

G. DAMAMME

**Irrationalité de  $\zeta(s)$  pour  $s \leq q$  dans certains modules de Drinfeld de rang 1**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 5, n° 1 (1993), p. 139-149

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1993\\_\\_5\\_1\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_139_0)

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Irrationalité de $\zeta(s)$ pour $s \leq q$ dans certains modules de Drinfeld de rang 1

par G. DAMAMME

### Introduction

Soit  $\mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q$  éléments, et  $p$  sa caractéristique. On considère le corps des séries de Laurent  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ . Si  $x \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ ,  $x \neq 0$ ,  $x$  s'écrit :

$$x = a_n T^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{T} + \cdots, \quad (a_n \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}).$$

On définit le degré, la valeur absolue et la signature de  $x$  par :

$$\deg x = n, \quad |x| = q^n \text{ et } \text{sign } x = a_n,$$

avec pour convention  $|0| = 0$  et  $\deg 0 = -\infty$ ,  $\text{sign } 0 = 0$  ;  $x$  sera dit unitaire si  $\text{sign } x = 1$ .

Soit  $x$  un élément unitaire de  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  de degré 2,  $\lambda$  une constante de  $\mathbb{F}_q$  (non nulle si  $p = 2$ ), et  $F$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{F}_q[X]$  de degré 3 (de discriminant  $\neq 0$  si  $p \neq 2$ ). Alors il existe  $y$  unitaire de  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  vérifiant :

$$y^2 + \lambda y = F(x),$$

(et nécessairement  $\deg y = 3$ ).

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{F}_q[x, y]/(y^2 + \lambda y = F(x)) \rightarrow \mathbb{F}_q(x, y) \\ g(x, y) \mapsto g(x, y) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

On posera :

$$A := \varphi(\mathbb{F}_q[x, y]/(y^2 + \lambda y = F(x))) \\ \text{et } k := \text{Frac}(A).$$

Comme:  $\mathbb{F}_q(x, y) \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ ,

on a :  $A \subset k \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ .

Le degré, la valeur absolue et la signature des éléments de  $k$  peuvent être induits par ceux de  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ . Dans ce cas le complété pour la valeur absolue n'est autre que :

$$k_\infty := \mathbb{F}_q((T^{-1})).$$

*Remarques :*

i) On a :  $\text{sign } x = 1$ ,  $\text{sign } y = 1$ ,

$$\text{deg } x = 2.$$

Comme le degré du polynôme  $F$  en  $T$  est 6, on a :  $\text{deg } y = 3$ .

ii) Si  $z \in A$ ,  $z$  peut s'écrire :

$$z = a + by, \text{ avec } a, b \in \mathbb{F}_q[x].$$

Comme  $a$  et  $b$  sont de degré pair, et  $\text{deg } y = 3$ , on a

$$\text{deg } z = \max(\text{deg } a, \text{deg } b + 3),$$

par conséquent  $A$  n'a pas d'éléments de degré 1.

On remarquera que la valeur absolue définie sur  $A$  par  $|z| = |\varphi(z)|$  est donc indépendante du choix de  $x$  et  $y$ . Il en est de même pour  $\text{sign}$ .

iii) On peut définir une structure de  $A$ -module de Drinfeld [5] de rang 1 auquel est associé une fonction  $e$ , analogue de la fonction exponentielle, admettant une période  $\tilde{\pi}$  transcendante sur  $K$ , ([9]). La fonction zêta définie au paragraphe suivant est indépendante de la structure de module de Drinfeld mais liée à la fonction  $e$  par la relation :

si  $(q - 1)$  divise  $s \in \mathbb{N}$ , alors

$$\zeta(s)/\tilde{\pi}^s \in K.$$

## 2. Fonction zêta

On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que :

(C) :  $Y^2 + \lambda Y = F(\lambda)$  est une courbe lisse de genre 1 choisie de façon que  $A$  soit principal.

On pose ensuite :

$$A_+ := \{z \in A, \text{sign } z = 1\},$$

(éléments unitaires de  $A$ ),

$$A_{n+} := \{z \in A_+; (\deg z) = n\}.$$

Calculons  $\text{card } A_{+n}$ . Soit  $z = a + by \in A_{+n}$ , avec  $a \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $b \in \mathbb{F}_q[x]$  ;

si  $n$  est impair :  $\deg b = n - 3$ ,  $\text{sign } b = 1$ ,  $\deg a < n$ . Il y a  $q^{(n-3)/2}$  choix pour  $b$  et  $q^{(n+1)/2}$  choix pour  $a$  ;

si  $n$  est pair :  $\deg a = n$ ,  $\text{sign } a = 1$ ,  $\deg b < n - 3$ . Il y a  $q^{n/2}$  choix pour  $a$  et  $q^{(n-2)/2}$  choix pour  $b$ .

On trouve donc dans les deux cas :

PROPOSITION. Si  $n \geq 2$ , alors,

$$(1) \quad \text{card } A_{+n} = q^{n-1}.$$

DÉFINITION ET COROLLAIRE. Si  $D_n := \prod_{z \in A_{+n}} z$ , alors :

$$(2) \quad \deg D_n = nq^{n-1}.$$

Définissons maintenant :

$$S_n(s) := \sum_{z \in A_{n+}} \frac{1}{z^s}$$

$$\text{et } \zeta(s) = \sum_{z \in A_+} \frac{1}{z^s}, \quad (s \in \mathbb{N}^*).$$

On a :

$$(3) \quad \zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{z \in A_{+n}} \frac{1}{z^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(s).$$

### 3. Résultats de Thakur ([8])

Thakur définit  $\binom{t}{q^n}$  par :

$$\binom{t}{q^n} := \frac{\prod_{(\deg a) < n} (t - a)}{\prod_{(\deg a) = n} a} = \frac{e_n(t)}{D_n},$$

où  $e_n(t)$  est une généralisation du polynôme de Carlitz, ([1]). Il montre ensuite que  $e_n(t)$  est  $\mathbb{F}_q$ -linéaire et pose :

$$\binom{t}{q^n} = \sum_j A_{nj} t^{q^j}.$$

En se servant du théorème de Riemann-Roch, Thakur montre alors que, si  $n \geq 2$ ,

$$(4) \quad A_{n0} = (-1)^{n-1} \frac{(D_0 D_1 \cdots D_{n-1})^{q-1}}{D_n}.$$

Il montre d'autre part, que si  $n \geq 1$  et  $s \leq q$ ,

$$(5) \quad S_n(s) = A_{n0}^s.$$

On en déduit donc que :

$$(6) \quad S_n(s) = \frac{(-1)^{s(n-1)} (D_0 D_1 \cdots D_{n-1})^{s(q-1)}}{D_n^s}.$$

C'est cette égalité que nous allons simplifier dans le paragraphe suivant.

### 4. Calcul de $\zeta(s)$

Pour simplifier (4), il faut trouver un équivalent du  $[k]$  défini dans le cas du module de Carlitz, ([4]). Il est donné par :

DÉFINITION.

$$I_n := \prod_{\substack{(\deg z) | n \\ \text{sign } z = 1 \\ z \text{ irréductible}}} z.$$

On a ainsi :  $D_1 = I_1 = 1$ , et

THÉORÈME 1. Si  $n \geq 2$ , alors

$$(7) \quad D_n = I_n I_{n-2}^q I_{n-3}^{q^2} \cdots I_2^{q^{n-3}}.$$

**Preuve :** On va montrer que

$$D_n \text{ et } F = I_n I_{n-2}^q \cdots I_k^{q^{n-k-1}} \cdots I_2^{q^{n-3}}$$

ont même décomposition en produit de facteurs irréductibles. Par définition de  $D_n$  et de  $I_k$ , et comme  $A$  est supposé principal, les diviseurs irréductibles de  $F$  et de  $D_n$  sont de degré  $h$ ,  $1 < h \leq n$ . Soit  $P$  un polynôme irréductible unitaire de degré  $h$ ,  $1 < h \leq n$ . Comme  $P$  divise  $I_k$  si et seulement si  $h$  divise  $k$ , la valuation de  $F$  est donnée par :

$$v_P(F) = \sum_{\substack{k \leq n-2 \\ h|k}} q^{n-k-1} + \varepsilon(h),$$

avec :

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \text{ divise } n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où :

$$v_P(F) = \sum_{i=1}^{[(n-2)/h]} q^{n-ih-1} + \varepsilon(h).$$

Calculons maintenant  $v_P(D_n)$  :

Pour chaque entier  $i \geq 1$ , désignons par  $\nu_i$  le nombre d'éléments  $z \in A_{+n}$  divisibles par  $P^i$  ; on a alors, si  $ih \leq n$  :

$$\nu_i = \text{card } A_{+n-ih} = \begin{cases} q^{n-ih-1} & \text{si } n-ih \geq 2, \\ 0 & \text{si } n-ih = 1, \\ 1 & \text{si } n-ih = 0, \end{cases}$$

et

$$\nu_i = 0 \text{ si } ih > n.$$

Or :

$$\begin{aligned} v_P(D_n) &= \sum_{i=1}^{[n/h]} i(\nu_i - \nu_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{[n/h]} \nu_i \\ &= \sum_{i=1}^{[(n-2)/h]} q^{n-ih-1} + \varepsilon(h) = v_P(F). \end{aligned}$$

Comme  $D_n$  et  $F$  sont unitaires, et que  $A$  est principal, on a bien :

$$D_n = F. \quad \square$$

**COROLLAIRE 1.** *Si  $n \geq 2$ , on a :*

$$(8) \quad D_{n+1} = \frac{1}{I_n^q} (I_{n+1} \cdots I_2) (D_n D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1}.$$

**Preuve :**

Ecrivons (7) à l'ordre  $n+1$  :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= I_{n+1} I_{n-1}^q I_{n-2}^{q^2} \cdots I_2^{q^{n-2}} \\ &= I_{n+1} \left( \frac{I_{n-1}}{I_n} \right)^q (I_n I_{n-2}^q \cdots I_2^{q^{n-3}})^q, \end{aligned}$$

d'où :

$$(9) \quad D_{n+1} = I_{n+1} \left( \frac{I_{n-1}}{I_n} \right)^q D_n^q.$$

Montrons maintenant (8) par récurrence. Comme :

$$D_3 = I_3, \quad D_2 = I_2,$$

on a :

$$D_3 = \frac{1}{I_2^q} I_3 I_2 D_2^{q-1},$$

et (8) est vraie pour  $n=2$ . Puis, supposons que :

$$D_n = \frac{1}{I_{n-1}^q} (I_n \cdots I_2) (D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1}.$$

Alors d'après (9) :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= I_{n+1} \left( \frac{I_{n-1}}{I_n} \right)^q D_n^{q-1} \frac{1}{I_{n-1}^q} (I_n \cdots I_2) (D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1} \\ &= \frac{1}{I_n^q} (I_{n+1} \cdots I_2) (D_n \cdots D_2)^{q-1}. \quad \square \end{aligned}$$

D'après (6) et (8), on a pour  $n \geq 2$  :

$$S_n(s) = \frac{(-1)^{s(n-1)} I_{n-1}^{qs}}{(I_2 \cdots I_n)^s},$$

d'où :

COROLLAIRE 2. Si  $s \leq q$ , alors,

$$(10) \quad \zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s(n-1)} I_{n-1}^{qs}}{(I_2 \cdots I_n)^s}.$$

## 5. Irrationalité de $\zeta(s)$ pour $s \leq q$

Avec les hypothèses énoncées au début du 2, on a :

THÉORÈME 2. Si  $s \leq q$ ,  $\zeta(s)$  n'appartient pas à  $K = \text{Frac } A$ .

*Remarques :*

a) L'hypothèse "A est principal" est essentielle dans la démonstration du théorème 1. A priori (7) n'est plus vraie si le nombre de classes d'idéaux est strictement supérieur à 1.

b) Si le genre de la courbe est 2, (7) se généralise, mais l'approximation de  $\zeta(s)$  n'est pas suffisante pour démontrer directement l'irrationalité de  $\zeta(s)$ .

c) Les deux hypothèses sur le genre et le nombre de classes nous conduisent à trois cas seulement, ([6], [7]),

i)  $A = \mathbb{F}_2[x, y]/(y^2 + y = x^3 + x + 1),$

ii)  $A = \mathbb{F}_3[x, y]/(y^2 = x^3 - x - 1),$

iii)  $A = \mathbb{F}_4[x, y]/(y^2 + y = x^3 + \theta),$  où  $\theta$  vérifie :  $\theta^2 + \theta + 1 = 0.$

### Preuve :

On utilise le critère d'irrationalité suivant :

LEMME. Soit  $A$  un sous anneau de  $K_\infty$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ , on ait  $|x| \geq 1$ . Soit  $K$  le corps des fractions de  $A$ , et soit  $\alpha \in K_\infty$ . S'il existe une suite  $(U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A \times A^*$  telle que  $|U_n - \alpha V_n| \neq 0$  pour tout  $n$ , et  $\lim_n |U_n - \alpha V_n| = 0$ , alors  $\alpha$  n'appartient pas à  $K$ .

**Preuve :** Si  $\alpha \in K$ , posons  $\alpha = \frac{R}{S}$ , où  $((R, S) \in A \times A^*)$ . Pour tout couple  $(U, V) \in A \times A^*$ , on a  $U - \alpha V = \frac{US - RV}{S}$ , donc si  $U - \alpha V \neq 0$ , on a  $|U - \alpha V| \geq \frac{1}{|S|}$  puisque  $US - RV \neq 0$ . Si  $(U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $A \times A^*$  telle que  $\lim |U_n - \alpha V_n| = 0$ , on a donc  $U_n - \alpha V_n = 0$  pour  $n$  suffisamment grand, contrairement à l'hypothèse du lemme.



D'après (10), si  $N \geq 2$ ,  $\zeta(s)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{U_N}{V_N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n(s),$$

avec  $(U_N, V_N) \in A \times A^*$  et  $V_N = (I_2 \cdots I_N)^s$ . On a donc :

$$|V_N \zeta(s) - U_N| \leq \sup_{n \geq N+1} |V_N S_n(s)|.$$

Or, si  $n = N + 1$  :

$$(12) \quad V_N S_{N+1}(s) = (I_N^q / I_{N+1})^s,$$

et pour  $n > N + 1$  :

$$(13) \quad |V_N S_n(s)| \leq |I_{n-1}^q / I_{n-1} I_n|^s.$$

On étudie donc les suites :

$$P_n := \deg I_n \text{ et } Q_n := \deg(I_{n+2} / I_{n+1}^q).$$

On a :

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 2q,$$

et d'après (2) et (9) : pour  $n \geq 1$ ,

$$(14) \quad P_{n+2} - q(P_{n+1} - P_n) = q^{n+1},$$

d'où :

$$Q_n = q^{n+1} - qP_n.$$

Comme la suite  $(q^n)$  vérifie (14), on trouve :

PROPOSITION. Si  $n \geq 2$ , on a :

$$(15) \quad P_n = q^n - \alpha^n - \alpha'^n$$

et

$$Q_n = q(\alpha^n + \alpha'^n),$$

avec

$$(16) \quad \alpha = \frac{q + \sqrt{q(q-4)}}{2} \text{ et } \alpha' = \frac{q - \sqrt{q(q-4)}}{2}.$$

D'après (12) et (13) et les définitions de  $P_n$  et  $Q_n$  on a :

$$(17) \quad \deg(V_N S_{N+1}(s)) = -sQ_{N-1},$$

$$(18) \quad \deg(V_N S_n(s)) \leq -s(Q_{n-2} + P_{n-1}).$$

On va maintenant chercher à estimer

$$|V_N \zeta(s) - U_N|$$

dans chacun des cas i), ii) et iii) : (voir remarque c))

i) si  $q = 2$ , alors (16) devient

$$Q_n = 4 \cdot 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4},$$

et

$$P_n \sim 2^n.$$

D'où :

$$Q_{n-2} + P_{n-1} \sim 2^{n-1}.$$

Pour  $N \equiv 1 \pmod{8}$ , on a :

$$Q_{N-1} = 2^{(N+3)/2}.$$

Comme pour  $n > N + 1$ , on a pour  $N$  suffisamment grand  $Q_{n-2} + P_{n-1} > 2^{(N+3)/2}$ , on conclut donc que pour  $N \equiv 1 \pmod{8}$  on a :

$$|V_N \zeta(s) - U_N| = |T|^{-s2^{(N+3)/2}}.$$

Il résulte donc du critère d'irrationalité que  $\zeta(s)$  n'appartient pas à  $K$ .

ii) si  $q = 3$ , alors d'après (16)

$$Q_n = 6 \cdot 3^{n/2} \cos \frac{n\pi}{6},$$

et, d'après (15),

$$P_n \sim 3^n.$$

Il en résulte comme précédemment que pour  $N \equiv 1 \pmod{12}$ , et  $N$  suffisamment grand, on a :

$$Q_{N-1} = 2 \cdot 3^{(N+1)/2},$$

et

$$|V_N \zeta(s) - U_N| = |T|^{-2s3^{(N+1)/2}},$$

donc  $\zeta(s)$  n'appartient pas à  $K$ .

iii) si  $q = 4$ , on a

$$Q_n = 2^{n+3} \text{ et } P_n = 4^n - 2^{n+1},$$

et donc, pour tout  $N$ ,

$$Q_{N-1} = 2^{N+2},$$

et pour  $n > N + 1$ ,

$$Q_{n-2} + P_{n-1} > 2^{N+2},$$

donc

$$|V_N \zeta(s) - U_N| = |T|^{-s2^{N+2}},$$

donc  $\zeta(s)$  n'appartient pas à  $K$ .

Ces approximations ne peuvent conduire à des mesures d'irrationalité de  $\zeta(s)$ , car elles ne sont pas du type  $|V_N \zeta(s) - U_N| \leq |V_N|^{-\gamma}$ , où  $\gamma$  soit un nombre réel positif.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. CARLITZ, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), 137-168.
- [2] H. CHÉRIF et B. de MATHAN, *Irrationality measures of Carlitz zeta values in positive characteristic*, J. Number Theory **44** (1993), 260-272.
- [3] G. DAMAMME, *Irrationalité de  $\zeta(s)$  dans le corps des séries formelles  $\mathbb{F}_q((1/t))$* , C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9** (1987), 207-212.
- [4] G. DAMAMME and Y. HELLEGOUARCH, *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory **39** (1991), 257-278.
- [5] V. DRINFELD, *Elliptic modules (English translation)*, Math. Sbornik **23** (1974), 561-592.
- [6] D. HAYES, *Explicit class field theory in global function fields*, G. C. Rota (ed). Studies in Algebra and Number theory. Academic press (1979), 173-217.
- [7] J. LEITZEL, M. MADAN, C. QUEEN, *On congruence function fields of class number one*, J. Number Theory **7** (1975), 11-27.
- [8] D. S. THAKUR, *Drinfeld modules and arithmetic in the function fields*, J. Number Theory, à paraître.
- [9] J. YU, *Transcendence and Drinfeld modules*, Invent. Math. **83** (1986), 507-517.

- [10] J. YU, *Transcendence and special zeta values in characteristic  $p$* , *Annals of Math.* **134** (1991), 1–23.

G. Damamme  
11 rue Paul Verlaine  
F-14730 Giberville