Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Régis de la BRETÈCHE et Tim BROWNING

Contre-exemples au principe de Hasse pour certains tores coflasques

Tome 26, n° 1 (2014), p. 25-44.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2014__26_1_25_0>

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (http://jtnb.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://jtnb.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **26** (2014), 25–44

Contre-exemples au principe de Hasse pour certains tores coflasques

par Régis de la BRETÈCHE et Tim BROWNING

Pour Roger Heath-Brown à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. Nous étudions le comportement asymptotique du nombre de variétés dans une certaine classe ne satisfaisant pas le principe de Hasse. Cette étude repose sur des résultats récemment obtenus par Colliot-Thélène [3].

Abstract. *Counter-examples to the Hasse principle among certain coflasque tori.*
We study the density of varieties in a certain family which do not satisfy the Hasse principle. This work relies on results recently obtained by Colliot-Thélène [3].

1. Introduction

Nous nous intéressons à la fréquence de contre-exemples au principe de Hasse dans une famille de variétés algébriques définies sur $\mathbb{Q}$. Les courbes hyperelliptiques sont l'objet du travail de Bhargava [1]. Le cas des surfaces de Châtelet a été récemment étudié par La Bretèche et Browning [2].

Le but de cet article est de faire de même pour les variétés affines $Y \subset \mathbb{A}^6_{\mathbb{Q}}$, définies par

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = c, \tag{1.1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$. L'arithmétique de Y a été étudiée par Colliot-Thélène [3, §5], qui a notamment montré que le choix de coefficients $(a, b, c) = (13, 17, 5)$ donne un contre-exemple au principe de Hasse. Notre investigation quantitative est fondée sur son travail.

La variété Y est un espace principal homogène du tore coflasque

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = 1.$$

D'après un résultat de Sansuc [8, Cor. 8.7], l'obstruction Brauer–Manin est la seule obstruction au principe de Hasse. Soit Y^c une $\mathbb{Q}$-compactification lisse de Y et $\overline{Y^c} = Y^c \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$. Une caractéristique intéressante de Y est le

Manuscrit reçu le 16 octobre 2012, révisé le 22 janvier 2013, accepté le 14 mai 2013.
Classification math. 11D99, 11G35, 14G05.

fait qu'il existe un générateur universel explicite pour le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{Y^c}))$.

En fait, suite à [3, Thm. 4.1], si $a, b, ab \in \mathbb{Q}^* \smallsetminus \mathbb{Q}^{*2}$ on a

$$\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

avec l'algébre de quaternions $(x^2 - ay^2, b) \in \mathrm{Br}(\mathbb{Q}(Y))$ comme générateur, tandis que, si l'un des a, b, ab est dans $\mathbb{Q}^{*2}$, Y est $\mathbb{Q}$-rationnelle, et donc $\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = 0$. Nous utilisons cette description pour déterminer la fréquence à laquelle il existe des contre-exemples au principe de Hasse pour les variétés (1.1).

Nous paramétrons les variétés Y par l'ensemble

$$S = \{(a, b, c) \in (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})^3 : a, b, c \text{ sans facteur carré et } c > 0\}. \tag{1.2}$$

Il est évident que toute $\mathbb{Q}$-variété (1.1) est $\mathbb{Q}$-isomorphe à la variété définie par la même équation avec $(a, b, c) \in S$. Notre intérêt principal est de déterminer la répartition des éléments de S tels que $Y(\mathbb{Q})$ est vide (ou non-vide). À la lumière de [3, Prop. 5.1(a)], pour toute place v de $\mathbb{Q}$ et chaque $(a, b, c) \in S$, on a $Y(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$. Il n'y a donc jamais d'obstruction locale pour l'existence de $\mathbb{Q}$-points.

Soit $S(P) = \{(a, b, c) \in S : \max\{|a|, |b|, c\} \leqslant P\}$, pour $P \geqslant 1$. Nous estimons asymptotiquement, lorsque P tend vers l'infini, le cardinal

$$N_{\mathrm{Br}}(P) = \#\{(a, b, c) \in S(P) : Y(\mathbb{Q}) = \emptyset\}.$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1. *Lorsque $P \geqslant 2$, on a*

$$N_{\mathrm{Br}}(P) = \frac{\tau_1 P^3}{\log P} - \frac{\tau_2 P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{P^3}{(\log P)^2}\right),$$

où

$$\tau_1 = \frac{45}{\pi^5} \prod_{p>2} \Big(1 + \frac{1}{2p(p+1)}\Big) + \frac{15}{\pi^5} \prod_{p>2} \Big(1 + \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2p(p+1)}\Big),$$

$$\tau_2 = \frac{153}{16\pi^{\frac{7}{2}}} \prod_p \frac{(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{p})} \Big(1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2}\Big).$$

La différence $N_{\mathrm{glob}}(P) = \#S(P) - N_{\mathrm{Br}}(P)$ est le nombre de variétés Y paramétrées par $S(P)$ pour lesquelles $Y(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Le cardinal $\#S(P)$ étant facile à estimer, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Lorsque $P \geqslant 2$, on a*

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{glob}}(P) &= \#S(P) + O\left(\frac{P^3}{\log P}\right) \\ &= \frac{864}{\pi^6}P^3 + O\left(\frac{P^3}{\log P}\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a une proportion asymptotique de 100% des variétés Y qui ont des $\mathbb{Q}$-points.

Remerciements. Pendant l'élaboration de cet article, le premier auteur a été soutenu par un *IUF junior* et le *projet ANR (PEPR)*, tandis que le second auteur a été soutenu par la bourse *ERC 306457*.

2. L'obstruction Brauer–Manin

Nous rappelons quelques points clés du travail de Colliot-Thélène [3], sur les variétés Y définies en (1.1), lorsque (a, b, c) appartient à l'ensemble S défini en (1.2).

Selon [3, Prop. 5.1(c)], on a $Y(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ s'il existe un nombre premier p tel qu'aucun des a, b, ab ne soit pas un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$. Supposons que pour chaque premier p l'un au moins des a, b ou ab est un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$, alors il découle de [3, Prop. 5.1(d)] que $Y(\mathbb{Q}) = \emptyset$ si, et seulement si,

$$\sum_{\substack{p \\ a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}}} [c, b]_p \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ici $[\cdot,\cdot]_p : \mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini par $(\cdot,\cdot)_p = (-1)^{[\cdot,\cdot]_p}$, où $(\cdot,\cdot)_p$ est le symbole de Hilbert.

Lorsque $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, nous considérons

$$f(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a, b \text{ ou } ab \text{ est dans } \mathbb{Q}_p^{*2} \text{ pour tout } p, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$h(a,b,c) = \prod_{\substack{p \\ a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}}} (c,b)_p. \tag{2.1}$$

Notre problème est donc d'évaluer, lorsque P tend vers l'infini, la quantité

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Br}}(P) &= \sum_{(a,b,c)\in S(P)} \frac{f(a,b)}{2}(1 - h(a,b,c)) \\ &= \frac{1}{2}\left(N_1(P) - N_2(P)\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

où les définitions de $N_1(P)$ et $N_2(P)$ sont évidentes. Notre analyse de $N_1(P)$ et $N_2(P)$ est inspirée du travail de Friedlander et Iwaniec [5], qui lui-même suit les traces de [4, 6, 7].

Nous commençons avec l'observation

$$N_1(P) = \sum_{(a,b,c)\in S(P)} f(a,b) = \Bigg(\sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\\ |a|,|b|\leqslant P}} \mu^2(a)\mu^2(b)f(a,b)\Bigg)\Bigg(\sum_{1\leqslant c\leqslant P}\mu^2(c)\Bigg),$$

où μ est la fonction de Möbius. Nous étendons la définition de la fonction μ de telle sorte que $\mu(0)=0$. Le deuxième facteur est facile à estimer. Il vient

$$N_1(P) = \frac{6P}{\pi^2}\sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\\ |a|,|b|\leqslant P}} \mu^2(a)\mu^2(b)f(a,b) + O(P^{\frac{5}{2}}). \tag{2.3}$$

Il est clair que l'un au moins des a,b ou ab est un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$ pour chaque premier $p\nmid 2ab$. Quand $p=2$ et ab est impair, la condition relative à $p=2$ contenue dans $f(a,b)$ est que l'un au moins des a,b or ab est congru à 1 modulo 8. Rappelant que a,b sont des entiers sans facteur carré, nous avons alors l'égalité

$$\begin{aligned} f(a,b) = f_2(a,b) &\prod_{\substack{p\mid a\\ p\nmid 2b}} \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{b}{p}\right)\right)\prod_{\substack{p\mid b\\ p\nmid 2a}}\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{a}{p}\right)\right)\\ &\times\prod_{\substack{p\mid \gcd(a,b)\\ p\neq 2}}\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{ab/(a,b)^2}{p}\right)\right), \end{aligned}\tag{2.4}$$

avec

$$f_2(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2\nmid ab \text{ et } 1\in\{a,b,ab\} \pmod 8,\\ 1, & \text{si } 2\mid a \text{ et } b\equiv 1 \pmod 8,\\ 1, & \text{si } 2\mid b \text{ et } a\equiv 1 \pmod 8,\\ 1, & \text{si } 2\mid (a,b),\ ab\equiv 4 \pmod{32},\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Avec ϑ défini sur les impairs par $\vartheta(k)=1$ si $k\equiv 3 \pmod 4$ et $\vartheta(k)=0$ si $k\equiv 1\pmod 4$, la loi de réciprocité quadratique s'énonce, lorsque k et ℓ sont des nombres entiers impairs premiers entre eux, sous la forme

$$\left(\frac{k}{\ell}\right)\left(\frac{\ell}{k}\right) = (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell)}. \tag{2.5}$$

Nous terminons cette section par quelques mots sur les symboles de Hilbert (cf. [9, §3]). Soit p un nombre premier et $x,y\in\mathbb{Q}_p^*$. Supposant que $x=p^{\xi}u$

et $y = p^\eta v$, où u, v sont des p-unités, alors pour tout $p > 2$ nous avons

$$(x,y)_p = (-1)^{\xi\eta\vartheta(p)} \left(\frac{u}{p}\right)^\eta \left(\frac{v}{p}\right)^\xi, \tag{2.6}$$

tandis que lorsque $p = 2$, nous avons

$$(x,y)_2 = (-1)^{\vartheta(u)\vartheta(v) + \frac{\xi(v^2-1)}{8} + \frac{\eta(u^2-1)}{8}}. \tag{2.7}$$

3. Lemmes techniques

Lorsque $\nu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, nous considérons

$$\varphi_\nu(r) = \prod_{p \mid r} \Big(1 + \frac{\nu}{2p}\Big)^{-1}.$$

Nous aurons besoin de [5, Cor. 2], concernant

$$C_\nu(x; a, d, r, q, \chi) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,d)=1 \\ n \equiv a \,(\mathrm{mod}\, r)}} \frac{\mu^2(n)\chi(n)}{2^{\omega(n)}} \varphi_\nu(n),$$

où χ est un caractère modulo q et $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de n. Posons

$$c_\nu(r) = c_\nu(1) \prod_{p \mid r} \Big(1 + \frac{\varphi_\nu(p)}{2p}\Big)^{-1},$$

avec

$$c_\nu(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \Big(1 + \frac{\varphi_\nu(p)}{2p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons aussi δ la fonction caractéristique des caractères principaux.

Lemme 3.1. *Soient $A > 0$ fixé et $\nu \in \{0, 1, 2\}$. Lorsque a, d, r, q sont des entiers satisfaisant $(a, r) = (d, rq) = (r, q) = 1$, $x \geqslant 2$ et χ est un caractère modulo q, on a*

$$C_\nu(x; a, d, r, q, \chi) = \delta(\chi) \frac{c_\nu(drq)}{\varphi(r)} \frac{x}{\sqrt{\log x}} \Big\{1 + O\left(\frac{(\log 3drq)^{\frac{3}{2}}}{\log x}\right)\Big\} + O\left(\frac{\tau(d) rqx}{(\log x)^A}\right).$$

Démonstration. Dans [5, Cor. 2], ce résultat est démontré pour $\nu = 0$, la condition supplémentaire $(a, q) = 1$ étant inutile. Les cas $\nu = 1, 2$ se démontrent de la même manière. $\square$

Soient $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{d}=(d_1,d_2)$, $\mathbf{r}=(r_1,r_2)$ et $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$. Du Lemme 3.1, nous déduisons l'estimation de la somme

$$Q(\mathbf{x};\mathbf{a},\mathbf{d},r,\mathbf{q},\chi_1,\chi_2)=\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_i\leqslant x_i\\ (n_i,d_i)=1,(n_1,n_2)=1\\ n_i\equiv a_i \pmod r}}\mu^2(n_1n_2)\frac{\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)}{2^{\omega(n_1n_2)}},$$

où les χ_i sont des caractères modulo q_i.

Corollaire 3.1. *Soit $A>0$ fixé. Lorsque a_1,a_2, d_1, d_2, r, q_1, q_2 sont des entiers satisfaisant $(a_i,r)=(d_i,q_i)=(r,d_1d_2q_1q_2)=1$, $x_i\geqslant 2$ et χ_i sont des caractères modulo q_i, on a*

$$\begin{aligned}Q(\mathbf{x};\mathbf{a},\mathbf{d},r,\mathbf{q},\chi_1,\chi_2)=\;&\delta(\chi_1)\delta(\chi_2)\frac{c(\mathbf{d},r)}{\varphi(r)^2}\frac{x_1x_2}{\sqrt{\log x_1\log x_2}}\\ &\times\left\{1+O\left(\frac{(\log 3d_1d_2rq_1q_2)^{\frac32}}{\log\min\{x_1,x_2\}}\right)\right\}\\ &+O\left(\frac{\tau(d_1d_2)rq_1q_2x_1x_2}{(\log\min\{x_1,x_2\})^A}\right),\end{aligned}$$

avec

$$c(\mathbf{d},r)=\frac{6}{\pi^3}\frac{\varphi_1(d_1r)\varphi_1(d_2r)}{\varphi_1(d_1d_2r)^2}\varphi_2(d_1d_2r).$$

Démonstration. Notons Q la quantité à estimer. Une interversion de Möbius fournit

$$Q=\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ (n,d_1d_2rq_1q_2)=1}}\frac{\mu(n)\chi_1(n)\chi_2(n)}{4^{\omega(n)}}f(n),$$

avec $f(n)=C_0\left(x_1/n;n^{-1}a_1,d_1n,r,q_1,\chi_1\right)C_0\left(x_2/n;n^{-1}a_2,d_2n,r,q_2,\chi_2\right)$.

Nous pouvons restreindre la sommation aux entiers $n\leqslant T$ où T est égale à $(\log\min\{x_1,x_2\})^{\frac{A}{2}}$, la contribution complémentaire étant majorée par $O(x_1x_2/T)$. Nous appliquons ensuite le Lemme 3.1 avec $\nu=0$. Il vient

$$\begin{aligned}Q=\delta(\chi_1)\delta(\chi_2)&\sum_{\substack{n\leqslant T\\ (n,d_1d_2r)=1}}\frac{\mu(n)c_0(d_1nr)c_0(d_2nr)x_1x_2}{4^{\omega(n)}n^2\varphi(q)^2\sqrt{\log x_1\log x_2}}\\ &\times\left\{1+O\left(\frac{(\log 3d_1d_2rq_1q_2)^{\frac32}}{\log(\min\{x_1,x_2\})}\right)\right\}\\ &+O\left(\frac{\tau(d_1d_2)rq_1q_2x_1x_2T}{(\log(\min\{x_1,x_2\}))^A}+\frac{x_1x_2}{T}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$Q = \delta(\chi_1)\delta(\chi_2)\frac{c(\mathbf{d},r)x_1x_2}{\varphi(q)^2\sqrt{\log x_1\log x_2}}\left\{1+O\left(\frac{(\log 3d_1d_2rq_1q_2)^{\frac{3}{2}}}{\log\min\{x_1,x_2\}}\right)\right\}$$
$$+\,O\left(\frac{\tau(d_1d_2)rq_1q_2x_1x_2}{(\log\min\{x_1,x_2\})^{\frac{A}{2}}}\right).$$

Ici nous avons

$$\begin{aligned} c(\mathbf{d},r) &= c_0(d_1r)c_0(d_2r)\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ (n,d_1d_2r)=1}}\frac{\mu(n)\varphi_1(n)^2}{4^{\omega(n)}n^2}\\ &= \frac{1}{\pi}\varphi_1(d_1r)\varphi_1(d_2r)\prod_{p\mid d_1d_2r}\Big(1-\frac{1}{(2p+1)^2}\Big)^{-1}\prod_p\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\\ &= \frac{6}{\pi^3}\varphi_1(d_1r)\varphi_1(d_2r)\frac{\varphi_2(d_1d_2r)}{\varphi_1(d_1d_2r)^2}, \end{aligned}$$

ce qui fournit donc le résultat quitte à modifier la valeur de A. □

Lorsque q_1q_2 est grand, le Corollaire 3.1 est inutilisable. Nous aurons besoin ainsi du résultat suivant [5, Lemme 2].

Lemme 3.2. *Soient* $\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites de nombres complexes telles que* $|\alpha_m|,|\beta_n|\leqslant 1$*, dont le support est inclus dans les nombres impairs. Lorsque* $M,N\geqslant 1$*, on a*

$$\sum_{m\leqslant M}\sum_{n\leqslant N}\alpha_m\beta_n\left(\frac{n}{m}\right)\ll(MN^{\frac{5}{6}}+NM^{\frac{5}{6}})(\log 3MN)^{\frac{7}{6}}.$$

4. Étude de $N_1(P)$

Pour estimer $N_1(P)$ à partir de (2.3), nous considérons

$$T(P)=\sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\\ |a|,|b|\leqslant P}}\mu^2(a)\mu^2(b)f(a,b).$$

Lorsque $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{\pm1\}^2$ et $\alpha,\beta\in\{0,1\}$, nous notons $T(P;\alpha,\beta,\boldsymbol{\varepsilon})$ la contribution dans $T(P)$ des couples (a,b) tels que $2^\alpha\parallel a$ et $2^\beta\parallel b$, $\varepsilon_1 a>0$, $\varepsilon_2 b>0$. Les couples $(a2^{-v_2(a)},b2^{-v_2(b)})$ appartiennent à un ensemble $E_{\alpha,\beta}$ modulo 8, avec

$$\begin{aligned} E_{0,0}&=\{(1,\pm1),(1,\pm3),(-1,\pm1),(\pm3,1),(\pm3,\pm3)\},\\ E_{1,0}&=\{(\pm1,1),(\pm3,1)\},\\ E_{0,1}&=\{(1,\pm1),(1,\pm3)\},\\ E_{1,1}&=\{(\pm1,\pm1),(\pm3,\pm3)\}. \end{aligned}\tag{4.1}$$

Lorsque $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^2$ et $(a2^{-\alpha}, b2^{-\beta}) \equiv (a_0, b_0) \pmod 8$ avec $(a_0, b_0) \in E_{\alpha,\beta}$, $\varepsilon_1 a > 0$, et $\varepsilon_2 b > 0$, la formule (2.4) s'écrit aussi

$$\mu^2(a)\mu^2(b)f(a,b) = \sum_{\substack{(k,k',\ell,\ell',m,m')\in\mathbb{N}^6\\ a=\varepsilon_1 2^\alpha kk'mm'\\ b=\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell'mm'}} \frac{\mu^2(2kk'mm'\ell\ell')}{2^{\omega(kk'\ell\ell'mm')}} \left(\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a}{\ell}\right) \times \left(\frac{ab/(a,b)^2}{m}\right). \tag{4.2}$$

Il vient

$$T(P;\alpha,\beta,\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{(a_0,b_0)\in E_{\alpha,\beta}} \sum_{\substack{(k,k',\ell,\ell',m,m')\in\mathbb{N}^6\\ 2^\alpha kk'mm', 2^\beta \ell\ell'mm' \leqslant P\\ (\varepsilon_1 kk'mm', \varepsilon_2 \ell\ell'mm')\equiv(a_0,b_0) \pmod 8}} \frac{\mu^2(2kk'mm'\ell\ell')}{2^{\omega(kk'\ell\ell'mm')}} \times \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell'mm'}{k}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha kk'mm'}{\ell}\right)\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} kk'\ell\ell'}{m}\right).$$

La loi de réciprocité quadratique (2.5) et la multiplicativité des caractères fournissent

$$\left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell'mm'}{k}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha kk'mm'}{\ell}\right)\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} kk'\ell\ell'}{m}\right) = u\left(\frac{\ell'}{k}\right)\left(\frac{k'}{\ell}\right)\left(\frac{\ell'k'}{m}\right)\left(\frac{m'}{k\ell}\right), \tag{4.3}$$

avec

$$u = u(k,\ell,m) = (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell)+\vartheta(k)\vartheta(m)+\vartheta(m)\vartheta(\ell)} \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{km}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha}{\ell m}\right). \tag{4.4}$$

Un calcul simple fournit le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Lorsque* $(k,\ell) \equiv (k_0,\ell_0) \pmod 8$ *et* $(\varepsilon_1 k_0 m, \varepsilon_2 \ell_0 m) \in E_{\alpha,\beta}$, *on a*

$$u(k,\ell,m) = (-1)^{\vartheta(\varepsilon_1 k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2 \ell_0 m)+\vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2)+\vartheta(m)}.$$

Démonstration. Nous avons toujours

$$\left(\frac{2^\beta}{k_0 m}\right)\left(\frac{2^\alpha}{\ell_0 m}\right) = 1.$$

En effet, le cas $(\alpha,\beta) = (0,0)$ étant trivial, regardons le cas $(\alpha,\beta) = (1,0)$. Il découle de (4.1) que $\varepsilon_2 \ell_0 m \equiv 1 \pmod 8$ ce qui montre la formule dans ce cas. Les raisonnements sont identiques pour $(\alpha,\beta) = (0,1)$ ou $(1,1)$. Nous avons donc bien l'expression attendue. Comme

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{km}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{\ell m}\right) = (-1)^{\vartheta(k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2)+\vartheta(\ell_0 m)\vartheta(\varepsilon_1)},$$

nous avons

$$\begin{aligned}u(k,\ell,m) &= (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell)+\vartheta(k)\vartheta(m)+\vartheta(m)\vartheta(\ell)+\vartheta(k_0m)\vartheta(\varepsilon_2)+\vartheta(\ell_0m)\vartheta(\varepsilon_1)}\\ &= (-1)^{\vartheta(\varepsilon_1k_0m)\vartheta(\varepsilon_2\ell_0m)+\vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2)+\vartheta(m)},\end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat recherché. □

Nous reprenons la démarche développée dans [5]. Pour cela, soit

$$V = (\log P)^B,$$

où B est un paramètre qui sera choisi suffisamment grand en fonction de la valeur de A prise dans les applications du Corollaire 3.1.

La contribution à $T(P;\alpha,\beta,\boldsymbol{\varepsilon})$ des couples (a,b) tels que $mm' > V$ est $\ll P^2/V$. Dorénavant, nous nous restreignons au cas $mm' \leqslant V$.

La contribution à $T(P;\alpha,\beta,\boldsymbol{\varepsilon})$ des couples d'entiers (a,b) tels que $k \leqslant V$ et $k' \leqslant V$ est $\ll PV^2 \log P$. De même lorsque $\ell \leqslant V$ et $\ell' \leqslant V$.

Grâce au Lemme 3.2, du fait de la présence du facteur $(\frac{\ell'}{k})$, la contribution du cas $\ell' > V$ et $k > V$ est

$$\begin{aligned}&\ll \sum_{mm'\leqslant V}\ \sum_{\ell\leqslant P/(mm'V)}\ \sum_{k'\leqslant P/(mm'V)} \frac{P^2}{mm'k'\ell}\\ &\qquad\qquad \times\left\{\left(\frac{P}{mm'\ell}\right)^{-\frac16} + \left(\frac{P}{mm'k'}\right)^{-\frac16}\right\}(\log P)^{\frac76}\\ &\ll P^2V^{-\frac16}(\log P)^{\frac{13}{6}}(\log V)^2,\end{aligned}$$

ce qui suffit lorsque $B > 25$. Nous avons la même majoration lorsque $\ell > V$ et $k' > V$ grâce à la présence du facteur $(\frac{k'}{\ell})$.

Il nous reste à traiter le cas $k,\ell \leqslant V$ ou $k',\ell' \leqslant V$. Dans le premier cas, nous sommes amenés à considérer lorsque $(\varepsilon_1mm'kk_0', \varepsilon_2mm'\ell\ell_0') \in E_{\alpha,\beta}$ la somme

$$T_{k,\ell}(k_0',\ell_0',m,m') = \sum_{\substack{(k',\ell')\in\mathbb{N}^2\\ k'\leqslant P/(2^\alpha mm'k),\ell'\leqslant P/(2^\beta mm'\ell)\\ (k',\ell')=(k'\ell',mm'k\ell)=1\\ (k',\ell')\equiv(k_0',\ell_0')\ (\mathrm{mod}\ 8)}} \frac{\mu^2(k')}{2^{\omega(k')}}\frac{\mu^2(\ell')}{2^{\omega(\ell')}}\left(\frac{\ell'}{km}\right)\left(\frac{k'}{\ell m}\right),$$

alors que, dans le deuxième cas, lorsque $(\varepsilon_1mm'k_0k', \varepsilon_2mm'\ell_0\ell') \in E_{\alpha,\beta}$ nous estimerons la somme

$$T'_{k',\ell'}(k_0,\ell_0,m,m') = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\\ k\leqslant P/(2^\alpha mm'k'),\ell\leqslant P/(2^\beta mm'\ell')\\ (k,\ell)=(k\ell,mm'k'\ell')=1\\ (k,\ell)\equiv(k_0,\ell_0)\ (\mathrm{mod}\ 8)}} \frac{\mu^2(k)}{2^{\omega(k)}}\frac{\mu^2(\ell)}{2^{\omega(\ell)}}\left(\frac{\ell'm'}{k}\right)\left(\frac{k'm'}{\ell}\right).$$

En effet $u(k,\ell,m)=u(k_0,\ell_0,m)$, lorsque $(k,\ell)\equiv(k_0,\ell_0) \pmod 8$, ne dépend pas de (k,ℓ).

Nous avons $T_{k,\ell}(k_0',\ell_0',m,m')$ est égale à

$$Q\left(\frac{P}{2^\alpha mm'k},\frac{P}{2^\beta mm'\ell};k_0',\ell_0',m'k,m'\ell,8,\ell m,km,\chi_{\ell m},\chi_{km}\right),$$

où $\chi_n(\cdot)=\left(\frac{\cdot}{n}\right)$. Cette somme peut donc être estimée grâce au Corollaire 3.1. Nous obtenons

$$\begin{aligned}T_{k,\ell}(k_0',\ell_0',m,m') &= \frac{\mathbf{1}_{k=\ell=m=1}}{2^{2+\alpha+\beta}\pi^3}\frac{\varphi_2(m')}{m'^2}\frac{P^2}{\log P}\left\{1+O\Big(\frac{\log(2m')}{\log P}\Big)\right\}\\ &\quad+O\left(\frac{P^2\tau(kl)}{(\log P)^A}\right),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule $c(m',m',8,1,1)=4\varphi_2(m')/\pi^3$.

De même, posant

$$u'(k_0,\ell_0,m')=(-1)^{\vartheta(\ell_0)\vartheta(k'm')+\vartheta(k_0)\vartheta(\ell'm')},$$

nous obtenons grâce à (2.5)

$$\begin{aligned}T'_{k',\ell'}(k_0,\ell_0,m,m') &= u'(k_0,\ell_0,m')T_{k',\ell'}(k_0,\ell_0,m',m)\\ &= \frac{\mathbf{1}_{k'=\ell'=m'=1}}{2^{2+\alpha+\beta}\pi^3}\frac{\varphi_2(m)}{m^2}\frac{P^2}{\log P}\left\{1+O\Big(\frac{\log(2m)}{\log P}\Big)\right\}\\ &\quad+O\left(\frac{P^2\tau(k'\ell')}{(\log P)^A}\right).\end{aligned}$$

Enfin, nous en déduisons

$$\begin{aligned}T(P,\alpha,\beta,\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{\pi^3}\Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 2\nmid m}}\frac{\mu^2(m)\varphi_2(m)}{2^{\omega(m)}m^2}\tau_{\alpha,\beta}(m)\Big)\frac{P^2}{\log P}\left\{1+O\Big(\frac{1}{\log P}\Big)\right\}\\ &\quad+O\left(P^2(\log V)^3\left\{\frac{V^3}{(\log P)^A}+\frac{(\log P)^{\frac{13}{6}}}{V^{\frac16}}\right\}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\tau_{\alpha,\beta}(m)=\frac{\#E_{\alpha,\beta}}{2^{\alpha+\beta}}+\sum_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\\ (k_0,\ell_0)\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2\\ (\varepsilon_1k_0m,\varepsilon_2\ell_0m)\in E_{\alpha,\beta} \pmod 8}}\frac{u(k_0,\ell_0,m)}{2^{2+\alpha+\beta}},$$

où u a été défini en (4.4).

Grâce à (4.1), nous avons

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\{0,1\}^2}\frac{\#E_{\alpha,\beta}}{2^{\alpha+\beta}}=15.$$

Le Lemme 4.1 et les égalités (4.1) fournissent ainsi que

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\{0,1\}^2} \tau_{\alpha,\beta}(m)$$

est

$$\begin{aligned}
&= 15 + \sum_{(\alpha,\beta)\in\{0,1\}^2} \sum_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\\ (u_0,v_0)\in E_{\alpha,\beta} \,(\mathrm{mod}\, 8)}} \frac{(-1)^{\vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2)}}{2^{2+\alpha+\beta}}(-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)+\vartheta(m)}\\
&= 15 + (-1)^{\vartheta(m)} \sum_{(\alpha,\beta)\in\{0,1\}^2} \frac{1}{2^{1+\alpha+\beta}} \sum_{(u_0,v_0)\in E_{\alpha,\beta} \,(\mathrm{mod}\, 8)} (-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)}\\
&= 15 + 5(-1)^{\vartheta(m)}.
\end{aligned}$$

Un simple calcul fournit

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 2\nmid m}} \frac{z^{\vartheta(m)}\mu^2(m)\varphi_2(m)}{2^{\omega(m)}m^2} = \prod_{p>2}\Big(1 + \frac{z^{\vartheta(p)}}{2p(p+1)}\Big), \quad (z\in\{\pm1\}).$$

En choisissant $A = 81$ and $B = 26$, nous obtenons

$$T(P) = C\frac{P^2}{\log P}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log P}\Big)\Big\},$$

où

$$C = \frac{15}{\pi^3}\prod_{p>2}\Big(1 + \frac{1}{2p(p+1)}\Big) + \frac{5}{\pi^3}\prod_{p>2}\Big(1 + \frac{(-1)^{\vartheta(p)}}{2p(p+1)}\Big).$$

À partir de (2.3), il vient ainsi

$$N_1(P) = \frac{6C}{\pi^2}\frac{P^3}{\log P}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log P}\Big)\Big\}. \tag{4.5}$$

5. Étude de $N_2(P)$

Notre objectif dans cette section est d'estimer la somme

$$N_2(P) = \sum_{(a,b,c)\in S(P)} f(a,b)h(a,b,c).$$

Les calculs sont plus compliqués que pour l'estimation de $N_1(P)$ mais relèvent des mêmes méthodes.

Lorsque $f(a,b) \neq 0$, nous aurons besoin d'une expression simple de la fonction $h(a,b,c)$ définie en (2.1). Comme $(c,b)_p = 1$ pour tout nombre premier impair p ne divisant pas bc, nous avons

$$h(a,b,c) = \prod_{\substack{p\mid 2bc\\ a\notin\mathbb{Q}_p^{*2}}} (c,b)_p.$$

Rappelons la définition (1.2) de S. Nous paramétrons les $(a,b,c)\in S$ par

$$a=\varepsilon_1 2^{\alpha} d_0 d_{12} d_{13} a', \quad b=\varepsilon_2 2^{\beta} d_0 d_{12} d_{23} b', \quad c=2^{\gamma} d_0 d_{13} d_{23} c', \tag{5.1}$$

avec d_{ij}, d_0, a', b', c' des nombres impairs, $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$ et les conditions de coprimalité

$$\begin{aligned} &(d_{12},d_{13})=1, \quad (d_{12},d_{23})=1, \quad (d_{13},d_{23})=1,\\ &(a'b'c', d_{12}d_{13}d_{23})=(a',b'c')=(b',c')=1. \end{aligned}$$

Nous écrivons $h(a,b,c)=h_1(a,b,c)h_2(a,b,c)$, avec $h_1(a,b,c)$ le produit sur les p impairs et la quantité $h_2(a,b,c)$ désignant le facteur lié à $p=2$. Les deux résultats suivants concernent leur calcul explicite.

Lemme 5.1. *Lorsque* $(a,b,c)\in S$ *et* $f(a,b)\neq 0$*, on a*

$$h_1(a,b,c)=\frac{1}{2^{\omega(c')}}\sum_{nn'n''n'''=c'} \tilde{u}\left(\frac{a'}{nn''}\right)\left(\frac{b'}{n'n''d_0d_{13}}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{u}&=\tilde{u}(n,n',n'',n''',d_0,d_{12},d_{13},d_{23})\\ &=\mu(n'')(-1)^{\vartheta(d_0d_{12})\vartheta(d_0d_{13}nn')}\left(\frac{\varepsilon_1 2^{\alpha} d_{13}}{nn''}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta} d_{23}}{n'n''}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta}}{d_0d_{13}}\right)\\ &\quad\times\left(\frac{2^{\gamma}n''n'''}{d_0d_{12}}\right)\left(\frac{d_{23}}{d_{12}d_{13}}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Lorsque a,b,c sont sans facteur carré et $p\mid a$, alors on a $a\notin\mathbb{Q}_p^{*2}$. De plus, lorsque $p\nmid a$ et $p\mid b$, le fait que $f(a,b)\neq 0$ implique que a est un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$ ce qui est exclu. Lorsque $p\nmid a$, nous nous restreignons à $p\nmid b$ et donc $p\mid c$ et $(\frac{a}{p})=-1$. Ainsi d'après (2.6), nous avons $(c,b)_p=(\frac{b}{p})$. Il vient

$$\begin{aligned} h_1(a,b,c)&=\prod_{\substack{p\mid(bc,a)\\p>2}}(c,b)_p\prod_{\substack{p\mid c\\p\nmid 2ab}}\frac{1}{2}\Big\{1+\left(\frac{a}{p}\right)+\left(\frac{b}{p}\right)-\left(\frac{ab}{p}\right)\Big\}\\ &=\frac{1}{2^{\omega(c')}}\prod_{\substack{p\mid(bc,a)\\p>2}}(c,b)_p\sum_{nn'n''n'''=c'}\mu(n'')\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n'}\right)\left(\frac{ab}{n''}\right). \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\prod_{\substack{p\mid(bc,a)\\ p>2}}(c,b)_p=\prod_{p\mid d_0}\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{bc/p^2}{p}\right)\prod_{\substack{p\mid(a,b)\\ p\nmid 2c}}\left(\frac{c}{p}\right)\prod_{\substack{p\mid(a,c)\\ p\nmid 2b}}\left(\frac{b}{p}\right)$$
$$=\left(\frac{-1}{d_0}\right)\left(\frac{bc/d_0^2}{d_0}\right)\prod_{\substack{p\mid(a,b)\\ p\nmid 2c}}\left(\frac{c}{p}\right)\prod_{\substack{p\mid(a,c)\\ p\nmid 2b}}\left(\frac{b}{p}\right).$$

En utilisant les notations (5.1), nous obtenons

$$\prod_{\substack{p\mid(bc,a)\\ p>2}}(c,b)_p=\left(\frac{-1}{d_0}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta+\gamma}b'c'd_{12}d_{13}}{d_0}\right)\left(\frac{2^{\gamma}d_0d_{13}d_{23}c'}{d_{12}}\right)$$
$$\times\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta}d_0d_{12}d_{23}b'}{d_{13}}\right)$$
$$=\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta}b'}{d_0d_{13}}\right)\left(\frac{2^{\gamma}c'}{d_0d_{12}}\right)\left(\frac{d_{23}}{d_{12}d_{13}}\right)(-1)^{\vartheta(d_0d_{12})\vartheta(d_0d_{13})},$$

puisque la loi de réciprocité quadratique (2.5) fournit

$$\left(\frac{-1}{d_0}\right)\left(\frac{d_{12}d_{13}}{d_0}\right)\left(\frac{d_0d_{13}}{d_{12}}\right)\left(\frac{d_0d_{12}}{d_{13}}\right)=(-1)^{\vartheta(d_0d_{12})\vartheta(d_0d_{13})}.$$

Cela implique ainsi

$$h_1(a,b,c)=\frac{1}{2^{\omega(c')}}\sum_{nn'n''n'''=c'}\mu(n'')\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n'}\right)\left(\frac{ab}{n''}\right)$$
$$\times\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta}b'}{d_0d_{13}}\right)\left(\frac{2^{\gamma}c'}{d_0d_{12}}\right)\left(\frac{d_{23}}{d_{12}d_{13}}\right)(-1)^{\vartheta(d_0d_{12})\vartheta(d_0d_{13})}.$$

Puis, prenant $\tilde{u}$ comme dans l'énoncé du lemme, nous obtenons le résultat attendu après calcul de $(\frac{nn'}{d_0d_{12}})(\frac{d_0d_{12}}{nn'})$ par la loi de réciprocité quadratique (2.5). $\square$

Lemme 5.2. *Lorsque* $(a,b,c)\in S$, $f(a,b)\neq 0$ *et*

$$(a,b,c)=(2^{\alpha}u,2^{\beta}v,2^{\gamma}w),$$

avec u, v, w impair, on a

$$h_2(a,b,c) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \equiv 1 \pmod 8, \\ 1, & \text{si } 2 \mid a \text{ et } b \equiv 1 \pmod 8, \\ (-1)^{\vartheta(v)\vartheta(w)+\frac{\gamma(v^2-1)}{8}+\frac{w^2-1}{8}}, & \text{si } 2 \mid (a,b) \text{ et } uv \equiv 1 \pmod 8, \\ (-1)^{\vartheta(b)\vartheta(w)+\frac{\gamma(b^2-1)}{8}}, & \text{si } a \equiv 3,5,7 \pmod 8 \\ & \text{et } 1 \in \{b, ab\} \pmod 8, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $a \equiv 1 \pmod 8$ alors $a \in \mathbb{Q}_2^{*2}$ et ainsi $h_2(a,b,c) = 1$. Si $2 \mid a$ et $2 \nmid b$, alors $f(a,b) \neq 0$ implique $b \equiv 1 \pmod 8$. La formule (2.7) implique $h_2(a,b,c) = 1$. Si $2 \mid (a,b)$, alors $f(a,b) \neq 0$ implique $ab \equiv 4 \pmod{32}$. Donc la formule (2.7) implique le résultat. Si $a \equiv 3,5,7 \pmod 8$, alors $f(a,b) \neq 0$ implique que b est impair et que b ou ab est congru à $1 \pmod 8$. Lorsque $c = 2^\gamma w$, la formule (2.7) implique le résultat. □

Il est clair que la valeur de $h_2(a,b,c)$ ne dépend que de la valeur modulo 8 de (u,v,w) et des valuations 2-adiques α, β, γ. Avec les notations (5.1), nous avons

$$\frac{a}{(a,b)} = \varepsilon_1 2^{\alpha-\min\{\alpha,\beta\}} a' d_{13}, \quad \frac{b}{(a,b)} = \varepsilon_2 2^{\beta-\min\{\alpha,\beta\}} b' d_{23},$$

et $(a,b) = 2^{\min\{\alpha,\beta\}} d_0 d_{12}$. Dans la sommation (4.2), nous remplaçons les variables $(k, k', \ell, \ell', m, m')$ par

$$(kk_{13}, k'k'_{13}, \ell\ell_{23}, \ell'\ell'_{23}, m_0 m_{12}, m'_0 m'_{12}),$$

tels que

$$\begin{aligned} kk' = a', \ k_{13}k'_{13} = d_{13}, \\ \ell\ell' = b', \ \ell_{23}\ell'_{23} = d_{23}, \\ m_0 m'_0 = d_0, \ m_{12}m'_{12} = d_{12}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Lorsque $(a2^{-\alpha}, b2^{-\beta}) \equiv (a_0, b_0) \pmod 8$ avec $(a_0, b_0) \in E_{\alpha,\beta}$, $\varepsilon_1 a > 0$, et $\varepsilon_2 b > 0$ où $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^2$, la formule (4.2) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} f(a,b) = & \frac{1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta}ab)}} \sum \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell'\ell_{23}\ell'_{23} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}}{kk_{13}} \right) \\ & \times \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha kk'k_{13}k'_{13} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}}{\ell\ell_{23}} \right) \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} kk'k_{13}k'_{13}\ell\ell'\ell_{23}\ell'_{23}}{m_0 m_{12}} \right). \end{aligned}$$

avec $a=\varepsilon_1 2^\alpha kk'k_{13}k'_{13}m_0m'_0m_{12}m'_{12}$ et $b=\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell'\ell_{23}\ell'_{23}m_0m'_0m_{12}m'_{12}$ satisfaisant (5.2). La formule (4.3) fournit alors

$$\begin{aligned}f(a,b) = {} & \frac{1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta}ab)}}\sum u(kk_{13},\ell\ell_{23},m_0m_{12}) \\ & \times v(k,\ell,k_{13},k'_{13},\ell_{23},\ell'_{23},m_0m_{12},m'_0m'_{12})\Big(\frac{\ell'}{k}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell}\Big) \\ & \times\Big(\frac{k}{\ell'_{23}m'_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell_{23}m_0m_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell}{k'_{13}m'_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell'}{k_{13}m_0m_{12}}\Big),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}v &= v(k,\ell,k_{13},k'_{13},\ell_{23},\ell'_{23},m_0m_{12},m'_0m'_{12}) \\ &= \Big(\frac{\ell'_{23}}{k_{13}m_0m_{12}}\Big)\Big(\frac{k'_{13}}{\ell_{23}m_0m_{12}}\Big)\Big(\frac{m'_0m'_{12}}{k_{13}\ell_{23}}\Big) \\ &\quad\times(-1)^{\vartheta(k'_{13}m'_0m'_{12})\vartheta(\ell)+\vartheta(\ell'_{23}m'_0m'_{12})\vartheta(k)}.\end{aligned}$$

Le paramétrage (5.2) fournit aussi

$$h_1(a,b,c) = \frac{1}{2^{\omega(c')}}\sum_{nn'n''n'''=c'}\tilde u\ \Big(\frac{kk'}{nn''}\Big)\Big(\frac{\ell\ell'}{n'n''m_0m'_0k_{13}k'_{13}}\Big),$$

grâce au Lemme 5.1.

Lorsque $(a2^{-\alpha},b2^{-\beta},c2^{-\gamma})\equiv(u_0,v_0,w_0)\,(\mathrm{mod}\,8)$ avec $(u_0,v_0)\in E_{\alpha,\beta}$, $\varepsilon_1 a>0$, $\varepsilon_2 b>0$ où $\boldsymbol{\varepsilon}\in\{\pm1\}^2$, nous devons donc sommer le terme $f(a,b)h(a,b,c)$, qui est

$$\begin{aligned}&= \sum\frac{\tilde u_1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta-\gamma}abc)}}\Big(\frac{kk'}{nn''}\Big)\Big(\frac{\ell\ell'}{n'n''m_0m'_0k_{13}k'_{13}}\Big)\Big(\frac{\ell'}{k}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell}\Big) \\ &\quad\times\Big(\frac{k}{\ell'_{23}m'_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell_{23}m_0m_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell}{k'_{13}m'_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell'}{k_{13}m_0m_{12}}\Big) \\ &= \sum\frac{\tilde u_1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta-\gamma}abc)}}\Big(\frac{kk'}{nn''}\Big)\Big(\frac{\ell\ell'}{n'n''}\Big)\Big(\frac{\ell'}{k}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell}\Big) \\ &\quad\times\Big(\frac{k}{\ell'_{23}m'_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{k'}{\ell_{23}m_0m_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell}{k_{13}m_0m'_{12}}\Big)\Big(\frac{\ell'}{k'_{13}m'_0m_{12}}\Big),\end{aligned}$$

avec des sommations sur les entiers satisfaisant (5.2) et $c'=nn'n''n'''$, où

$$\begin{aligned}\tilde u_1 &= \tilde u_1(k,k',\ell,\ell',k_{13},k'_{13},\ell_{23},\ell'_{23},m_0,m'_0,m_{12},m'_{12}) \\ &= u(kk_{13},\ell\ell_{23},m_0m_{12})v(k,\ell,k_{13},k'_{13},\ell_{23},\ell'_{23},m_0m_{12},m'_0m'_{12}) \\ &\quad\times\tilde u(n,n',n'',n''',m_0m'_0,m_{12}m'_{12},k_{13}k'_{13},\ell_{23}\ell'_{23})h_2(a,b,c).\end{aligned}$$

Ici, nous avons

$$
\begin{aligned}
a &= \varepsilon_1 2^\alpha k k' k_{13} k'_{13} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12},\\
b &= \varepsilon_2 2^\beta \ell\ell' \ell_{23} \ell'_{23} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12},\\
c &= 2^\gamma n n' n'' n''' k_{13} k'_{13} \ell_{23} \ell'_{23} m_0 m'_0.
\end{aligned}
$$

La sommation sur (a,b,c) s'opère de la même manière que pour $N_1(B)$. Quitte à négliger une contribution englobée dans le terme d'erreur, nous pouvons supposer que

$$
m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} \leqslant V, \quad k_{13} k'_{13} \leqslant V, \quad \ell_{23}\ell'_{23} \leqslant V,
$$

avec $V = (\log P)^B$. Puis en appliquant le Lemme 3.2 du fait du facteur $\left(\frac{\ell'}{k}\right)\left(\frac{k'}{\ell}\right)$, nous pouvons nous restreindre au cas $k,\ell \leqslant V$ ou $k',\ell' \leqslant V$. De même, grâce au Lemme 3.2 et le facteur $(\frac{kk'}{nn''})(\frac{\ell\ell'}{n'n''})$, nous pouvons désormais supposer que $n,n',n'' \leqslant V$.

Le facteur $\tilde{u}_1$ ne dépend pas de k,ℓ,k',ℓ' mais seulement de leur valeur modulo 8. Soit

$$
P_1 = \frac{P}{2^\alpha m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} k_{13}}, \quad P_2 = \frac{P}{2^\beta m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} \ell_{23}}.
$$

En fixant $(k',\ell') \equiv (k'_0,\ell'_0) \pmod 8$, la somme sur (k',ℓ') lorsque $k,\ell \leqslant V$ à estimer est

$$
Q\left(\frac{P_1}{kk'_{13}}, \frac{P_2}{\ell\ell'_{23}}; k'_0, \ell'_0, \mathbf{d}, 8, \mathbf{q}, \chi_{q_1}, \chi_{q_2}\right), \tag{5.3}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \ell_{23} m_0 m_{12} n n'' \ell, & q_2 &= k'_{13} m'_0 m_{12} n' n'' k,\\
d_1 &= n' n''' m'_0 m'_{12} k k_{13} k'_{13} \ell'_{23}, & d_2 &= n n''' m_0 m'_{12} k_{13} \ell \ell_{23} \ell'_{23}.
\end{aligned}
$$

Respectivement, en fixant $(k,\ell) \equiv (k_0,\ell_0) \pmod 8$, la somme sur (k,ℓ) à estimer lorsque $k',\ell' \leqslant V$ est

$$
Q\left(\frac{P_1}{k'k'_{13}}, \frac{P_2}{\ell'\ell'_{23}}; k_0, \ell_0, \mathbf{d}', 8, \mathbf{q}', \chi_{q'_1}, \chi_{q'_2}\right), \tag{5.4}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
q'_1 &= m'_0 m'_{12} n n'' \ell' \ell'_{23}, & q'_2 &= k_{13} m_0 m'_{12} n' n'' k',\\
d'_1 &= n' n''' m_0 m_{12} k' k_{13} k'_{13} \ell_{23}, & d'_2 &= n n''' m'_0 m_{12} k'_{13} \ell \ell_{23} \ell'_{23}.
\end{aligned}
$$

La contribution principale provient du cas où les deux modules q_1, q_2 (resp. q'_1, q'_2) des caractères sommés sont égaux à un. Après cette sommation, il reste quatre variables $(n''', k_{13}, \ell'_{23}, m'_{12})$ (resp. $(n''', k'_{13}, \ell_{23}, m_{12})$).

Compte tenu du Corollaire 3.1, dans le premier cas, le terme principal obtenu pour l'évaluation de (5.3) est

$$\mathbf{1}_{\substack{\ell_{23}m_0m_{12}nn''\ell=1\\ k'_{13}m'_0m_{12}n'n''k=1}}\frac{\tilde u_2(m'_{12})}{\pi^3}\frac{\mu^2(2k_{13}\ell'_{23})}{2^{2+\alpha+\beta}}\frac{\varphi_2(k_{13}\ell'_{23}m'_{12})}{{m'_{12}}^2\ell'_{23}k_{13}}\frac{\mu^2(n''')\varphi_2(n''')}{2^{\omega(n'''\ell'_{23}k_{13}m'_{12})}}$$
$$\times\left(\frac{n'''}{m'_{12}}\right)\frac{P^2}{\log P}\left\{1+O\left(\frac{(\log 2\ell'_{23}k_{13}m'_{12})^{\frac32}}{\log P}\right)\right\},$$

avec

$$\tilde u_2(m'_{12})=(-1)^{\vartheta(m'_{12})\vartheta(k_{13})}\left(\frac{m'_{12}}{k_{13}}\right)\left(\frac{2^\gamma\ell'_{23}}{m'_{12}}\right)$$
$$\times h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k'_0k_{13}m'_{12},\varepsilon_2 2^\beta\ell'_0\ell'_{23}m'_{12},2^\gamma n'''k_{13}\ell'_{23}).$$

Nous avons utilisé ici la relation $u(k_{13},1,1)(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k_{13}})=1$, issue de (4.4).

Ensuite nous sommons les $n'''\leqslant P/(2^\gamma k_{13}\ell'_{23})$ congrus à $n'''_0 \pmod 8$ avec n'''_0 impair, premiers à $2k_{13}\ell'_{23}$ en appliquant le Lemme 3.1 avec $\nu=2$. Nous obtenons un terme principal

$$\mathbf{1}_{m'_{12}=1}\frac{\tilde u_2(1)}{\pi^3}\frac{\mu^2(2k_{13}\ell'_{23})}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}}\frac{\varphi_2(k_{13}\ell'_{23})c_2(2k_{13}\ell'_{23})}{2^{\omega(k_{13}\ell'_{23})}(k_{13}\ell'_{23})^2}$$
$$\times\frac{P^3}{(\log P)^{\frac32}}\left\{1+O\left(\frac{(\log 2\ell'_{23}k_{13})^{\frac32}}{\log P}\right)\right\},$$

avec $\tilde u_2(1)=h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k'_0k_{13},\varepsilon_2 2^\beta\ell'_0\ell'_{23},2^\gamma n'''_0k_{13}\ell'_{23})$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3. *Soient $z\in\{\pm1\}$. Alors*

$$\nu_2(z)=\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\{0,1\}^3}\sum_{\substack{(u_0,v_0)\in E_{\alpha,\beta}\pmod 8\\ w_0\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}}\frac{z^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)}}{2^{\alpha+\beta+\gamma}}h_2(2^\alpha u_0,2^\beta v_0,2^\gamma w_0)=68.$$

Démonstration. Nous utilisons l'expression (4.1) pour les $E_{\alpha,\beta}$ et le Lemme 5.2 pour le calcul de h_2. La somme $\nu_2(z)$ se décompose sous la forme suivante

$$=\begin{cases}36, & \text{si } \alpha=0,\ u_0\equiv 1\pmod 8,\\ 12, & \text{si } (\alpha,\beta)=(1,0),\ v_0\equiv 1\pmod 8,\\ 0, & \text{si } (\alpha,\beta)=(1,1),\\ 16, & \text{si } (\alpha,\gamma)=(0,0),\ u_0\equiv 3,5,7\pmod 8,\\ 4, & \text{si } (\alpha,\gamma)=(0,1),\ u_0\equiv 3,5,7\pmod 8.\end{cases}$$

Pour la troisième ligne, on a noté que $\sum_{w_0\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}z^{\vartheta(w_0)}(-1)^{\frac{w_0^2-1}{8}}=0$, ce qui achève la démonstration. □

Ensuite, avec la notation de §3, nous avons

$$\begin{aligned} c_2(2r) &= c_2(1)\prod_{p\mid 2r}\Big(1+\frac{1}{2(p+1)}\Big)^{-1} \\ &= \frac{6}{7\sqrt{\pi}}\prod_p\Big(1+\frac{1}{2(p+1)}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac12}\prod_{p\mid r}\Big(1+\frac{1}{2(p+1)}\Big)^{-1}, \end{aligned}$$

pour un impair r. Du Lemme 5.3, il découle la formule

$$\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\{0,1\}^3}\ \sum_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\\ (\varepsilon_1 k_0' k_{13},\varepsilon_2\ell_0'\ell_{23}')\in E_{\alpha,\beta}\ (\mathrm{mod}\, 8)\\ n_0'''\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}} \frac{\tilde u_2(1)}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}}=\frac{\nu_2(1)}{4}=17.$$

Puis enfin, nous sommons sur k_{13} et ℓ_{23}'. Nous avons

$$\sum_{k_{13},\ell_{23}'\in\mathbb{N}}\frac{\mu^2(2k_{13}\ell_{23}')\varphi_2(k_{13}\ell_{23}')}{2^{\omega(k_{13}\ell_{23}')}(k_{13}\ell_{23}')^2}\prod_{p\mid k_{13}\ell_{23}'}\Big(1+\frac{1}{2(p+1)}\Big)^{-1}=\prod_{p>2}\Big(1+\frac{1}{p(p+\frac32)}\Big).$$

Nous sommes donc amenés à une première contribution de (5.3) à $N_2(P)$ égale à

$$17\times\frac{6}{7\pi^{\frac72}}\times\frac78\prod_p\frac{(1-\frac1p)^{\frac12}}{(1+\frac1p)}\Big(1+\frac{3}{2p}+\frac{1}{p^2}\Big)\frac{P^3}{(\log P)^{\frac32}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log P}\Big)\Big\}. \tag{5.5}$$

Nous passons maintenant à la deuxième contribution, liée à (5.4). Grâce au Corollaire 3.1, lorsque $(k,\ell)\equiv(k_0,\ell_0)\ (\mathrm{mod}\, 8)$, le terme principal obtenu est

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{\substack{m_0'm_{12}'nn''\ell'\ell_{23}'=1\\ k_{13}m_0m_{12}'n'n''k'=1}}\frac{\tilde u_3(m_{12})}{\pi^3}\frac{\mu^2(2k_{13}'\ell_{23})}{2^{2+\alpha+\beta}}\frac{\varphi_2(k_{13}'\ell_{23}m_{12})}{m_{12}^2\ell_{23}k_{13}'}\frac{\mu^2(n''')\varphi_2(n''')}{2^{\omega(n'''\ell_{23}k_{13}'m_{12})}} \\ &\qquad\times\Big(\frac{n'''}{m_{12}}\Big)\frac{P^2}{\log P}\left\{1+O\left(\frac{(\log 2\ell_{23}k_{13}'m_{12})^{\frac32}}{\log P}\right)\right\}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde u_3(m_{12}) &= (-1)^{\vartheta(\ell_0\ell_{23}m_{12})\vartheta(k_{13}')}u(k_0,\ell_0\ell_{23},m_{12})\left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta}}{k_{13}'}\right)\left(\frac{2^{\gamma}\ell_{23}k_{13}'}{m_{12}}\right) \\ &\qquad\times h_2(\varepsilon_1 2^{\alpha}k_0k_{13}'m_{12},\varepsilon_2 2^{\beta}\ell_0\ell_{23}m_{12},2^{\gamma}n'''k_{13}'\ell_{23}). \end{aligned}$$

Ensuite, nous sommons les $n'''\leqslant P/(2^{\gamma}k_{13}'\ell_{23})$ congrus à $n_0'''\ (\mathrm{mod}\, 8)$ avec n_0''' impair, premiers à $2k_{13}'\ell_{23}'$ en appliquant le Lemme 3.1 avec $\nu=2$. Nous obtenons un terme principal

$$\mathbf{1}_{m_{12}=1}\frac{\tilde{u}_3(1)}{\pi^3}\frac{\mu^2(2k'_{13}\ell_{23})}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}}\frac{\varphi_2(k'_{13}\ell_{23})c_2(2k'_{13}\ell_{23})}{2^{\omega(k'_{13}\ell_{23})}(k'_{13}\ell_{23})^2} \times \frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}}\left\{1+O\left(\frac{(\log 2\ell_{23}k'_{13})^{\frac{3}{2}}}{\log P}\right)\right\}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{u}_3(1) &= (-1)^{\vartheta(\ell_0\ell_{23})\vartheta(k'_{13})}u(k_0,\ell_0\ell_{23},1)\left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k'_{13}}\right) \\ &\quad \times h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k_0k'_{13},\varepsilon_2 2^\beta\ell_0\ell_{23},2^\gamma n_0'''k'_{13}\ell_{23}) \\ &= u(k_0k'_{13},\ell_0\ell_{23},1)h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k_0k'_{13},\varepsilon_2 2^\beta\ell_0\ell_{23},2^\gamma n_0'''k'_{13}\ell_{23}).\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la définition (4.4) de u. D'après les Lemmes 4.1 et 5.3, nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\{0,1\}^3}\sum_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\\(\varepsilon_1k_0k'_{13},\varepsilon_2\ell_0\ell_{23})\in E_{\alpha,\beta}\ (\mathrm{mod}\ 8)\\ n_0'''\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}}\frac{\tilde{u}_3(1)}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} \\ &\quad= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\{0,1\}^3}\sum_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}\\(u_0,v_0)\in E_{\alpha,\beta}\ (\mathrm{mod}\ 8)\\ w_0\in(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}}(-1)^{\vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2)}\frac{(-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)}}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}}h_2 \\ &\quad= \frac{\nu_2(-1)}{8}=\frac{17}{2},\end{aligned}$$

où $h_2 = h_2(2^\alpha u_0, 2^\beta v_0, 2^\gamma w_0)$. Puis enfin une sommation sur k_{13} et ℓ'_{23} fournit une deuxième contribution à $N_2(P)$ égale à la moitié de (5.5).

Pour conclure, nous avons montré la formule

$$N_2(P)=\frac{153}{8\pi^{\frac{7}{2}}}\prod_p\frac{(1-\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{p})}\Big(1+\frac{3}{2p}+\frac{1}{p^2}\Big)\frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log P}\right)\right\}.$$

En combinant, dans (2.2), cette estimation avec (4.5), nous achevons la démonstration du Théorème 1.1.

Bibliographie

[1] M. Bhargava, *Most hyperelliptic curves over $\mathbb{Q}$ have no rational point.* Submitted, 2013. (arXiv:1308.0395)

[2] R. de la Bretèche et T. D. Browning, *Density of Châtelet surfaces failing the Hasse principle.* To appear in Proc. London Math. Soc. (arXiv:1210.4010)

[3] J.-L. Colliot-Thélène, *Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores.* J. Théor. Nombres Bordeaux **26** (2014), 69–83. (arXiv:1210.3644)

[4] E. Fouvry and J. Klüners, *On the* 4*-rank of class groups of quadratic number fields.* Invent. Math. **167** (2007), 455–513.

[5] J. Friedlander et H. Iwaniec, *Ternary quadratic forms with rational zeros.* J. Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), 97–113.

[6] C. R Guo, *On solvability of ternary quadratic forms.* Proc. London Math. Soc. **70** (1995), 241–263.

[7] D. R. Heath-Brown, *The size of Selmer groups for the congruent number problem.* Invent. Math. **111** (1993), 171–195.

[8] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres.* J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[9] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique.* Collection SUP : Le Mathématicien **2**, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Régis de la Bretèche
Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586
Université Paris Diderot
UFR de Mathématiques, Case Postale 7012
Bt Sophie Germain
F-75205 Paris CEDEX 13
E-mail: breteche@math.jussieu.fr

Tim Browning
School of Mathematics
University of Bristol
Bristol
BS8 1TW
E-mail: t.d.browning@bristol.ac.uk