

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Titem HARRACHE et Odile LECACHEUX

**Étude des fibrations elliptiques d'une surface  $K3$**

Tome 23, n° 1 (2011), p. 183-207.

<[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2011\\_\\_23\\_1\\_183\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2011__23_1_183_0)>

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## Étude des fibrations elliptiques d'une surface $K3$

par TITEM HARRACHE et ODILE LECACHEUX

RÉSUMÉ. On s'intéresse aux fibrations elliptiques d'une surface  $K3$  singulière en vue de construire des courbes elliptiques avec 7-torsion et rang  $> 0$  sur  $\mathbb{Q}$ .

ABSTRACT. *Elliptic fibrations of a  $K3$  surface.*

The aim of this paper is to study the elliptic fibrations of a singular  $K3$  surface to obtain elliptic curves with 7-torsion points and rank  $> 0$  over  $\mathbb{Q}$ .

### 1. Introduction

Cet article portera sur l'étude des courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}(T)$  avec un groupe de torsion d'ordre 7. Dans ce cas, la courbe elliptique universelle  $S$  (donnée par l'équation (3.1)) considérée comme surface elliptique sur la courbe modulaire  $X_1(7)$  est une surface  $K3$ . Le rang de la fibre générique de cette surface elliptique est 0. Cette surface admet différentes fibrations elliptiques. Nous poursuivons l'étude de ces fibrations commencée dans [7] et [9]. Les fibrations étudiées sont définies sur  $\mathbb{Q}$ , ont des sections et un groupe de Mordell-Weil de rang 1 ou 2 sur  $\mathbb{Q}(B)$  où  $B$  est la base de la fibration, ce qui permet de construire des courbes sur la surface  $K3$ . Par changement de base  $C \rightarrow X_1(7)$  on obtient une nouvelle surface elliptique  $S \times_{X_1(7)} C$ , dont la fibre générique a un rang  $\geq 1$  sur  $\mathbb{Q}(C)$ . Les cas les plus simples sont obtenus avec des revêtements  $C \rightarrow X_1(7)$  de degré 2. Dans [7] et [9], on donne 4 exemples de degré 2. Les autres fibrations étudiées dans cet article n'ont pas permis d'en trouver d'autres. Par contre les fibrations étudiées dans cet article ont permis de trouver des exemples nouveaux où  $C \simeq \mathbb{P}^1$  et  $C \rightarrow X_1(7)$  est un revêtement de degré 3, et de retrouver les 4 exemples déjà connus de degré 2. Dans cet article nous étudierons seulement certaines fibrations construites avec un graphe. D'autres fibrations et les résultats numériques feront l'objet d'une autre publication. Rappelons que, par un théorème de [12], il n'y a, pour une surface  $K3$ , qu'un nombre fini de fibrations elliptiques à automorphisme près.

Dans le paragraphe suivant nous rappellerons les principaux théorèmes utilisés pour construire ces fibrations elliptiques.

---

*Mots clefs.* Elliptic fibrations,  $K3$  surfaces.

*Classification math..* 14J27, 14J28.

Ensuite dans les paragraphes 4, 5, 6 nous étudierons le groupe de Néron Severi de la surface et donnerons les diviseurs de certaines fonctions.

Ceci nous permettra au paragraphe 4 de construire un graphe à partir de certaines composantes des fibres singulières et des sections de torsion.

Le paragraphe 7 est consacré à la construction des fibrations à partir du graphe, sachant qu'un sous-graphe isomorphe au graphe des fibres singulières de la classification de Kodaira définit une fibration elliptique. Des équations de Weierstrass de ces fibrations seront données. Elles permettront, en utilisant les formules d'addition, de construire explicitement une infinité de courbes sur  $S$ .

## 2. Rappels

Donnons quelques rappels utiles dans ce travail. On pourra consulter [1] et [10] pour une présentation plus complète.

On notera  $X$  une surface algébrique lisse et projective définie sur un sous-corps algébriquement clos  $k$  du corps  $\mathbb{C}$  des complexes.

**Définition.** Une surface elliptique est la donnée d'une surface  $X$  et d'un morphisme propre  $\pi : X \rightarrow C$  vers une courbe  $C$  algébrique, lisse et projective telle que

- il existe une section  $\sigma : C \rightarrow X$
- la fibre générique  $E$  est une courbe elliptique
- $\pi$  est relativement minimal.

La courbe  $C$  est appelée la base de la fibration. Si  $C$  est une courbe de genre 0 nous appellerons, conformément à la terminologie de [6], paramètre elliptique un générateur du corps de fonctions de  $C$ . Le paramètre est défini à homographie près.

**Définition.** La surface  $X$  est une surface  $K3$  si  $H^1(X, O_X) = 0$  et si le fibré canonique est trivial, i.e.  $K_X \cong 0$ .

**Exemple.** Une surface elliptique avec une équation de Weierstrass

$$y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t)$$

où les  $a_i(t)$  sont des polynômes de degré  $\leq 2i$  avec au moins l'un des degrés  $> i$  définit une surface  $K3$ .

Pour une surface  $K3$ , les équivalences linéaire, algébrique et numérique coïncident. Le groupe de Néron-Severi de  $X$  (qui est le groupe des classes de diviseurs modulo l'équivalence algébrique) possède une forme bilinéaire symétrique (induite par l'accouplement d'intersection), notée  $\cdot$ , non dégénérée, de signature  $(1, \rho - 1)$  où  $\rho$  est le rang du groupe de Néron-Severi (appelé nombre de Picard de  $X$ ).

Si  $X$  est une surface elliptique, alors les fibres sont des courbes elliptiques, sauf pour un nombre fini d'entre elles. Les fibres singulières sont décrites par la classification de Néron-Kodaira (voir le tableau [1] page 201).

Pour construire les fibrations elliptiques nous aurons besoin de la proposition suivante (voir [10] Prop 12.12).

**Proposition 2.1.** *Soit  $X$  une surface K3 et  $D$  un diviseur effectif sur  $X$  de même type qu'une fibre singulière au sens de Kodaira d'une surface elliptique, alors il existe une unique fibration elliptique  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  pour laquelle  $D$  est une fibre singulière. De plus, toute courbe irréductible  $C$  sur  $X$  telle que  $C.D = 1$  définit une section de  $f$ .*

Enfin nous utiliserons le théorème suivant [11] :

**Théorème 2.1** (Théorème de Tate-Shioda). *Si  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une surface elliptique K3 et  $\pi^{-1}(x_v)$ ,  $1 \leq v \leq s$ , les fibres singulières, on note  $\varepsilon_v, m_v$  et  $m_v^{(1)}$  respectivement le nombre d'Euler, le nombre de composantes irréductibles, le nombre de composantes irréductibles et simples de la fibre singulière  $\pi^{-1}(x_v)$ . On a alors*

-  $\sum_{v=1}^s \varepsilon_v = 24$

- Si  $\rho$  est le rang du groupe de Néron-Severi et  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil,

$$\rho = r + 2 + \sum_{v=1}^s (m_v - 1).$$

- Si  $r = 0$  et si  $t$  est l'ordre du groupe de torsion du groupe de Mordell-Weil,

$$|\det(NS(X))| = \frac{\prod m_v^{(1)}}{t^2}.$$

- Si  $\Delta$  est le déterminant de la matrice des hauteurs d'une base du groupe de Mordell-Weil,

$$|\det(NS(X))| = \Delta \frac{\prod m_v^{(1)}}{t^2}.$$

### 3. Courbe modulaire $X_1(7)$ et surface modulaire $S$

La courbe modulaire  $X_1(7)$  est de genre 0 isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . La surface modulaire  $S$  dont l'équation (3.1) est donnée dans [13] et [14], a les propriétés suivantes : à chaque point  $(d, 1)$  de  $\mathbb{P}^1$  on peut associer la paire  $(E_d, A)$  où  $E_d$  est la courbe donnée par l'équation

$$(3.1) \quad E_d : y^2 + (1 + d - d^2)xy + (d^2 - d^3)y = x^3 + (d^2 - d^3)x^2$$

et  $A = (0, 0)$  un point sur cette courbe. Si le discriminant  $D = d^7 (d - 1)^7 (d^3 - 8d^2 + 5d + 1)$  n'est pas nul, la courbe  $E_d$  est une courbe

elliptique d'invariant

$$j = \frac{(d^2 - d + 1)^3(d^6 - 11d^5 + 30d^4 - 15d^3 - 10d^2 + 5d + 1)^3}{d^7(d - 1)^7(d^3 - 8d^2 + 5d + 1)}$$

et le point  $A$  est d'ordre 7.

Les coordonnées  $(x_{iA}, y_{iA})$  des points  $(iA)$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , sont données dans le tableau suivant :

	0	$A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$
$x$	$\infty$	0	$d^2(d - 1)$	$d(d - 1)$	$d(d - 1)$	$d^2(d - 1)$	0
$y$	$\infty$	0	$d^3(d - 1)^2$	$d(d - 1)^2$	$d^2(d - 1)^2$	0	$d^2(d - 1)$

TABLE 3.1. Valeurs de  $x$  et  $y$  aux points  $iA$

Si on paramétrise la courbe elliptique  $E_d$  par les fonctions de Weierstrass  $\wp$  et  $\wp'$  associées au réseau  $(1, \tau)$  et si  $A$  correspond à  $\frac{1}{7}$  on a alors

$$d = \frac{x_A - x_{2A}}{x_A - x_{3A}} = \frac{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(\frac{2}{7}; \tau)}{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(\frac{3}{7}; \tau)}.$$

La courbe modulaire  $X_1(7)$  a 6 pointes correspondant aux valeurs  $d = 0, 1, \infty$  et aux trois racines de  $(d^3 - 8d^2 + 5d + 1)$ . Les 3 points  $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  correspondent respectivement aux valeurs  $d = 1, 0, \infty$ . Une description très complète de ces propriétés est donnée dans [14].

On considère la surface  $S$  et la fibration  $(x, y, d) \mapsto d$ . Les fibres singulières de cette fibration, calculées par l'algorithme de Tate, ou appliquant les résultats de [11] sont de type  $I_1, I_1, I_1, I_7, I_7, I_7$  au dessus de  $d = a_1, a_2, a_3$  racines de  $(d^3 - 8d^2 + 5d + 1)$  et  $d = 1, 0, \infty$  respectivement.

L'équation (3.1) est de degré 3 en  $d$ . Pour trouver facilement des fibrations elliptiques nous utiliserons une autre équation pour  $S$ .

On considère les deux fonctions

$$(3.2) \quad u = \frac{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(z + \frac{1}{7}; \tau)}{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(\frac{2}{7}; \tau)} ; v = \frac{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(z - \frac{1}{7}; \tau)}{\wp(\frac{1}{7}; \tau) - \wp(\frac{2}{7}; \tau)}.$$

Les valeurs de  $u$  et  $v$  aux points  $iA$  sont données par le tableau suivant :

	0	$A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$
$u$	0	1	$\frac{1}{d}$	$\frac{1}{d}$	1	0	$\infty$
$v$	0	$\infty$	0	1	$\frac{1}{d}$	$\frac{1}{d}$	1

TABLE 3.2. Tableau des valeurs de  $u$  et  $v$  aux points  $(iA)$

Les diviseurs de  $u$  et de  $\frac{y}{x^2}$  sont égaux et ces deux fonctions ont même valeur en  $2A$ , elles sont donc égales. De même les diviseurs  $v$  et  $-\frac{x+d^2-d^3}{y}$  sont égaux et ces deux fonctions ont même valeur en  $3A$ . On fait alors le changement de variables

$$u = \frac{y}{x^2}, v = -\frac{x+d^2-d^3}{y} \text{ d'inverse } x = \frac{d(d-1)}{u+v-uv}, y = \frac{u d^2 (d-1)^2}{(u+v-uv)^2}$$

et on déduit l'équation de  $S$

$$(3.3) \quad d(d-1)uv = (uv - u - v)(1 + d(uv - u - v))$$

qui se factorise aussi

$$(3.4) \quad (uv - u - v)(dv - 1)(du - 1) = d(d-1)uv(u-1)(v-1).$$

#### 4. Modèle de Néron et groupe de Néron-Severi

Dans ce paragraphe nous explicitons le modèle de Néron de  $S$  en vue d'obtenir une base du réseau de Néron-Severi et pour construire un graphe. Pour cela nous verrons qu'il suffit d'étudier les mauvaises fibres de la fibration au dessus de  $d = 0, 1$  et l'infini.

On rappelle le théorème suivant pour une fibre singulière de type  $I_n$  (voir [8], théorème 1 et proposition 5 page 96). Soit  $K$  un corps de caractéristique 0.

**Théorème 4.1.** *Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $K[T]$  donnée par une équation de Weierstrass à coefficients dans  $K[T]$ . On suppose que la réduction mod  $T$  possède un point double à tangente distinctes et si on note  $v_T$  la valuation  $T$ -adique on suppose que  $v_T(j) = -m < 0$ . Il existe alors un modèle de Weierstrass de  $E$  à coefficients dans  $K[T]$*

$$Y^2Z + \lambda XYZ + \mu XZ^2 = X^3 + \alpha X^2Z + \beta XZ^2 + \gamma Z^3$$

ayant les propriétés

$$v_T(\lambda^2 + 4\alpha) = 0, \quad v_T(\mu) > \frac{m}{2}, \quad v_T(\beta) > \frac{m}{2}, \quad v_T(\gamma) = m.$$

**4.1. Mauvaises fibres au dessus de  $d = 1, 0, \infty$ .** On part de l'équation

$$Y'^2Z' + (1+d-d^2)X'Y'Z' + (d^2-d^3)Y'Z'^2 = X'^3 + (d^2-d^3)X'^2Z'.$$

On applique le théorème de la façon suivante : la lettre  $T$  désignera selon les cas  $d-1, d$  ou bien  $1/d$ . On notera  $X_1, Y_1, Z_1$  respectivement  $X_0, Y_0, Z_0, X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$  les nouvelles variables correspondant à l'application du théorème précédent en  $d = 1, 0, \infty$ . De plus on peut choisir ces  $X_j, Y_j, Z_j$  de sorte que les tangentes aux points doubles soient les deux droites  $Y_j = 0$  et  $Y_j - X_j$  avec  $j = 0, 1, \infty$ . Plus précisément on posera

$$\begin{aligned}
 T = d - 1, & \quad Y' = Y_1 - X_1 + T^2(1 + T)Z_1, & \quad X' = X_1 + T(1 + T + T^2)Z_1, & \quad Z' = Z_1, \\
 T = d, & \quad Y' = Y_0 - Y_0 - T^4(1 - 2T)Z_0, & \quad X' = X_0 - T^2(1 - 2T)Z_0, & \quad Z' = Z_0, \\
 T = \frac{1}{d}, & \quad Y'T^6 = Y_\infty + T^4, & \quad X'T^4 = X_\infty - T^3, & \quad Z' = Z_\infty.
 \end{aligned}$$

On notera  $\Theta_{i,j}$  avec  $i \in \{1, 0, \infty\}$  et  $j \in \{0, 1, \dots, 6\}$  les composantes des fibres singulières en  $d = 1, 0, \infty$  de sorte que  $\Theta_{i,j} \cdot \Theta_{k,s} = 0$  si  $i \neq k$  et

$$\Theta_{i,j} \Theta_{i,s} = \begin{cases} 0 & \text{si } |j - s| \neq 0, \\ 1 & \text{si } |j - s| = 1, \\ -2 & \text{si } j = s. \end{cases}$$

Par définition, la composante  $\Theta_{k,0}$  est celle coupée par la (0) section.

**4.2. Calcul des produits d'intersection (sA). $\Theta_{i,j}$ .** On définit les ensembles

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{i,j} &= \{P \in E_d, v_T(y_i - x_i) > v_T(y_i) = j\} && \text{pour } j = 1, 2, 3, \\
 \Lambda_{i,j} &= \{P \in E_d, 7 - j = v_T(y_i - x_i) < v_T(y_i)\} && \text{pour } j = 4, 5, 6.
 \end{aligned}$$

où  $x_i = \frac{X_i}{Z_i}$  et  $y_i = \frac{Y_i}{Z_i}$ .

Utilisant les résultats de Néron on a la propriété : la section (sA) coupe  $\Theta_{i,j}$  ( $(sA) \cdot \Theta_{i,j} = 1$ ) si avec le changement de coordonnées  $sA \in \Lambda_{i,j}$ .

On obtient alors le tableau suivant avec la convention : si, dans la colonne  $\Theta_{i,r}$  et la ligne  $d = z$  figure  $kA$  alors  $\Theta_{z,r} \cdot (kA) = 1$  et  $\Theta_{z,s} \cdot (kA) = 0$  si  $s \neq r$ .

	$\Theta_{i,0}$	$\Theta_{i,1}$	$\Theta_{i,2}$	$\Theta_{i,3}$	$\Theta_{i,4}$	$\Theta_{i,5}$	$\Theta_{i,6}$
$d = 1$	0	A	2A	3A	4A	5A	6A
$d = 0$	0	4A	A	5A	2A	6A	3A
$d = \infty$	0	2A	4A	6A	A	3A	5A

**4.3. Graphes.** On représente chaque composante de la mauvaise fibre  $d = 1$  ainsi que les sections (iA) par un point. Deux points sont reliés par un trait si les composantes se coupent. On place les sections (iA) sur un cercle et les composantes  $\Theta_{1,i}$  sur un autre cercle. On procède de même pour  $d = 0$  et  $d = \infty$ .

On regroupe le tout sur le même graphe. On obtient le graphe appelé graphe de Coxeter.

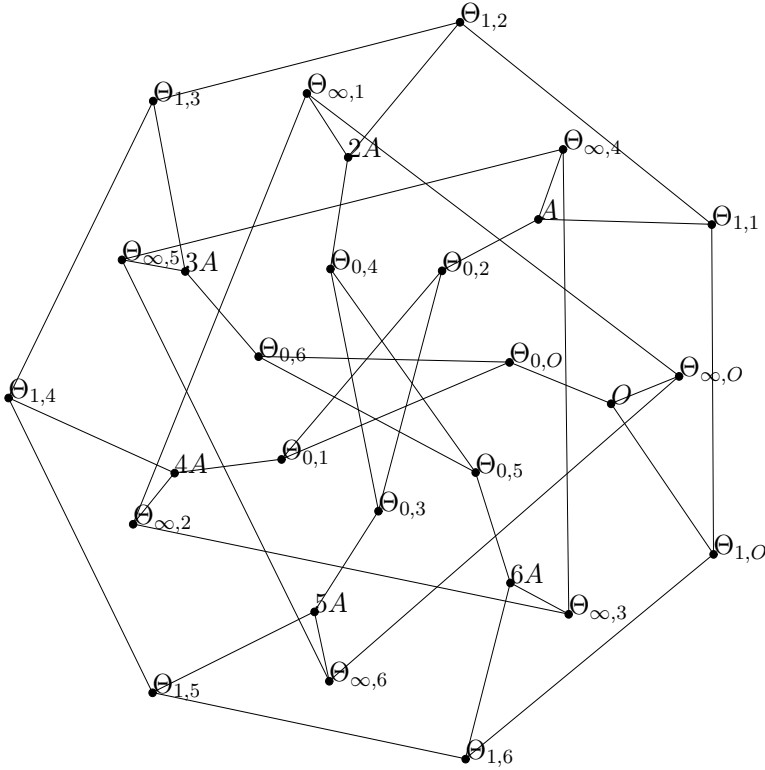


FIGURE 4.1. Graphe de Coxeter

**5. Diviseurs des fonctions  $u, v, u - 1, v - 1, ud - 1, vd - 1$  sur  $S$**

**5.1. Diviseurs horizontaux.** De la définition des fonctions  $u$  et  $v$  on déduit que les diviseurs de ces fonctions sur la surface  $S$  sont sommes d'un diviseur horizontal (noté  $( )_h$ ), combinaison des sections  $(iA)$ , et d'un diviseur vertical formé des composantes des fibres singulières. Exprimant  $u, v$  en fonction de  $y, x$  on a alors

$$\begin{aligned}
 (u)_h &= (0) + (5A) - 2(6A), \\
 (v)_h &= (0) - 2(A) + (2A), \\
 (u - 1)_h &= (A) + (4A) - 2(6A), \\
 (v - 1)_h &= -2(A) + (3A) + (6A), \\
 (ud - 1)_h &= (2A) + (3A) - 2(6A), \\
 (vd - 1)_h &= -2(A) + (4A) + (5A).
 \end{aligned}$$



**Proposition 5.1.** *Les diviseurs des fonctions  $u, u - 1, du - 1, v, v - 1, dv - 1$  sur  $E_d$  engendrent le réseau des diviseurs des fonctions de support inclus dans  $\{iA, 0 \leq i \leq 6\}$ .*

En effet, le déterminant de la matrice dont les lignes sont  $(f)_h \cdot (iA)$ ,  $0 \neq i \neq 5$  et  $f = u, u - 1, du - 1, v, v - 1, dv - 1$  est non nul et égal à 7. Plus précisément le produit

$$\frac{(du - 1)^4 (dv - 1)^3}{u^3 v^4 (u - 1)^3 (v - 1)^4} = \frac{d^3 (d - 1)^3 (du - 1)}{u(v - 1)(uv - u - v)^3}$$

a pour diviseur  $7(A) - 7(0)$ .

**5.2. Diviseurs verticaux.** On vérifie par calcul ([7]) que la fibration  $(u, v, d) \rightarrow u$  est une fibration elliptique dont les mauvaises fibres obtenues pour  $u = 1, 0, \infty$  sont de type  $I_8, I_1^*, I_1^*$ . Le diviseur  $(u - 1)_0$  des zéros de  $u - 1$  sur  $S$  est de la forme  $(A) + (4A) + \sum \Theta_{r,s}$ . De plus il forme un 8-gone. Sur le graphe des fibres singulières et des sections on doit former ce 8-gone avec les trois fibres singulières au dessus de  $d = 0, 1, \infty$  et avec seulement les sections  $(4A)$  et  $(A)$ . Etudiant toutes les possibilités on voit qu'une seule convient et

$$(u - 1)_0 = (A) + (4A) + \Theta_{0,1} + \Theta_{0,2} + \Theta_{1,1} + \Theta_{1,2} + \Theta_{1,3} + \Theta_{1,4}.$$

Le diviseur  $(u)_0$  des zéros de  $u$  sur  $S$  est de la forme  $(0) + (5A) + 2\Theta_{r,s} + 2\Theta_{a,b} + \Theta_{a',b'} + \Theta_{a'',b''}$  et correspond à une fibre de type  $I_1^*$ . De plus les deux diviseurs  $(u)_0$  et  $(u - 1)_0$  n'ont pas de composante commune. Considérant toutes les possibilités sur le graphe on voit qu'une seule est possible et on obtient  $(u)_0$ .

Le diviseur  $(u)_\infty$  des pôles de  $u$  est de la forme  $2(6A) + 2\Theta_{r,s} + \Theta_{a,b} + \Theta_{a''',b'''} + \Theta_{a',b'} + \Theta_{a'',b''}$  et correspond à une fibre de type  $I_1^*$ . En considérant le graphe, on a une seule possibilité.

On procède de même avec la fonction  $v, v - 1$ , car  $u$  et  $v$  jouent le même rôle. On vérifie aussi par calcul que la fibration  $(u, v, d) \rightarrow ud - 1$  a les mêmes propriétés que  $(u, v, d) \rightarrow u$  et on en déduit les diviseurs verticaux.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= (0) + (5A) - 2(6A) - \Theta_{1,6} - \Theta_{0,4} - 2\Theta_{0,5} - \Theta_{0,6} \\ &\quad + 2\Theta_{\infty,0} + \Theta_{\infty,1} - \Theta_{\infty,3} + \Theta_{\infty,5} + 2\Theta_{\infty,6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v) &= (0) - 2(A) + (2A) - \Theta_{1,1} - \Theta_{0,1} - 2\Theta_{0,2} - \Theta_{0,3} \\ &\quad + 2\Theta_{\infty,0} + 2\Theta_{\infty,1} + \Theta_{\infty,2} - \Theta_{\infty,4} + \Theta_{\infty,6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u - 1) &= (A) + (4A) - 2(6A) + \Theta_{1,1} + \Theta_{1,2} + \Theta_{1,3} + \Theta_{1,4} - \Theta_{1,6} \\ &\quad + \Theta_{0,1} + \Theta_{0,2} - \Theta_{0,4} - 2\Theta_{0,5} - \Theta_{0,6} - \Theta_{\infty,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v - 1) &= (3A) + (6A) - 2(A) - \Theta_{1,1} + \Theta_{1,3} + \Theta_{1,4} + \Theta_{1,5} + \Theta_{1,6} \\ &\quad + \Theta_{0,5} + \Theta_{0,6} - \Theta_{0,1} - 2\Theta_{0,2} - \Theta_{0,3} - \Theta_{\infty,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(du - 1) &= (2A) + (3A) - 2(6A) + \Theta_{1,1} + 2\Theta_{1,2} + 2\Theta_{1,3} + \Theta_{1,4} \\ &\quad - \Theta_{1,6} - \Theta_{0,5} - \Theta_{\infty,2} - 2\Theta_{\infty,3} - \Theta_{\infty,4}, \\ \operatorname{div}(dv - 1) &= (4A) + (5A) - 2(A) + \Theta_{1,3} + 2\Theta_{1,4} + 2\Theta_{1,5} \\ &\quad + \Theta_{1,6} - \Theta_{1,1} - \Theta_{0,2} - \Theta_{\infty,3} - 2\Theta_{\infty,4} - \Theta_{\infty,5}.\end{aligned}$$

La factorisation (3.3) de l'équation de  $S$  permet de calculer le diviseur de  $uv - u - v$ . Il en résulte l'égalité

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(uv - u - v) &= -(A) + (2A) + (5A) - (6A) + \Theta_{1,0} + \Theta_{0,0} - \Theta_{0,2} - \Theta_{0,3} \\ &\quad - \Theta_{0,4} - \Theta_{0,5} + 2\Theta_{\infty,0} + \Theta_{\infty,1} - \Theta_{\infty,3} - \Theta_{\infty,4} + \Theta_{\infty,6}.\end{aligned}$$

Les composantes  $\Theta_{1,0}$  et  $\Theta_{0,0}$  seront définies respectivement par  $uv - u - v = 0, d = 1$  et  $uv - u - v = 0, d = 0$ .

## 6. Groupe de Néron-Severi

Les propriétés du groupe de Néron-Severi sont données dans la proposition suivante :

### Proposition 6.1.

- *Le groupe de Néron-Severi de  $S$  a un rang égal à 20, son déterminant est égal à 7. Une  $\mathbb{Z}$ -base est donnée par les classes des diviseurs suivants :*

$$(0), (A), (2A), \dots, (6A), E_d, \Theta_{1,i}, 1 \leq i \leq 6, \Theta_{0,i}, 1 \leq i \leq 6.$$

- *Ces diviseurs sont définis sur  $\mathbb{Q}$ .*

Pour la première assertion on renvoie à [2]. Comme il apparaît dans le calcul précédent, la réduction, pour les mauvaises fibres de type  $I_7$ , est multiplicative déployée ; les composantes  $\Theta_{j,i}$  sont donc définies sur  $\mathbb{Q}$ .

## 7. Construction de fibrations elliptiques

**7.1. Utilisation du graphe.** On considère le graphe formé des composantes singulières de la fibration  $S \rightarrow X_1(7)$  au dessus de  $d = 1, 0, \infty$  ainsi que les sections de 7-torsion (Figure 4.1). Dans cet article nous étudierons les fibrations où on peut placer deux fibres singulières sur ce graphe, ce qui revient à placer deux sous-graphes disjoints de la classification de Kodaira. Dans tous les cas étudiés, on obtient facilement le paramètre de la nouvelle fibration ainsi qu'une équation de Weierstrass. On constate que le paramètre elliptique est dans le groupe multiplicatif engendré par les fonctions  $u, v, u - 1, v - 1, ud - 1, vd - 1, d, d - 1$ . Nous ne détaillons que certains calculs, les autres se faisant sur le même modèle.

**7.2. Exemples.**

**(1) La fibration de paramètre u :**

Ce premier exemple détaillé dans [7] et [9] donne une fibration où on peut représenter trois fibres singulières sur le graphe de la figure (Figure 4.1).

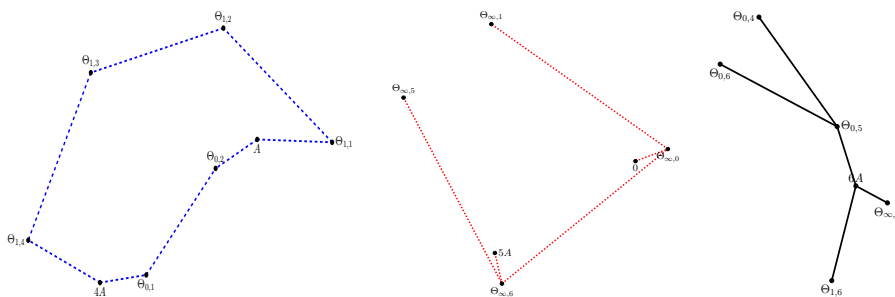


FIGURE 7.1. La figure  $-I_8 - I_1^* - I_1^* -$

La figure  $-I_8 - I_1^* - I_1^* -$  représente trois sous-graphes correspondant aux fibres singulières  $I_8, I_1^*$  et  $I_1^*$  pour  $u = 0, \infty, 1$

Une équation de Weierstrass [7] est obtenue en posant

$$X = u(u - 1)^2 dv, \quad Y = \frac{vu(u - 1)^2 (dv - 1)(du - 1)}{v - 1}$$

soit

$$Y^2 + uXY - u^2(u - 1)^2 Y = X^3 - u(u - 1)^2 X^2.$$

Le point  $(0, 0)$  est d'ordre 4 et il engendre le groupe de torsion du groupe de Mordell-Weil (voir [10] corollaire 7.5).

Le point  $(-v^2(v - 1), v^2(v - 1)^2)$  est d'ordre infini.

**(2) La fibration de paramètre k :**

La figure  $-I_2^* - I_{10} -$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $I_2^*$  et  $I_{10}$ . Ce sont deux fibres singulières de la même fibration.

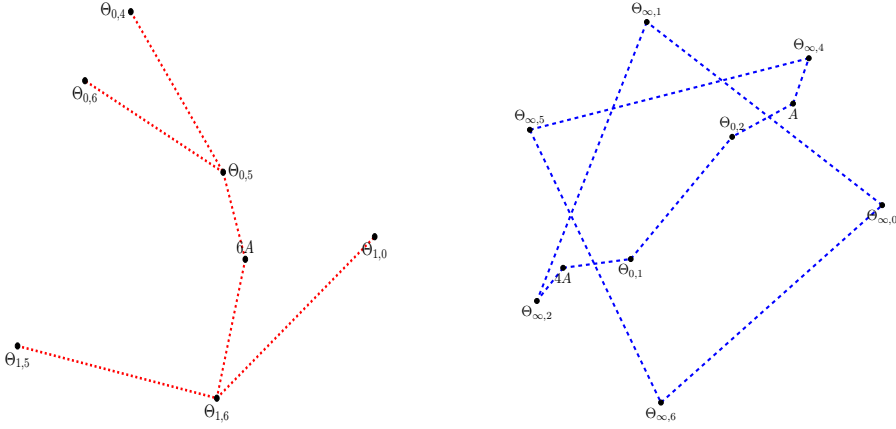


FIGURE 7.2. La figure  $-I_2^* - I_{10}$

La fibre  $I_2^*$  correspond au diviseur

$$\delta_0 = 2(6A) + \Theta_{0,4} + 2\Theta_{0,5} + \Theta_{0,6} + \Theta_{1,5} + 2\Theta_{1,6} + \Theta_{1,0}.$$

La fibre  $I_{10}$  correspond au diviseur

$$\begin{aligned} \delta_\infty &= (A) + (4A) + \Theta_{0,1} + \Theta_{0,2} \\ &\quad + \Theta_{\infty,1} + \Theta_{\infty,2} + \Theta_{\infty,4} + \Theta_{\infty,5} + \Theta_{\infty,6} + \Theta_{\infty,0}. \end{aligned}$$

Le diviseur  $\delta_0 - \delta_\infty$  est somme du diviseur horizontal  $\mu = 2(6A) - (A) - (4A)$  et d'un diviseur vertical. La fonction  $\frac{1}{u-1}$  a pour diviseur horizontal  $\mu$ . On cherche alors  $a$  et  $b$  tels  $\frac{d^a(d-1)^b}{u-1}$  ait  $\delta_0 - \delta_\infty$  pour diviseur sur la surface. On trouve  $a = 0$  et  $b = 1$ . On peut alors prendre

$$k = \frac{d-1}{u-1}$$

comme paramètre pour cette fibration.

On regroupe sur la même figure les deux fibres singulières de cette nouvelle fibration. On note par des  $\circ$  les composantes ou sections ( $iA$ ) qui coupent une seule composante de multiplicité 1 des fibres de type  $I_2^*$  et  $I_{10}$  de la nouvelle fibration. Elles donnent des sections de la nouvelle fibration.

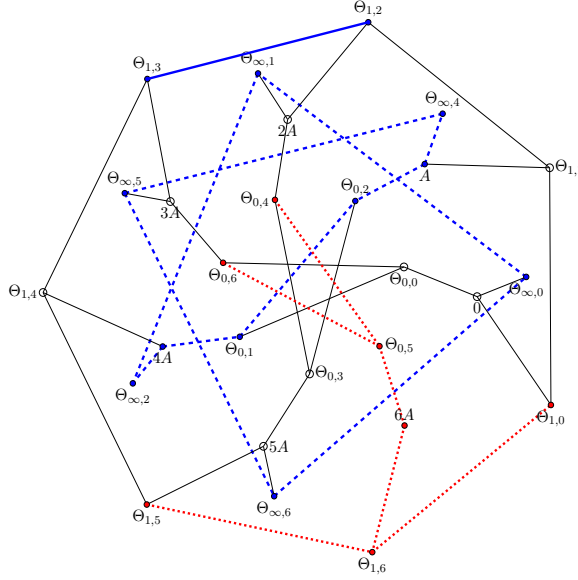


FIGURE 7.3. Fibres singulières et sections

Pour obtenir une équation de Weierstrass on commence par éliminer  $d$  entre l'équation en  $u, v, d$  et  $k = \frac{d-1}{u-1}$ . On obtient

$$uv(u-1)k^2 + (2u^2v - uv - u^2v^2 + 2uv^2 - v^2 - u^2)k - (v-1)(uv - u - v) = 0.$$

On fait le changement de variables (voir [3] pour la méthode)

$$v = \frac{Y}{k^2(k+1) + X},$$

$$u = \frac{X^2 + (k+1)(k^2 + k - 1)X - (k^2 - 1)Y + k^2(k-1)(k+1)^2}{-k(k+1)Y + X^2 + k(k+1)^2X + k^3(k+1)^2}$$

d'inverse

$$X = (k+1) \left( \frac{1}{(u-1)} + k \right) (v-1), \quad Y = (k+1) \left( k^2 + \frac{X}{k+1} \right) v$$

ce qui donne la forme de Weierstrass

$$Y^2 + (k+1)(k-2)(k^2 + X)Y = (X + k^2)(X + k^2 - 1)(X + k^2 + k^3)$$

de discriminant  $k^8(k+1)^3(k+4)(k^2 - 4k + 4)$ .

La zéro section de cette fibration elliptique correspond à  $u = 1$  et  $v = \infty$  soit  $\Theta_{1,1}$ . La section (2A) correspond à  $v = 0$  et  $u = 1/d$ ; soit en reportant dans  $k$ , à  $k = -1/u$ , donc  $X = -k^2, Y = 0$ . Ce dernier point est de 2-torsion. La section (0) correspond à  $u = 0, v = 0$  donc au point  $(1 - k^2, 0)$ . Le point (5A) correspond à  $u = 0, v = 1/d$ , ce qui donne  $v = \frac{1}{1-k}$  et  $(X = -k - k^2, Y = -k - k^2)$ . Ce point sera noté  $P_k$ . Enfin le point (3A) correspond à  $v = 1, u = 1/d$ , soit  $u = -1/k$ . On a alors  $X = 0$  et  $Y = k^2 + k^3$ . Ce dernier point vérifie  $(0, k^2 + k^3) = -P_k + (-k^2, 0)$ . Notons aussi que  $-2P_k = (1 - k^2, 0)$ .

Pour  $k = -1$  on a une fibre de type  $I_3$ . Les composantes  $\Theta_{1,3}$  et  $\Theta_{1,2}$  forment deux côtés du 3-gone et ces deux composantes ne coupent pas la zéro section  $\Theta_{1,1}$  de la fibration de paramètre  $k$ . La troisième composante est la courbe rationnelle :

$$u = \frac{v(2v - 1)}{v^2 - v + 1}, \quad v = v, \quad d = -\frac{v - 2}{v^2 - v + 1}.$$

On peut calculer la hauteur du point correspondant à (3A)  $\longleftrightarrow -P_k + (-k^2, 0)$  en utilisant le graphe et [10] Table 4. On compte quelle composante des fibres  $I_{10}, I_3$  et  $I_2^*$  est coupé par (3A).

On a

$$h(-P_k + (-k^2, 0)) = 2.2 - \frac{2}{3} - \frac{2.8}{10} - (1 + \frac{2}{4}) = \frac{7}{30}.$$

Ce point est donc d'ordre infini. Utilisant la première et la dernière formule du théorème de Tate-Shioda on en déduit que ce point engendre la partie sans torsion du groupe de Mordell-Weil de la fibration. Comme précédemment on montre que le groupe de torsion est d'ordre 2. On a donc le théorème

**Théorème 7.1.** *Le groupe de Mordell Weil de la fibration de paramètre  $k$  sur  $\mathbb{Q}(k)$  est engendré par  $P_k$  et par le point d'ordre 2.*

(3) **La fibration de paramètre  $m$  :**

La figure  $-IV^* - I_{12}$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $IV^*$  et  $I_{12}$ .

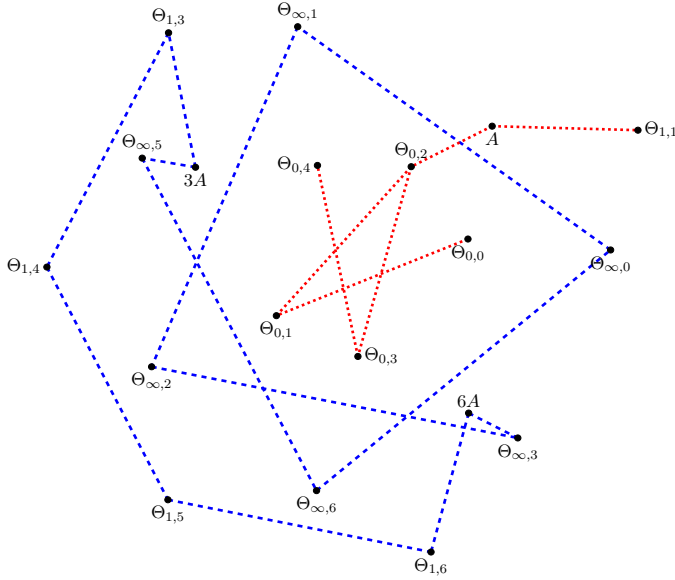


FIGURE 7.4. La figure  $-IV^* - I_{12}$

On procède comme pour la fibration précédente ; on peut prendre comme paramètre

$$m = \frac{d}{1 - v}.$$

On calcule une équation de Weierstrass pour cette fibration.

Pour cela on élimine  $d$  entre l'équation de  $S$  et  $m(1 - v) = d$  et on pose  $Z = \frac{v}{v-1}$  et  $u = U + \frac{Z}{1-m}$ . On obtient ainsi une équation de bidegré 2 en  $Z$  et  $U$ . Les changements de variables

$$W = -Z(U(1 - m)^3 - m)(-m + 1)^2 m \text{ et } G = -U(1 - m)^3 m$$

donnent l'équation de Weierstrass

$$W^2 - \left(-4m^3 + m^2 - 3m + 2\right)GW - m^2(1 - m)^3W = -G(G + m^2)(G + (-m + 1)^3).$$

En posant  $W = Y(1 - m)^3 - X(1 - m)^2$  et  $G = -(1 - m)^2X$  on obtient l'équation simple

$$Y^2 + m(m - 3)XY - m^2Y = X^3.$$

Le point  $X = m^3 - m^2, Y = -m^2(m - 1)^3$  est d'ordre infini et le point  $(0, 0)$  est d'ordre 3. On montre comme précédemment que le rang sur  $\mathbb{Q}(m)$  du groupe de Mordell-Weill est 1.

(4) **La fibration de paramètre t :**

La figure  $-I_3^* - IV^*$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $I_3^*$  et  $IV^*$ .

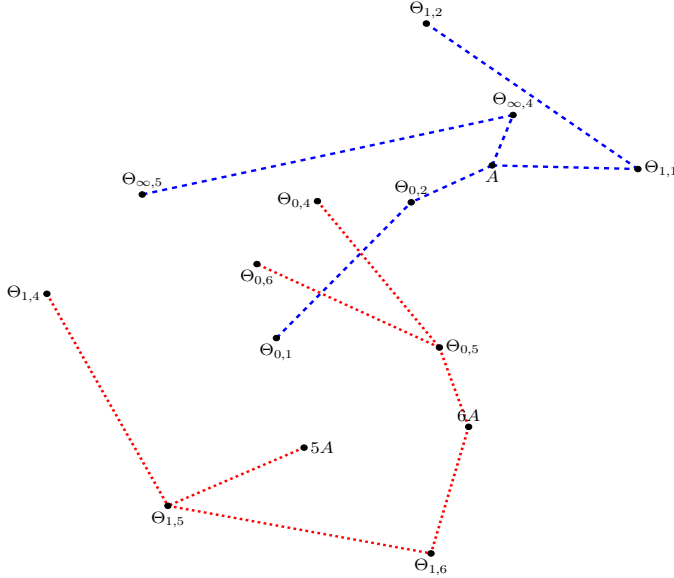


FIGURE 7.5. La figure  $-I_3^* - IV^*$

On peut prendre comme paramètre pour cette fibration

$$t = \frac{dv - 1}{u - 1}.$$

Pour obtenir une équation de Weierstrass en  $X, Y$  on pose

$$v = -\frac{1 + t(u - 1)}{Yut^2} \quad u = \frac{1}{Xt}.$$

Après simplification on obtient

$$y^2 + txy + (t^3 - t^4)y = x^3 + (-t^2 + t)x^2.$$

Le point  $(0, 0)$  est d'ordre infini. On montre de même que le rang sur  $\mathbb{Q}(t)$  du groupe de Mordell-Weill est 1.

(5) **La fibration de paramètre s :**

La figure  $-I_4^* - I_4^*$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $I_4^*$  et  $I_4^*$ .



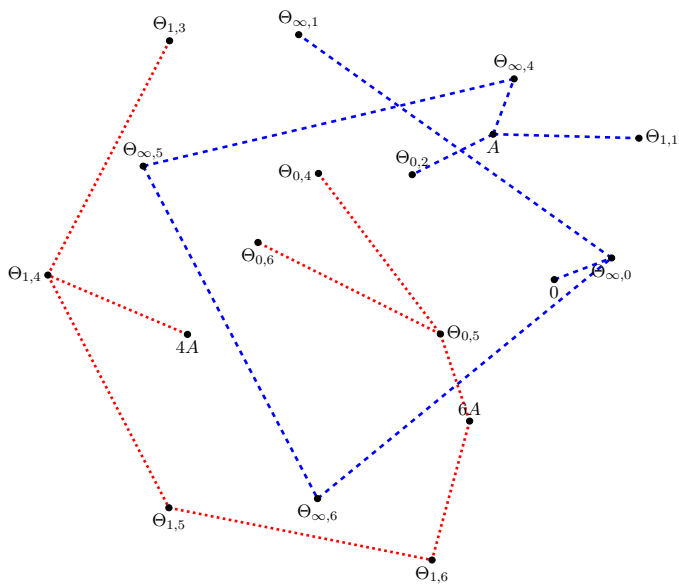


FIGURE 7.6. La figure  $-I_4^* - I_4^*$

On peut prendre comme paramètre  $s = \frac{dv-1}{u}$ .

On fait les changements de variables

$$Y = -v(X - s^3 - s^4) \quad X = -\frac{s(su - s + 1)(-s + v - 1)}{u - 1}$$

pour obtenir une équation de Weierstrass puis on simplifie pour obtenir

$$y^2 - (2s^2 + s + 2)xy = x(x - 1)(x - s^4).$$

Les points  $(1,0)$  et  $(-s^3, s^3(s + 1)^2)$  sont d'ordre infini et indépendants. On montre comme précédemment que le rang sur  $\mathbb{Q}(s)$  du groupe de Mordell-Weill est 2.

(6) **La fibration de paramètre r :**

La figure  $-I_9 - I_9-$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $I_9$  et  $I_9$ .

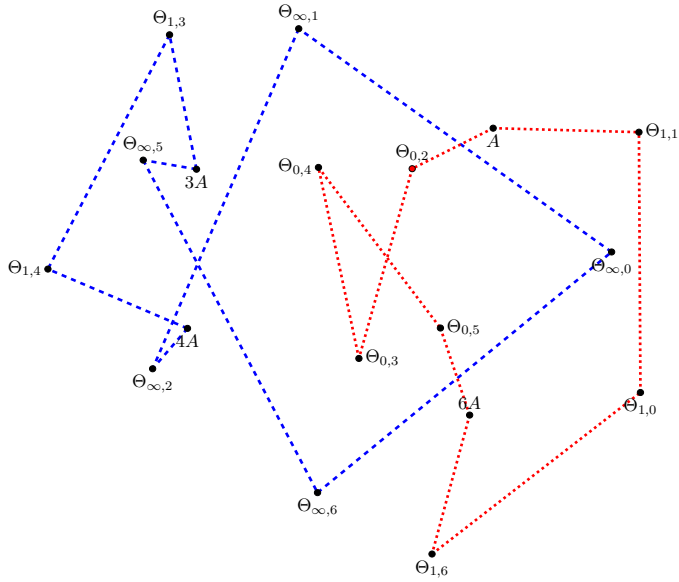


FIGURE 7.7. La figure  $-I_9 - I_9-$

On peut prendre

$$r = \frac{d-1}{(u-1)(v-1)}$$

comme paramètre pour cette fibration. On fait les changements de variables

$$Y = r^2v(X + r^2 - 2r), \quad X = -\frac{r(ru - u + 1)(rv - r + 1)}{u - 1}$$

pour obtenir une équation de Weierstrass puis on simplifie pour obtenir

$$y^2 - (r^2 - r + 1)xy + r^3y = x^3.$$

Le point  $(-1, -r)$  est d'ordre infini, le point  $(0, 0)$  est d'ordre 3.

(7) **La fibration de paramètre n :**

La figure  $-III^* - III^*-$  représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $III^*$  et  $III^*$ .

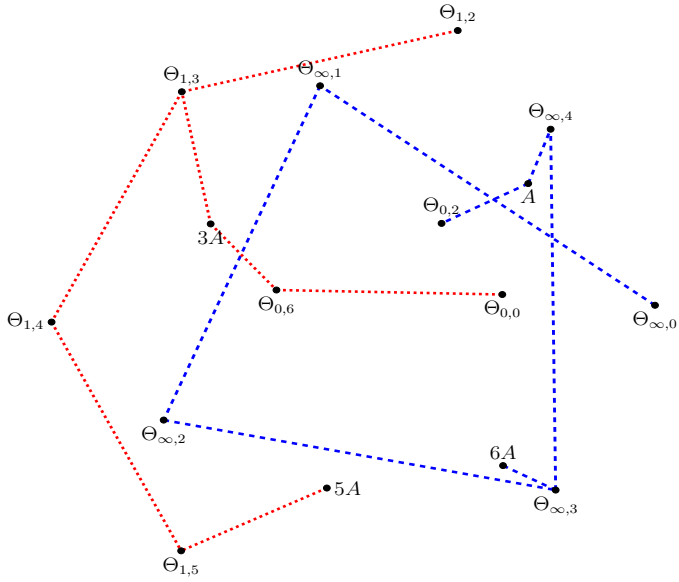


FIGURE 7.8. La figure  $-III^* - III^* -$

(8) La fibration de paramètre h :

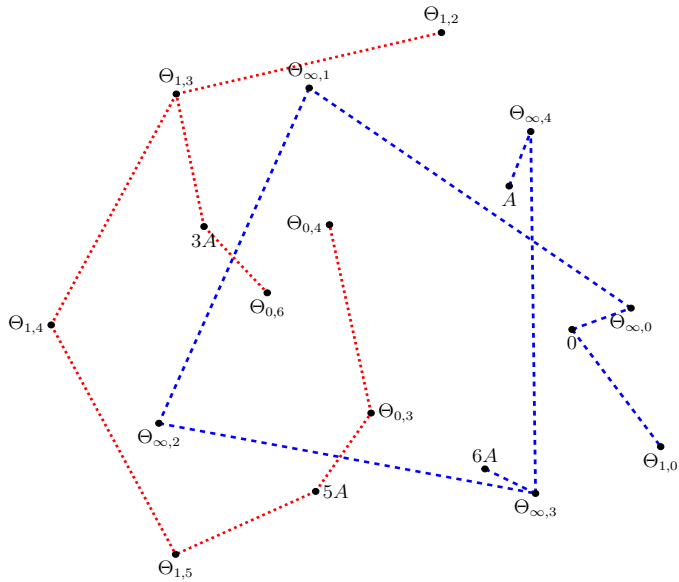


FIGURE 7.9. La figure  $-II^* - II^* -$

On a une autre figure  $-II^* - II^*$  qui représente deux sous-graphes disjoints correspondant à des fibres singulières  $II^*$  et  $II^*$ . On prend alors  $n = -\frac{du(v-1)^2(du-1)}{v}$  et  $h = \frac{u(v-1)(dv-1)^2(du-1)^3}{(d-1)v^3(u-1)^2}$  comme paramètre pour ces fibrations. Pour obtenir une équation de Weierstrass de ces 2 fibrations de paramètre  $n$  et  $h$ , on commence par écrire une équation en  $u, v, h$  en éliminant  $d$ . Un calcul de discriminant par rapport à  $u$  puis  $v$  fait apparaître un facteur  $n + 1$ . On remarque que  $n + 1$  se factorise; plus précisément  $n + 1 = \frac{PQ}{v}$  avec  $P = -uvd + v + du$  et  $Q = uvd + 1 - du$ . On obtient l'équation suivante entre  $P, h, n$

$$(7.1) \quad P^2h(h - 1) + (2 + n + 2n^2)hP + (n + 1)(n^3 - h) = 0.$$

Le changement de variables

$$h = \frac{n^3(n + 1)}{X} \quad P = \frac{Y}{n^3 + n^4 - X}$$

conduit à l'équation de Weierstrass

$$Y^2 + (2n^2 + n + 2) YX = X(X - 1 - n)(X - n^3 - n^4)$$

de discriminant  $-n^9(n + 1)^4(64n^2 + 47n + 64)$ . Pour  $n = -1$  on a une mauvaise fibre de type  $I_4$ . Les 4 composantes de cette fibre sont la section  $O$ , la composante  $\Theta_{1,0}$  et les deux courbes définies par  $P = 0, Q = 0$ . La section infinie de cette nouvelle fibration correspond à la composante  $\Theta_{0,3}$ , pôle double de  $X$ . La section  $O$  donne le point d'ordre 2 de coordonnées  $X = Y = 0$ . Ces deux résultats se lisent sur le diviseur de  $h$ .

Le point  $X = n^3 + n^4, Y = 0$  est d'ordre infini.

Pour écrire une équation de Weierstrass de la fibration de paramètre  $h$  on utilise le lien entre les deux fibrations (de paramètres  $n$  et  $h$ )

On modifie les mauvaises fibres de type  $III^*$  de la façon suivante : on "prolonge les branches" pour avoir deux fibres de type  $II^*$ , par  $\Theta_{0,3}$  et  $\Theta_{0,4}$  d'une part et d'autre part par la section  $O$  et la composante  $\Theta_{1,0}$ . Posant  $P = (n + 1)T$  on obtient l'équation d'une cubique en  $T$  et  $n$ . Pour écrire une équation de Weierstrass il suffit de connaître un point sur cette cubique. Ce point correspond à une section qui coupe la seule composante de multiplicité 1 des deux fibres  $II^*$  ( $\Theta_{0,4}$  sur l'une et  $\Theta_{1,0}$  sur l'autre). Les deux autres composantes de la fibre  $I_4$  ( $n = -1$ ) conviennent. On choisira par exemple  $n = -1, T = \frac{h+1}{3h}$ . Posant alors  $n = -1 + 1/N, T = \frac{(h+1)}{3h} + \frac{W}{N}$  on

est ramené à une équation de bidegré 2 en  $W$  et  $N$ . Après les transformations habituelles (voir [3]) on obtient la forme

$$y^2 = x'^3 - \frac{75}{16}h^4x' + \frac{189}{32}h^6 - h^7 - h^5$$

ou la forme

$$y^2 = x^3 - \frac{15}{4}x^2h^2 + (h-1)^2h^5.$$

Le point

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{9}(h-1)^2(h^2 - 7h + 1), \\ y &= \frac{1}{54}(h^2 - 1)(2h^4 - 27h^3 + 77h^2 - 27h + 2) \end{aligned}$$

est d'ordre infini.

**Remarque.** Dans [4] Inose a montré que si  $X$  est une surface  $K3$  avec une section et deux mauvaises fibres de type  $II^*$  alors il existe une unique surface de Kummer  $K = \text{Km}(C_1 \times C_2)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux courbes elliptiques et  $\phi, \psi$  deux applications rationnelles de degré 2 telles que

$$\phi : K \rightarrow S, \quad \psi : S \rightarrow K.$$

Une telle surface  $S$  a une équation de la forme

$$Y^2 = X^3 - 3\alpha X + \left(T + \frac{1}{T} - 2\beta\right).$$

Les courbes elliptiques  $C_1$  et  $C_2$  sont définies par les invariant normalisés,  $J_1$  et  $J_2$ , vérifiant  $\alpha = \sqrt[3]{J_1 J_2}$  et  $\beta = \sqrt{(1 - J_1)(1 - J_2)}$ . La surface de Kummer a une fibration avec deux fibres de type  $IV^*$  d'équation

$$Y^2 = X^3 - 3\alpha X + \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\beta\right).$$

Pour la surface  $S$  alors  $\alpha = \frac{75}{3 \times 16} = \frac{25}{16}$  et  $\beta = \frac{189}{64}$ . Il en résulte que  $J_1 J_2 = \frac{5^6}{2^{12}}$  et  $(1 - J_1)(1 - J_2) = \frac{3^6 7^2}{2^{12}}$ , soit  $j_2 = j_1 = \left(-\frac{125}{64}\right) 1728 = -3^3 5^3$ . Les deux courbes elliptiques  $C_1$  et  $C_2$  sont isomorphes à la courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  d'invariant  $-3^3 5^3$ .

L'application  $\phi$  est une 2-isogénie explicitée dans [3] à partir de la fibration de paramètre  $s$ .

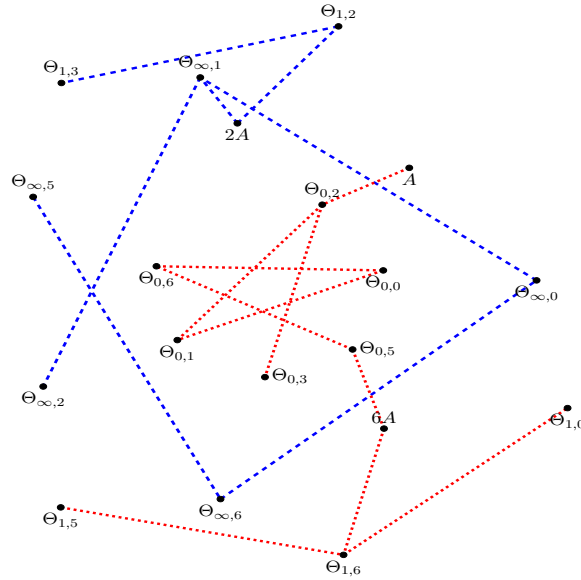


FIGURE 7.10. La figure  $-I_6^* - III^* -$

(9) **La fibration de paramètre  $c$  :**

On représente sur le graphe deux mauvaises fibres de type  $I_6^*$  et  $III^*$  d'une fibration. On peut prendre comme paramètre

$$c = \frac{u(u-1)(v-1)^2(d-1)d^2}{v(vd-1)(du-1)^2}.$$

On élimine  $u$  entre l'équation de  $S$  et  $c$  et on pose

$$v = \frac{Z(c+1)(c-d^2)}{(d-1)(c-1)} - \frac{d+1}{c-1};$$

on a alors une équation de degré 2 en  $d$ , on se ramène à une quartique et on trouve

$$y^2 = x^3 - 1/4 (15c - 4) x^2 c - xc^5.$$

Le point

$$x = -\frac{c(2c-1)^2}{(c+1)^2}, \quad y = 1/2 \frac{c^2(2c-1)(2c^3+4c^2-13c+3)}{(c+1)^3}$$

est d'ordre infini.

Paramètre elliptique	Divers fibrations elliptiques	Invariant Discriminant	Rang, Torsion Mauvaises fibres
$u = y/x^2$	$S_u : y^2 + uxy - u^2(u-1)^2y$ $x^3 - u(u-1)^2x^2$	$j(u) = \frac{(16u^4 - 48u^3 + 65u^2 - 48u + 16)^3}{u(16u^2 - 31u + 16)(u-1)^8}$ $D(u) = u^7(16u^2 - 31u + 16)(u-1)^8$	rang 1 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_8, I_1^*, I_1^*$
$k = \frac{d-1}{u-1}$	$S_k : y^2 + (k+1)(k-2)(x+k^2)y$ $= (x+k^2)(x+k^2-1)(x+k^3+k^2)$	$j(k) = \frac{(k^6 + 4k^5 - 2k^4 - 4k^3 + 25k^2 + 24k + 16)^3}{k^2(k+1)^3(k+4)(k^2-3k+4)}$ $D(k) = k^8(k+1)^3(k+4)(k^2-3k+4)$	rang 1 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_1, I_3, I_2^*, I_{10}$
$m = \frac{d}{1-v}$	$S_m : y^2 + (m^2 - 3m)xy - m^2y$ $= x^3$	$j(m) = -\frac{m(m-3)^3(m(m-3)^3+24)^3}{m(m-3)^3+27}$ $D(m) = -m^8(m(m-3)^3+27)$	rang 1 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_1, I_1, IV^*, I_{12}$
$t = \frac{dv-1}{u-1}$	$S_t : y^2 + xyt + (t^3 - t^4)y$ $= x^3 + (-t^2 + t)x^2$	$j(t) = -\frac{(24t^3 - 15t^2 - 24t + 16)^3}{t^3(27t^2 - 8t - 16)(t-1)^5}$ $D(t) = -t^9(27t^2 - 8t - 16)(t-1)^5$	rang 1 $I_1, I_1, I_5, I_3^*, IV^*$

Paramètre elliptique	Divers fibrations elliptiques	Invariant Discriminant	Rang, Torsion Mauvaises fibres
$s = \frac{dv-1}{u}$	$S_s : y^2 - (2s^2 + s + 2)xy$ $= x(x-1)(x-s^4)$	$\frac{(16s^4 + 72s^3 + 65s^2 + 72s + 16)^3}{s^4(s+4)(4s+1)(4s^2+s+4)}$ $s^{10}(s+4)(4s+1)(4s^2+s+4)$	rang 2 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_1, I_1, I_4^*, I_4^*$
$r = \frac{d-1}{(u-1)(v-1)}$	$S_r : y^2 - (r^2 - r + 1)xy + r^3y$ $= x^3$	$-\frac{(r^2-r+1)^3(r^6-3r^5+6r^4+17r+6r^2-3r+1)^3}{r^9(r+1)^2(r^4-5r^3+15r^2-5r+1)}$ $-r^9(r+1)^2(r^4-5r^3+15r^2-5r+1)$	rang 1 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_1, I_1, I_2, I_9, I_9$
$n = -\frac{du(v-1)^2(du-1)}{v}$	$y^2 + (2n^2 + n + 2)xy$ $= x(x-n-1)(x-n^4-n^3)$	$\frac{27(16n^2+5n+16)}{(n+1)^4(64n^2+47n+64)}$ $-n^9(n+1)^4(64n^2+47n+64)$	rang 1 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $I_1, I_1, I_4, III^*, III^*$



Paramètre elliptique	Divers fibrations elliptiques	Invariant Discriminant	Rang, Torsion Mauvaises fibres
$h = \frac{u(v-1)(dv-1)^2(dv-1)^3}{(d-1)v^3(u-1)^2}$	$y^2 = x^3 - \frac{15}{4}x^2h^2 + (h-1)^2h^5$	$-3^35^6 \frac{h^2}{(h-1)^2(16h^2-157h+16)}$ $-3^3(h-1)^2(16h^2-157h+16)h^{10}$	rang 1  $I_1, I_1, I_2, II^*, III^*$
$c = \frac{u(u-1)(v-1)^2(d-1)d^2}{v(vd-1)(du-1)^2}$	$y^2 = x^3 + \frac{1}{4}c(-15c+4)x^2 - c^5x$	$\frac{(48c^3+225c^2-120c+16)^3}{c^6(c+4)(64c^2-31c+4)}$ $c^{12}(c+4)(64c^2-31c+4)$	rang 1  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  $I_1, I_1, I_1^*, I_6^*, III^*$

**Remerciements :**

Nous remercions Marie José Bertin pour son aide et ses conseils pendant la rédaction de cet article.

**Bibliographie**

- [1] W.P. BARTH, K. HULEK, C.A. PETERS, A. VAN DE VEN, *Compact complex surfaces*. A series of modern surveys in mathematics **4**, Springer, 2004.
- [2] A. GARBAGNATI, A. SARTI, *Symplectic automorphisms of prime order on  $K3$  surfaces*. J. Algebra. **318(1)** (2007), 323–350.
- [3] T. HARRACHE, *Etude des fibrations d'une surface  $K3$* . Thèse de l'Université Paris 6, 27 Nov. 2009.
- [4] H. INOSE, *Defining equations of singular  $K3$  surfaces and a notion of isogeny*. Intl. Symp. on Algebraic Geometry/ Kyoto 1977, Kinokuniya, (1978), 495–509.
- [5] M. KUWATA, *Elliptic fibrations on quartic  $K3$  surfaces with large Picard numbers*. Pacific J. Math. **171(1)** (1995), 231–243.
- [6] M. KUWATA, T. SHIODA, *Elliptic parameters and defining equations for elliptic fibrations on a Kummer surface*. Algebraic geometry in East Asia-Hanoi 2005, 177–215. Adv. Stud. Pure Math. vol **50**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.
- [7] O. LECACHEUX, *Rang de familles de courbes elliptiques*. Acta Arith. **109(2)** (2003), 131–142.
- [8] A. NÉRON, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*. Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math. **21** (1964).
- [9] P. RABARISON, *Torsion et rang des courbes elliptiques définies sur les corps de nombres algébriques*. Thèse de l'Université de Caen, 18 Sept. 2008.
- [10] M. SCHÜTT, T. SHIODA, *Elliptic Surfaces*. ArXiv 0907.0298v. (2009).
- [11] T. SHIODA, *On elliptic modular surfaces*. J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.
- [12] H. STERK, *Finiteness results for algebraic  $K3$  surfaces*. Math. Z., **189(4)** (1985), 507–513.
- [13] J.T. TATE, *The arithmetic of elliptic curves*. Invent. Math., **23** (1974), 179–206.
- [14] L. C. WASHINGTON, *Abelian number fields of small degree*. Algebra and topology 1990 (Taejŏn, 1990), 63–78. Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn, 1990.

Titem HARRACHE  
 Université Pierre et Marie Curie  
 4, Place Jussieu  
 75252 Paris cedex 05. France  
 E-mail: titem@math.jussieu.fr

Odile LECACHEUX  
 Université Pierre et Marie Curie  
 4, Place Jussieu  
 75252 Paris cedex 05. France  
 E-mail: lecacheu@math.jussieu.fr