mathcal{L}}$ en $H_{\mathcal{L}}^k$, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est très ample. Nous avons donc un plongement $\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ tel que $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) = \mathcal{L}$. La métrique usuelle sur le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ donnée dans l'exemple 2.13 induit une métrique adélique sur $\mathcal{L}$, donnant la hauteur $H \circ \varphi$, où H est la hauteur absolue usuelle sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$. D'après la remarque 2.12, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$H_{\mathcal{L}} \geqslant c\, H \circ \varphi.$$

Ainsi, on est ramené à montrer que l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = m \text{ et } H(x) \leqslant B\}$$

est fini, ce qui est exactement le théorème de Northcott [11] (on pourra aussi consulter, par exemple, [1] théorème 1.6.8.). □

En particulier, pour tout corps de nombres K et toute hauteur $H_{\mathcal{L}}$ donnée par une métrique adélique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) : \ [K(x) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

est fini. Nous avons donc montré la première partie du théorème 1.1. Plusieurs études ont déjà été menées pour donner une formule asymptotique du cardinal de cet ensemble lorsque B tend vers l'infini, dans le cas de la hauteur usuelle. Le théorème de Schanuel, déjà mentionné, résout le cas $m = 1$ des points rationnels sur K. Le théorème suivant traite le cas de la droite projective, $n = 1$.

Théorème 2.18 (Masser-Vaaler [9]). *Soient K un corps de nombres de degré d et m un entier non nul. On note*

$$N_K(B) = \#\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m \text{ et } H(\alpha) \leqslant B\}.$$

Lorsque B tend vers l'infini,

$$N_K(B) = mV_{\mathbf{R}}(m)^r V_{\mathbf{C}}(m)^s S_K(m) B^{dm(m+1)} + O(B^{dm(m+1)-1}\mathfrak{L}),$$

où

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \log(B) & \text{si } (d,m) = (1,1) \text{ ou } (d,m) = (1,2), \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $V_{\mathbf{R}}(m)$, $V_{\mathbf{C}}(m)$ et $S_K(m)$ sont des constantes strictement positives définies comme suit

$$S_K(m) = (m+1)^{r+s-1}\left(\frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|\Delta_K|}}\right)^{m+1}\frac{h_K R_K}{w_K\zeta_K(m+1)},$$

$$V_{\mathbf{R}}(m) = (m+1)^{\lfloor (m-1)/2\rfloor}\prod_{i=1}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor}\frac{(2i)^{m-2i}}{(2i+1)^{m+1-2i}},$$

et

$$V_{\mathbf{C}}(m) = \frac{(m+1)^{m+1}}{((m+1)!)^2}.$$

Nous souhaitons maintenant donner une nouvelle démonstration de ce théorème, ou du moins du terme principal, en adoptant un point de vue géométrique faisant appel au résultat connu de la conjecture de Batyrev-Manin sur l'espace projectif. Nous le généralisons également à toute hauteur absolue définie par une métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Avant ceci, nous faisons un point sur la conjecture de Batyrev-Manin.

3. Points rationnels et conjecture de Batyrev-Manin

Soit V une variété de Fano définie sur un corps de nombres K et dont le fibré anticanonique ω_V^{-1} sera supposé très ample. Soit U un ouvert de V et $H_{\omega_V^{-1}}$ une hauteur définie par une métrique adélique sur le fibré ω_V^{-1}. Notons

$$N_{U,H_{\omega_V^{-1}}}(B) = \#\{x \in U(K) :\ H_{\omega_V^{-1}}(x) \leqslant B\}.$$

La conjecture de Batyrev et Manin ([2], Conjecture B', p. 37) prévoit, si $V(K)$ est dense, le comportement asymptotique de $N_{U,H_{\omega_V^{-1}}}(B)$ lorsque B tend vers l'infini, pour U assez petit (on évite les sous-variétés dites accumulatrices). Plus précisément, elle donne

$$N_{U,H_{\omega_V^{-1}}}(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} cB(\log B)^{t-1}$$

où $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$ et c est une constante strictement positive.

Peyre a raffiné cette conjecture en donnant une interprétation géométrique de la constante c, compatible avec les cas connus et montre en particulier le résultat suivant, lorsque V est l'espace projectif :

Théorème 3.1 ([12], Corollaire 6.2.18 p. 169)**.** *Soit $H_{\omega^{-1}}$ une hauteur définie par une métrique adélique sur le fibré anticanonique de $\mathbf{P}^n$, $\omega^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1)$. Alors*

$$N_{\mathbf{P}^n_K,H_{\omega^{-1}}}(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K)B,$$

où $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K)$ est une constante strictement positive.

La suite de cette partie est consacrée à rappeler la définition de la constante de Peyre $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K)$ intervenant dans ce théorème. Nous utiliserons les mesures de Haar normalisées $\mathrm{d}x_v$, définies sur K_v de la manière suivante :

— si $v \in M_{K,f}$, $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$, où $\mathcal{O}_v = \{x \in K_v : |x|_v \leqslant 1\}$;

— si $K_v \simeq \mathbf{R}$, $\mathrm{d}x_v$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$;

— si $K_v \simeq \mathbf{C}$, $\mathrm{d}x_v$ désigne le double de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$.

La constante $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K)$ est définie à l'aide d'une mesure de Tamagawa comme suit. Soit $(t_1, \ldots, t_n)$ un système de coordonnées locales sur $\mathbf{P}^n(K_v)$, $v \in M_K$. La mesure locale $\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}$ sur $\mathbf{P}^n(K_v)$ est donnée par

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial t_n} \right\|_v^{d_v} \mathrm{d}t_{1,v} \ldots \mathrm{d}t_{n,v}.$$

Aux places ultramétriques $\mathfrak{p}$ pour lesquelles la norme $\|\cdot\|_v$ est définie de manière usuelle, ce qui est le cas pour presque toutes les places, le volume de $\mathbf{P}^n(K_\mathfrak{p})$ pour cette mesure est donné par le lemme suivant.

Lemme 3.2 ([12], Lemme 2.2.1)**.** *Soit $\mathfrak{p} \in M_{K,f}$ telle que $\|\cdot\|_\mathfrak{p}$ soit donnée par*

$$\|s(x)\|_\mathfrak{p} = \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_\mathfrak{p} \right)^{-1},$$

où $(s_0, \ldots, s_n)$ est une $\mathcal{O}_K$-base de $\Gamma\big(\mathbf{P}^n(\mathcal{O}_K), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1)\big)$. Alors

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},\mathfrak{p}}(\mathbf{P}^n(K_\mathfrak{p})) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^k} = \frac{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(n+1)}}{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}.$$

Ceci montre que le produit $\prod_{\mathfrak{p} \in M_{K,f}} \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},\mathfrak{p}}(\mathbf{P}^n(K_\mathfrak{p}))$ est divergent. Suivant Peyre [12], nous introduisons donc des facteurs de convergence

$$\lambda_v = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})} & \text{si } v = \mathfrak{p} \in M_{K,f}; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons alors définir une mesure sur l'ensemble des adèles $\mathbf{P}^n(\mathbf{A}_K)$, appelée *mesure de Tamagawa* associée à $H_{\omega^{-1}}$, par

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}}} = \Big(\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_K(s) \Big) \frac{1}{\sqrt{|\Delta_K|^n}} \prod_{v \in M_K} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}.$$

La constante $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K)$ est alors donnée par

$$C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K) = \frac{1}{n+1} \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n(\mathbf{A}_K)).$$

En utilisant la formule classique

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^r (2\pi)^s h_K R_K}{w_K \sqrt{|\Delta_K|}},$$

nous obtenons

$$(3.1)\qquad C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^n_K) = \frac{2^r(2\pi)^s h_K R_K}{(n+1)w_K\sqrt{|\Delta_K|^{n+1}}} \prod_{v\in M_K} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^n(K_v)).$$

Remarque 3.3. La lemme 3.2 montre que dans le cas d'une métrique usuelle à toute place finie,

$$\prod_{v\in M_{K,f}} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^n(K_v)) = \frac{1}{\zeta_K(n+1)}.$$

Si la métrique est la métrique usuelle à toutes les places, nous retrouvons la constante de Schanuel $S_K(n)$.

Partant du théorème 3.1, nous allons maintenant déterminer un équivalent asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur le m-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1_K$, ce qui nous permettra ensuite de déterminer le nombre de points algébriques de degré m et de hauteur bornée sur $\mathbf{P}^1_K$.

4. Points rationnels sur le produit symétrique

Le m-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1$ est par définition la variété projective quotient

$$\mathrm{Sym}^m\mathbf{P}^1 := (\mathbf{P}^1)^m/\mathfrak{S}_m,$$

où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit sur $(\mathbf{P}^1)^m$ par permutation des facteurs. On note $\pi\colon (\mathbf{P}^1)^m \to \mathrm{Sym}^m\mathbf{P}^1$ la projection canonique. Définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & (\mathbf{P}^1)^m & \longrightarrow & \mathbf{P}^m \\ & a & \longmapsto & [\sigma_0(a) : \cdots : \sigma_m(a)] \end{array}$$

où, pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$,

$$\sigma_i\big((a_1,b_1),\ldots,(a_m,b_m)\big) = \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,m\}\\ \#J=i}} \prod_{k\notin J} a_k \prod_{j\in J} b_j$$

est le i-ième polynôme symétrique élémentaire homogénéisé, un produit vide valant pas convention 1. Cette application induit un isomorphisme ε de $\mathrm{Sym}^m\,\mathbf{P}^1$ sur $\mathbf{P}^m$. Nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{P}^1)^m \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathrm{Sym}^m\,\mathbf{P}^1 \arrow[r, "\sim", "\varepsilon"'] & \mathbf{P}^m \end{tikzcd}$$

Notons $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1) = p_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)\otimes\cdots\otimes p_m^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$, où p_i est la i-ième projection $(\mathbf{P}^1)^m \to \mathbf{P}^1$. C'est un fibré en droites très ample sur $(\mathbf{P}^1)^m$. Par ailleurs, ce fibré est $\mathfrak{S}_m$-linéarisé (voir par exemple [7], Chapitre 7, pour la définition) ; l'action naturelle du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1)$ relève l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $(\mathbf{P}^1)^m$. D'après la théorie de la descente, il existe un unique fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$ tel que $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1) = \pi^*\mathcal{L}$. D'autre part, puisque σ est donnée par des polynômes de degré 1 en chaque variable de $(\mathbf{P}^1)^m$, nous avons $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1)$. Nous obtenons donc

$$\pi^*\varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1) = \pi^*\mathcal{L}.$$

Ainsi, $\mathcal{L} = \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$ et est très ample.

Soit $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ définissant une hauteur absolue $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}$ sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$. Cette métrique induit une métrique adélique sur $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1)$, toujours notée $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$, et la hauteur induite vérifie

$$H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1)}(a_1,\dots,a_m) = H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(a_1)\cdots H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(a_m). \tag{4.1}$$

Considérons maintenant la famille de normes sur les fibres de $\mathcal{L}$ définies par

$$\|s(\pi(a_1,\dots,a_m))\|_v = \|(\pi^*s)(a_1,\dots,a_m)\|_v\,, \tag{4.2}$$

pour toute section s de $\mathcal{L}$ et tout $(a_1,\dots,a_m)\in(\mathbf{P}^1)^m$. Celles-ci sont bien définies puisqu'elles ne dépendent pas de l'ordre des a_i.

Proposition 4.1. *Ces normes définissent une métrique adélique sur $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Soit $(s_1,\dots s_q)$ une base de $\Gamma(\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1,\mathcal{L})$. Notons pour tout point $x\in(\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(\mathbf{C}_v)$,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_v \max_{1\leqslant i\leqslant q}\left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right),$$

où s est une section de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en x. La métrique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1) = \pi^*\mathcal{L}$ étant adélique, l'application $\delta_v\circ\pi$ est continue sur $(\mathbf{P}^1)^m(\mathbf{C}_v)$, bornée pour toute place v et nulle pour presque toute place v. Puisque le morphisme π est fini, l'application

$$\pi\colon (\mathbf{P}^1)^m(\mathbf{C}_v) \to (\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(\mathbf{C}_v)$$

est fermée pour la topologie v-adique (voir [10], Proposition 2.2.1). De plus, le morphisme π est surjectif. On en déduit que l'application δ_v est elle-même continue sur $(\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(\mathbf{C}_v)$, bornée et nulle pour presque toute place v. L'invariance par conjugaison de la métrique sur $\mathcal{L}$ étant claire, celle-ci est bien adélique. $\square$

Cette métrique définit donc une hauteur $H_{\mathcal{L}}$ sur $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ telle que

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{L}}(\pi(a_1, \dots, a_m)) &= H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\dots,1)}(a_1, \dots, a_m) \\ &= H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(a_1) \cdots H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(a_m), \end{aligned}$$

pour tous $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$.

Théorème 4.2. *Soit K un corps de nombres de degré d et m un entier non nul. Alors*

$$\#\{[a] \in (\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \mid H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K) B^{d(m+1)},$$

où $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)$ est un nombre réel strictement positif définie par la formule (3.1) *pour la métrique tirée en arrière de* (4.2) *sur le fibré en droites*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = (\varepsilon^{-1})^* \mathcal{L}.$$

Démonstration. La métrique adélique (4.2) sur $\mathcal{L}$ induit par tiré en arrière une métrique adélique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = (\varepsilon^{-1})^* \mathcal{L}$ et induit donc une hauteur $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)}$ sur $\mathbf{P}^m(\bar{\mathbf{Q}})$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{P}^m(\bar{\mathbf{Q}})$,

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)}(x) = H_{\mathcal{L}}(\varepsilon^{-1}(x)).$$

Nous disposons alors de la hauteur absolue

$$H_{\omega^{-1}} = H^{m+1}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)},$$

associée au fibré anticanonique de $\mathbf{P}^m$, $\omega^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1)$, et de la hauteur $H_{\omega^{-1},K}$ sur $\mathbf{P}^m(K)$ donnée par

$$H_{\omega^{-1},K}(x) = H^{[K:\mathbf{Q}]}_{\omega^{-1}}(x) = H_{\mathcal{L}}(\varepsilon^{-1}(x))^{d(m+1)},$$

où $d = [K : \mathbf{Q}]$. Ainsi,

$$\#\{[a] \in (\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \mid H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B\}$$

est égal à

$$\#\{x \in \mathbf{P}^m(K) \mid H_{\omega^{-1},K}(x) \leqslant B^{d(m+1)}\}.$$

Le théorème 3.1 permet alors de conclure. □

5. Points algébriques sur la droite projective

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, déjà mentionné en introduction.

Théorème 5.1. *Soit $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}$ une hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ définie par une métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Soient K un corps de nombres de degré d, m un entier naturel non nul et B un réel. Alors l'ensemble*

$$\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha) \leqslant B\}$$

est fini et son cardinal $N_{H,m,K}(B)$ *vérifie*

$$N_{H,m,K}(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} mC_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)B^{dm(m+1)},$$

où $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)$ *est la constante de Peyre pour la hauteur* $H_{\omega^{-1}}$ *induite sur* $\mathbf{P}^m(K)$*.*

Soit $\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K})$ un point de degré m sur K tel que $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha) \leqslant B$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ses conjugués, c'est-à-dire les éléments α^σ, σ parcourant $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. D'après la proposition 2.14, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha_i) = H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha).$$

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbf{P}^1(\bar{K}))^m$. Alors $\pi(\underline{\alpha})$ est un point rationnel sur K de $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1$ car invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et vérifie, pour la hauteur $H_{\mathcal{L}}$ construite à la section précédente,

$$H_{\mathcal{L}}(\pi(\underline{\alpha})) = H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha_1) \cdots H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha_m) = H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha)^m \leqslant B^m.$$

De plus, le théorème 4.2 montre que

(5.1)
$$\#\{[a] \in (\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \mid H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B^m\} \underset{B\to+\infty}{\sim} C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)B^{dm(m+1)}.$$

Cependant, les points de $(\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ ne proviennent pas tous d'un point formé par les conjugués d'un point de degré m sur $\mathbf{P}^1(\bar{K})$. Un tel point sera dit *irréductible*. Il nous faut donc raffiner le théorème 4.2.

Proposition 5.2. *Lorsque* B *tend vers l'infini,*

$$\#\{[a] \in (\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \textit{ irréductible} \mid H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B\}$$

est équivalent à

$$C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)B^{d(m+1)}.$$

Démonstration. Il suffit ici de montrer que les points réductibles de l'ensemble $(\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ sont négligeables dans l'estimation du théorème 4.2. Nous pouvons identifier $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1$ à l'ensemble de 0-cycles effectifs de degré m sur $\mathbf{P}^1$. Nous utiliserons ici la notation en combinaison linéaire formelle. Soit $[a] \in (\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ un point réductible tel que $H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B$. Ceci signifie qu'il existe $[b] \in (\mathrm{Sym}^p \mathbf{P}^1)(K)$ et $[c] \in (\mathrm{Sym}^q \mathbf{P}^1)(K)$ tels que

$$[a] = [b] + [c],$$

avec $p + q = m$, $p \geqslant 1$ et $q \geqslant m/2$. Nous noterons toujours $\mathcal{L}$ les fibrés en droites obtenus sur $\mathrm{Sym}^p \mathbf{P}^1$ et $\mathrm{Sym}^q \mathbf{P}^1$. Alors

$$H_{\mathcal{L}}([a]) = H_{\mathcal{L}}([b])H_{\mathcal{L}}([c]).$$

Comme $H_{\mathcal{L}}([b]) \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$2^k \leqslant H_{\mathcal{L}}([b]) \leqslant 2^{k+1}.$$

Et alors,

$$1 \leqslant H_{\mathcal{L}}([c]) \leqslant 2^{-k}B.$$

Ceci implique que $k \ll \log(B)$. En utilisant (5.1) sur $\operatorname{Sym}^p \mathbf{P}^1$ et $\operatorname{Sym}^q \mathbf{P}^1$, nous obtenons que, le nombre de choix possibles pour $[b]$ est $\ll 2^{d(p+1)(k+1)}$ et celui pour $[c]$ est $\ll (2^{-k}B)^{d(q+1)}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\#\{[a] \in (\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \text{ réductible} \mid H_{\mathcal{L}}([a]) \leqslant B\} \\ &\ll \sum_{\substack{1 \leqslant k \ll \log(B) \\ \frac{m}{2} \leqslant q \leqslant m-1}} 2^{dk(m-2q)} B^{d(q+1)} \\ &\ll \log(B) B^{dm}.\end{aligned}$$

Or $dm < d(m+1)$, donc la contribution des points réductibles est négligeable dans l'estimation (5.1). $\square$

Pour finir la démonstration du théorème 5.1, il suffit de remarquer que si $[a] \in (\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ est irréductible, il peut provenir d'exactement m points $\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K})$ de degré m sur K (les m conjugués de α). Par conséquent

$$\#\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m, H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha) \leqslant B\}\}$$

est équivalent, lorsque B tend vers l'infini, à

$$m C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K) B^{dm(m+1)}.$$

Remarque 5.3. Chambert-Loir et Tschinkel [4, Théorème 3.5.6] ont déterminé une formule asymptotique pour le nombre de points entiers de hauteur bornée sur une compactification équivariante, donc en particulier $\mathbf{P}^m$. En procédant de la même manière que dans cet article, on peut déterminer une formule asymptotique pour le nombre de points entiers, de degré m et de hauteur bornée, sur $\mathbf{P}^1$. Une telle formule a récemment été démontrée par Barroero [3, Théorème 1.1].

6. Constante de Peyre

Pour finir cet article, explicitons la constante intervenant dans le théorème 5.1 dans certains cas particuliers. La métrique considérée sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$ est la métrique tirée en arrière de celle définie sur $\mathcal{L}$ par (4.2). En se plaçant sur la carte $U_0(K_v) = \{[1 : t_1 : \cdots : t_m] \in \mathbf{P}^m(K_v)\}$, la constante de Peyre $C_{H_{\omega^{-1}}}(\mathbf{P}^m_K)$ est égale à

$$\frac{2^r(2\pi)^s h_K R_K}{(m+1) w_K \sqrt{|\Delta_K|}^{m+1}} \prod_{v \in M_K} \lambda_v \int_{K_v^m} \|s_0([1 : t_1 : \cdots : t_m])\|_v^{d_v(m+1)} \, \mathrm{d}\underline{t},$$

avec

$$\lambda_v = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})} & \text{si } v = \mathfrak{p} \in M_{K,f} ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\|s_0([1:t_1:\cdots:t_m])\|_v = \prod_{\substack{a\in\bar{K}_v \text{ racine de}\\ T^m-t_1T^{m-1}+\cdots+(-1)^m t_m}} \frac{\exp\left(\delta_v([1:a])\right)}{\max\{1,|a|_v\}},$$

les racines de $T^m - t_1 T^{m-1} + \cdots + (-1)^m t_m$ étant comptées avec multiplicité. On rappelle que

$$\delta_v([1:a]) = \log\left(\|s_0([1:a])\|_v \max\{1,|a|_v\}\right).$$

Nous allons calculer cette constante $C_{H,m,K}$, donc en fait les volumes

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \int_{K_v^m} \|s_0([1:t_1:\cdots:t_m])\|_v^{d_v(m+1)}\,\mathrm{d}\underline{t},$$

dans certains cas particuliers.

6.1. Cas de la métrique usuelle sur $\mathbf{P}^1$. Commençons par le cas où $\delta_v = 0$ pour toute place v, c'est-à-dire dans le cadre du théorème 2.18 de Masser et Vaaler.

Proposition 6.1. *Soit $v \in M_K$ telle que $\delta_v = 0$.*

(1) Si $v = \mathfrak{p}$ est finie, alors

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \frac{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(m+1)}}{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}.$$

(2) Si $v \in M_K$ est telle que $K_v \simeq \mathbf{C}$, alors

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = (2\pi)^m \frac{(m+1)^m}{(m!)^2}.$$

(3) Si $v \in M_K$ est telle que $K_v \simeq \mathbf{R}$, alors

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = 2^m (m+1)^{l+1} \prod_{i=1}^{l} \frac{(2i)^{m-2i}}{(2i+1)^{m+1-2i}},$$

où $l = \left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor$.

Démonstration. Si $v = \mathfrak{p}$ est finie, on a

$$\prod_{\substack{a\in\bar{K}_v \text{ racine de}\\ T^m-t_1T^{m-1}+\cdots+(-1)^m t_m}} \max\{1,|a|_v\} = \max\{1,|t_1|_v,\ldots,|t_m|_v\},$$

donc par le lemme 3.2,

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \frac{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(m+1)}}{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}.$$

Lorsque $K_v \simeq \mathbf{R}$ et $K_v \simeq \mathbf{C}$, les intégrales voulues sont calculées dans [5, Théorème 1]. □

Ainsi, dans le cas où la hauteur initiale sur $\mathbf{P}^1$ est la hauteur usuelle, nous retrouvons l'équivalent donné dans le théorème 2.18. Ceci nous donne une interprétation de la constante de Masser-Vaaler en terme de mesure de Tamagawa.

6.2. Cas de la métrique euclidienne sur $\mathbf{P}^1$. Considérons la métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ donnée, aux places finies, par la métrique usuelle et, aux places infinies, par la norme euclidienne sur K_v^2, c'est-à-dire que, pour toute place infinie v, pour tout $x \in \mathbf{P}^1(K_v)$ et toute section s de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ ne s'annulant pas en x,

$$\|s(x)\|_v = \left(\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v^2 + \left|\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v^2\right)^{-1/2}.$$

La hauteur associée sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ sera noté H_2.
Nous nous plaçons, à titre d'exemple, dans le cas où $m = 2$.

Proposition 6.2. *Alors,*

(1) si $K_v \simeq \mathbf{C}$, $\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^2(K_v)) = \pi^2$;

(2) si $K_v \simeq \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^2(K_v)) = \frac{3\pi}{2}$;

(3) la constante de Peyre est

$$C_{H,2,K} = \frac{2^{s_K} 3^{r_K} \pi^{r_K+3s_K} h_K R_K}{3 w_K |\Delta_K|^{3/2} \zeta_K(3)}.$$

Démonstration. Comme aux places finies nous avons $\delta_v = 0$, la proposition 6.1 donne

$$\prod_{v\in M_{K,f}} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^2(K_v)) = \frac{1}{\zeta_K(3)}.$$

Il ne nous reste que les volumes archimédiens à calculer. Si $K_v = \mathbf{C}$, ce volume est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^2(K_v)) &= \int_{\mathbf{C}^2} \frac{\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2}{\prod_{\substack{t \text{ racine de} \\ T^2+z_1T+z_2}} (1+|t|^2)^{6/2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^2} \frac{|s-t|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(1+|s|^2)^3(1+|t|^2)^3} \\ &= \pi^2.\end{aligned}$$

Et, si $K_v = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^2(K_v)) &= \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\prod_{\substack{t \text{ racine de}\\ T^2+xT+y}} (1+|t|^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{|s-t|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(1+|s|^2)^{3/2}(1+|t|^2)^{3/2}} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}} \frac{|z-\bar{z}|\ \mathrm{d}z}{(1+|t|^2)^3} \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

6.3. Métrique induite par une droite de $\mathbf{P}^2$. Considérons à présent, pour $(a,b) \in K^2$, la métrique $(\|\cdot\|_{(a,b),v})_v$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ donnée, pour $v \in M_K$, $x \in \mathbf{P}^1(K_v)$ et s, section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ non nulle en x, par

$$\|s(x)\|_{(a,b),v} = \left(\max\left\{\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v, \left|\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v, \left|a\frac{s_0(x)}{s(x)} + b\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v\right\}\right)^{-1},$$

si v est finie et

$$\|s(x)\|_{(a,b),v} = \left(\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v^2 + \left|\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v^2 + \left|a\frac{s_0(x)}{s(x)} + b\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v^2\right)^{-1/2},$$

si v est infinie. Celle-ci peut-être vue comme la métrique induite par la métrique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$, donnée aux places infinie par la norme euclidienne, en restriction à la droite de $\mathbf{P}^2$ d'équation $ax_0 + bx_1 + x_2 = 0$, via l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{P}^2 \mid ax_0 + bx_1 + x_2 = 0\} \\ {[x_0 : x_1]} & \longmapsto & [x_0 : x_1 : -ax_0 - ax_1]\end{array}$$

Lorsque $(a,b) = (0,0)$, nous retrouvons la métrique considérée au paragraphe précédent.

Notons $H_{(a,b),\omega^{-1}}$ la hauteur sur $\mathbf{P}^m(\bar{\mathbf{Q}})$ induite par cette métrique $(\|\cdot\|_{(a,b),v})_v$ et $C_{(a,b),m,K}$ la constante de Peyre correspondante.

Proposition 6.3. *Alors*

$$C_{(a,b),m,K} = \frac{C_{(0,0),m,K}}{H_{2,K}([a:b:1])^m}.$$

Par exemple, lorsque $m = 2$, la proposition 6.2 donne

$$C_{(a,b),2,K} = \frac{2^{s_K} 3^{r_K} \pi^{r_K + 3s_K} h_K R_K}{3w_K\,|\Delta_K|^{3/2}\,\zeta_K(3)} \frac{1}{H_{2,K}([a:b:1])^2}.$$

Remarque 6.4. La constante $C_{(a,b),m,K}$ est celle apparaissant dans le terme principal du nombre de points de degré m sur la droite de $\mathbf{P}^2_K$ d'équation $ax_0+bx_1+x_2=0$. Nous retrouvons le résultat de [6] sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée sur une sous variété de $\mathbf{P}^m$, et obtenons un resultat semblable à [18] pour les points algbériques (bien que les droites de $\mathbf{P}^2$ ne rentrent pas dans les hypothèses du théorème de cet article).

Démonstration. Nous avons, pour toute place v finie,

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{(a,b),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v))=\int_{K_v^m}\frac{\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_m}{\prod\limits_{\substack{t\text{ racine de}\\ T^m+z_1T^{m-1}+\cdots+z_m}}\max\{1,|t|_v,|a+bt|_v\}^{d_v(m+1)}},$$

et pour toute place v infinie,

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{(a,b),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v))=\int_{K_v^m}\frac{\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_m}{\prod\limits_{\substack{t\text{ racine de}\\ T^m+z_1T^{m-1}+\cdots+z_m}}(1+|t|_v^2+|a+bt|_v^2)^{d_v(m+1)/2}},$$

où $d_v=[K_v:\mathbf{Q}_v]$. Soit v une place finie. Remarquons tout d'abord que le volume est symétrique en (a,b), par changement de variables sur les racines $t\mapsto\frac{1}{t}$. Nous pouvons donc supposer que $\max\{1,|a|_v,|b|_v\}=\max\{1,|b|_v\}$. Si $\max\{1,|b|_v\}=1$, alors nous avons clairement

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{(a,b),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v))=\boldsymbol{\omega}_{H_{(0,0),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)).$$

Si maintenant $\max\{1,|b|_v\}=|b|_v$, le changement de variables $t\mapsto a+tb$, donne

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{(a,b),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v))&=|b|_v^{-d_vm}\,\boldsymbol{\omega}_{(0,0),v}(\mathbf{P}^2(K_v))\\&=\max\{1,|a|_v,|b|_v\}^{-d_vm}\boldsymbol{\omega}_{H_{(0,0),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)).\end{aligned}$$

Soit maintenant v une place infinie. Alors, pour tout $t\in\mathbf{C}_v$,

$$1+|t|_v^2+|a+tb|_v^2=\overline{(t\quad 1)}Q(a,b)\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix},$$

avec

$$Q(a,b)=\begin{pmatrix}1+|b|_v^2 & a\bar{b}\\ \bar{a}b & 1+|a|_v^2\end{pmatrix},$$

matrice hermitienne définie positive. Son déterminant vaut $1+|a|_v^2+|b|_v^2$. De plus, il existe une unique matrice hermitienne définie positive $P(a,b)$ telle que $P(a,b)^2=Q(a,b)$. Notons

$$P(a,b)=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{pmatrix}.$$

Le changement de variables

$$t \mapsto \frac{p_1 t + p_2}{p_3 t + p_4}$$

permet de montrer que

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{(a,b),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \left(1 + |a|_v^2 + |b|_v^2\right)^{-d_v m/2} \boldsymbol{\omega}_{H_{(0,0),\omega^{-1}},v}(\mathbf{P}^m(K_v)).$$

□

Bibliographie

[1] E. Bombieri, W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, **4**, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[2] V.V. Batyrev, Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques*, Math. Ann., **286**, (1990), 27–43.

[3] F. Barroero, *Counting algebraic integers of fixed degree and bounded height*, arXiv :1305.0482 (2013).

[4] A. Chambert-Loir, Y. Tschinkel, *Integral points of bounded height on partial equivariant compactifications of vector groups*, Duke Math. J., **161**, (2012), 2799–2836.

[5] S. J. Chern, J. Vaaler, *The distribution of values of Mahler's measure*, J. reine angew. Math., **540** (2001), 1–47.

[6] C. Christensen, W. Gubler, *Der relative Satz von Schanuel*, Manuscripta Math., **126**, (2008), 505–525.

[7] I. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, Cambridge University Press, (2003).

[8] X. Gao, *On Northcott's theorem*, Thesis (Ph.D.)–University of Colorado, (1995).

[9] D. Masser, J. Vaaler, *Counting algebraic numbers with large height. II*, Trans. Amer. Math. Soc., **359**, (2007), 427–445.

[10] L. Moret-Baily, *Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos*, Math. Scand., **111**, (2012), 161–168.

[11] D. G. Northoctt, *An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **45**, (1949), 502–509 et 510–518.

[12] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J., **79**, (1995), 101–218.

[13] R. Rumely, C. Lau, R. Varley, *Existence of the sectional capacity*, Mem. Amer. Math. Soc., **145**, (2000).

[14] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France, **4**, (1979), 433–449.

[15] W. M. Schmidt, *Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case*, Acta Arith., **70**, (1995), 343–375.

[16] J. P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, Third edition (1997).

[17] M. Widmer, *Counting points of fixed degree and bounded height*, Acta Arith., **140**, (2009), 145–168.

[18] M. Widmer, *Counting points of fixed degree and bounded height on linear varieties*, J. Number Theory, **130**, (2010), 145–168.

[19] S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom., **4**, (1995), 1763–1784.

Cécile Le Rudulier
IRMAR, Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu, BÃ¢timent 22
35042 Rennes Cedex, France
E-mail: `cecile.lerudulier@univ-rennes1.fr`