JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Marie José BERTIN

**Fonction zêta d'Epstein et dilogarithme de Bloch-Wigner**

Tome 23, nº 1 (2011), p. 21-34.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2011__23_1_21_0>

*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **23** (2011), 21-34

# Fonction zêta d'Epstein et dilogarithme de Bloch-Wigner

par Marie José BERTIN

Résumé. Nous exprimons certaines séries d'Epstein normalisées en $s=2$ comme combinaisons linéaires de dilogarithmes de Bloch-Wigner en des nombres algébriques des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ pour les discriminants $\Delta$ associés à la forme quadratique.

Abstract. *Epstein zeta function and Bloch-Wigner dilogarithm.* We give an expression for $s=2$ of some normalized Epstein series as Bloch-Wigner dilogarithms of algebraic numbers of $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, for the discriminants $\Delta$ associated to the quadratic form.

## 1. Introduction

Notons $(a,b,c)$ la forme quadratique primitive définie positive

$$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2, \qquad a,b,c \quad \text{entiers}$$

et $d=b^2-4ac<0$ son discriminant, $d\equiv 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \text{modulo} \quad 4.$

On définit la fonction d'Epstein associée

$$\zeta_Q(s)=\zeta_{(a,b,c)}(s):=\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^s}.$$

où $\Sigma'$ signifie $(m,n)\neq(0,0)$, complétée en

$$\tilde{\zeta_Q}(s):=\mid \operatorname{disc}(Q)\mid^{-1/2}\pi^{-s}\zeta_Q(s)$$

Rappelons la conjecture de Zagier [19].

**Conjecture 1.** *Pour tout $s\geq 2$, $\tilde{\zeta_Q}(s)$ est une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de valeurs du s-ième polylogarithme en des nombres algébriques.*

Nous nous intéressons ici au cas $s=2$. Dans ce cas le deuxième polylogarithme est le dilogarithme de Bloch-Wigner. Nous donnons alors une expression de $\tilde{\zeta_Q}(2)$ en termes du dilogarithme de Bloch-Wigner pour

$$Q\in\{(1,0,15),(3,0,5),(2,1,2),(1,1,4),(1,0,30),\\ (3,0,10),(5,0,6),(2,0,15)\}.$$

---

*Mots clefs.* Epstein series, Bloch-Wigner dilogarithm, Dirichlet L-series, Bloch groups of number fields.

Plus précisément, pour $Q \in \{(1,0,15),(3,0,5),(2,1,2),(1,1,4)\}$, le dilogarithme de Bloch et Wigner est pris sur des nombres algébriques de $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Dans les cas restants, nous expliquerons pourquoi les nombres algébriques sont seulement des racines de l'unité appartenant à $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{120}})$.

Ces résultats ont été obtenus à partir de calculs de mesures de Mahler de polynômes définissant des surfaces $K3$ [1].

Si $D$ est un discriminant fondamental d'un corps quadratique, notons $L_D(s)$ la série

$$L_D(s) = \sum_{n>0} \frac{\left(\frac{D}{n}\right)}{n^s}$$

où $\left(\frac{D}{n}\right)$ désigne le symbole de Kronecker.

**Théorème 1.** *Désignons respectivement par $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ les formes quadratiques $f_1 = (5,0,6)$, $f_2 = (2,0,15)$, $f_3 = (1,0,30)$ et $f_4 = (3,0,10)$. On a les relations suivantes.*

$$\zeta_{f_1}(s) = \frac{1}{2}\left(\zeta(s)L_{-120}(s) - L_8(s)L_{-15}(s) - L_{40}(s)L_{-3}(s) + L_5(s)L_{-24}(s)\right)$$

$$\zeta_{f_2}(s) = \frac{1}{2}\left(\zeta(s)L_{-120}(s) + L_8(s)L_{-15}(s) - L_{40}(s)L_{-3}(s) - L_5(s)L_{-24}(s)\right)$$

$$\zeta_{f_3}(s) = \frac{1}{2}\left(\zeta(s)L_{-120}(s) + L_8(s)L_{-15}(s) + L_{40}(s)L_{-3}(s) + L_5(s)L_{-24}(s)\right)$$

$$\zeta_{f_4}(s) = \frac{1}{2}\left(\zeta(s)L_{-120}(s) - L_8(s)L_{-15}(s) + L_{40}(s)L_{-3}(s) - L_5(s)L_{-24}(s)\right)$$

On en déduit aussitôt le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Notons*

$$d_3 := \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3},2) = L'(\chi_{-3},-1) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^3} {\sum}' \frac{1}{(m^2+3k^2)^2}.$$

*On a la formule :*

$$\frac{36\times 4}{8\pi^3}\sqrt{\frac{5}{6}} {\sum}' \left(\frac{1}{(k^2+30m^2)^2} + \frac{1}{(3k^2+10m^2)^2}\right) - \left(\frac{1}{(6k^2+5m^2)^2} + \frac{1}{(2k^2+15m^2)^2}\right) = \frac{14}{5} d_3.$$

Nous pouvons également montrer les résultats suivants.

**Théorème 3.** *Désignons par $D$ le dilogarithme de Bloch-Wigner défini pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$*

$$D(x) := ImLi_2(x) + \log \mid x \mid \arg(1-x)$$

*où $Li_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ désigne le dilogarithme ordinaire.*

*Notons* $j = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ *et*

$$\Sigma D := D(\frac{7+\sqrt{-15}}{8}) + 2D(\frac{-1+\sqrt{-15}}{4}) - \frac{2}{3}D((\frac{-1+\sqrt{-15}}{4})^3).$$

*On a les relations*

$$\tilde{\zeta}_{(1,1,4)}(2) = \frac{4}{15^2}\Sigma D + 8\frac{1}{15\times 25}D(j)$$
$$\tilde{\zeta}_{(2,1,2)}(2) = \frac{4}{15^2}\Sigma D - 8\frac{1}{15\times 25}D(j)$$
$$\tilde{\zeta}_{(1,0,15)}(2) = \frac{1}{12\times 15}\Sigma D + \frac{13}{50\times 15}D(j)$$
$$\tilde{\zeta}_{(3,0,5)}(2) = \frac{1}{12\times 15}\Sigma D - \frac{13}{50\times 15}D(j)$$

**Théorème 4.** *Les séries d'Epstein complétées* $\tilde{\zeta}_{f_1}(2)$,$\tilde{\zeta}_{f_2}(2)$,$\tilde{\zeta}_{f_3}(2)$ *et* $\tilde{\zeta}_{f_4}(2)$ *sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de dilogarithmes de Bloch-Wigner en des racines de l'unité* $e^{\frac{2i\pi k}{120}}$.

La preuve du premier théorème repose sur un résultat de Williams [16] sur des séries de Lambert ainsi que sur une formule intégrale de Zucker et Mac Phedran [20]. Le second théorème est une conséquence directe du précédent. La preuve du troisième théorème utilise des résultats de Bertin [1] et une formule de Humbert-Gangl [5]. L'idée est d'associer à un corps quadratique imaginaire une variété hyperbolique $M^3$ dans le plan hyperbolique. Grâce à une triangulation de $M^3$ à l'aide de tétraèdres idéaux, le volume de la variété, lié à la fonction zéta du corps de nombres, s'exprime comme somme de dilogarithmes de Bloch-Wigner sur des nombres algébriques.

## 2. Rappels

Un des ingrédients est la formule récente de Huard, Kaplan et Williams [10] qui compte le nombre de représentations d'un entier positif par un système de représentants de formes inéquivalentes quadratiques binaires définies positives de discriminant donné.

Rappelons brièvement la théorie classique des formes quadratiques binaires due à Gauss.

Une forme quadratique binaire à coefficients entiers $(a, b, c)$ est primitive si $a$, $b$, $c$ sont premiers entre eux. Elle est définie positive si $a > 0$ et $d = b^2 - 4ac < 0$. L'entier $d$ est appelé le discriminant de la forme et est congru à 0 ou 1 modulo 4.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes de discriminant $d$.

$$(a,b,c) \sim (a',b',c') \Leftrightarrow \exists \qquad p,q,r,s, \qquad ps-qr=1, \text{tel que}$$

$$ax^2+bxy+cy^2 = a'(px+qy)^2+b'(px+qy)(rx+sy)+c'(rx+sy)^2.$$

Et l'on note $H(d)$ l'ensemble des classes d'équivalence $[a,b,c]$ et $h(d)$ leur nombre.

Chaque classe contient une et une seule forme réduite $(a,b,c)$ c'est-à-dire satisfaisant

$$-a < b \leq a \leq c \qquad\qquad b \geq 0 \qquad \text{si} \qquad a=c.$$

En fait $h(d)$ est juste le nombre de formes réduites de discriminant $d$.

Désignons par $l(d)$ le nombre de formes réduites de discriminant $d$ avec $b=0$ (donc $0 \leq l(d) \leq h(d)$) et

$$\begin{cases} l(d)=0 & \text{si} \qquad d \equiv 1 \qquad (4) \\ l(d) \geq 1 & \text{si} \qquad d \equiv 0 \qquad (4) \end{cases}$$

Gauss a défini une loi de composition sur l'ensemble des classes. Pour cette loi de composition, $H(d)$ est un groupe abélien appelé groupe de classes des formes. L'élément neutre de $H(d)$ est la classe $I$ contenant la forme $(1,0,-d/4)$ si $d \equiv 0 \quad (4)$ ou la forme $(1,0,(1-d)/4)$ si $d \equiv 1 \quad (4)$. L'inverse de la classe $[a,b,c]$ est la classe $[a,-b,c]$. Donc si $K=[a,0,c] \in H(d))$ alors $K=K^{-1}$ soit $K^2=I$.

Le conducteur du discriminant $d$ est le plus grand entier positif $f(d)$ tel que $d/f(d)^2$ soit un discriminant de corps de nombres. Le discriminant $\Delta(d)=d/f(d)^2$ est appelé discriminant fondamental de $d$.

Dans le théorème suivant on ne considérera que des discriminants $d$ pour lesquels $H(d) \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(2)$ où $\mathbb{Z}/(2)$ est le groupe cyclique d'ordre 2. On a donc $K^2=I$ pour tout $K \in H(d)$. Par suite toute forme réduite de discriminant $d$ est de la forme

$$(a,0,c) \qquad 1 \leq a \leq c$$

ou

$$(a,a,c) \qquad 1 \leq a < c$$

ou

$$(a,b,a) \qquad 1 \leq b \leq a.$$

Comme $[a,b,a]=[a-2b,2a-b,a]$, on peut prendre pour classes de $H(d)$

$$\begin{cases} [a_i,0,c_i], & i=1,2,\cdots,l(d) \\ [a_i,a_i,c_i], & i=l(d))+1,\cdots h(d). \end{cases}$$

Si $n$ et $k$ sont des entiers positifs, on définit

$$\delta(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \mid n \\ 0 & \text{si} \quad k \nmid n. \end{cases}$$

Par suite $\delta(n,k)F(n,k) = 0$ si $k \nmid n$ même si $F$ n'est pas défini.
Définissons également pour $d$ discriminant fondamental

$$w(d) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad d = -3 \\ 4 & \text{si} \quad d = -4 \\ 2 & \text{si} \quad d < -4. \end{cases}$$

Enfin $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius et $\left(\frac{d}{n}\right)$ le symbole de Kronecker.

**Théorème 5.** [16] *Notons*

$$\begin{cases} \phi(q) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2} \\ \psi(q) = \sum_{x=0}^{\infty} q^{x(x+1)/2.} \end{cases}$$

*Soit $d$ un discriminant satisfaisant $H(d) \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ et rangeons les $h(d)$ classes de $H(d)$ comme précédemment. On a alors l'égalité :*

$$\sum_{i=1}^{l(d)} \phi(q^{a_i})\phi(q^{c_i}) + \sum_{i=l(d)+1}^{h(d)} \phi(q^{a_i})\phi(q^{4c_i-a_i}) + 4 \sum_{i=l(d)+1}^{h(d)} q^{c_i}\psi(q^{2a_i})\psi(q^{8c_i-2a_i})$$
$$= h(d) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(d) \frac{q^n}{1-q^n}.$$

*où*

$$a_n(d) = \sum_{m|f(d), e|f(d)/m} \mu(e) w(\left(\frac{d}{m^2}\right)) \frac{h(d)}{h(d)/m^2} \delta(n, m^2 e) \left(\frac{d/m^2}{n/m^2 e}\right)$$

Rappelons également le théorème suivant.

**Théorème 6.** [6] *Soit $m$ un entier positif premier à $d$. Le nombre de représentations de l'entier $m$ par un système de représentants des classes de formes entières, positives et primitives de discriminant $d$ est égal à $w(d) \sum \left(\frac{d}{\mu}\right)$, la somme étant prise sur les $\mu$ parcourant l'ensemble des diviseurs positifs de $m$.*

## 3. Preuve du théorème 1

On applique le théorème 5 pour $d = -120$, $f(d) = 1$, $h(d) = 4$, $H(d) \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Les quatre classes sont la classe unité $[1, 0, 30]$ ainsi que les classes $[5, 0, 6]$, $[2, 0, 15]$ et $[3, 0, 10]$. On a alors la formule

$$\phi(q^5)\phi(q^6)+\phi(q^2)\phi(q^{15})+\phi(q^{10})\phi(q^3)+\phi(q))\phi(q^{30}) = 4+\sum_{n\geq 1} 2\left(\frac{d}{n}\right)\frac{q^n}{1-q^n}.$$

Utilisons comme dans Zucker et Mc Phedran [20] une transformation de Mellin de produits de différentes fonctions de Jacobi $\theta_3(q) = \phi(q)$. On peut écrire par exemple

$$\begin{aligned}\zeta_{(5,0,6)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum{}' e^{(-5m^2-6k^2)t}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}(\phi(q^5)\phi(q^6)-1)dt,\end{aligned}$$

où $e^{-t} = q$ et $\phi(q) = 1 + 2q^2 + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$.

Par suite, en utilisant l'expression en série de Lambert précédente,

$$\begin{aligned}B &:= \zeta_{(5,0,6)}(s) + \zeta_{(2,0,15)}(s) + \zeta_{(3,0,10)}(s) + \zeta_{(1,0,30)(s)}\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{n\geq 1} 2\left(\frac{-120}{n}\right)\frac{e^{-tn}}{1-e^{-tn}}dt.\end{aligned}$$

Comme

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y}y^{-s}dy$$

après changement de variable $nt = y$, il vient

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-tn}}{1-e^{-tn}}dt = \frac{1}{\Gamma(s))}\frac{1}{n^s}\int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{e^y-1}dy = \frac{1}{n^s}\zeta(s).$$

D'où

$$B = 2\zeta(s)L_{-120}(s). \tag{3.1}$$

Nous devons en outre connaître les quantités

$$S(s) := \zeta_{(5,0,6)}(s) + \zeta_{(2,0,15)}(s)$$

et

$$S_1(s) = \zeta_{(1,0,30)}(s) + \zeta_{(3,0,10)}(s).$$

Désignons respectivement par $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ les formes quadratiques

$$f_1 = (5, 0, 6), \qquad f_2 = (2, 0, 15), \qquad f_3 = (1, 0, 30), \qquad f_4 = (3, 0, 10)$$

et par

$$f_i(n) := \#\{n/\text{n représenté par } f_i\} \qquad 1 \leq i \leq 4.$$

Il faut donc déterminer

$$S(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_1(n) + f_2(n)}{n^s} \qquad S_1(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_3(n) + f_4(n)}{n^s}$$

Or, selon la parité de $a$, $b$, $c$, on a des relations du type

$$f_i(2^a 3^b 5^c n) = f_j(n).$$

Pour simplifier, le symbole $f_i \leftrightarrow f_j$ signifiera

$$f_i(2^a 3^b 5^c n) = f_j(n) \qquad \text{et} \qquad f_j(2^a 3^b 5^c n) = f_i(n).$$

On a alors les résultats suivants.

- Si $a$, $b$, $c$ sont tous pairs ou tous impairs, alors $f_i \leftrightarrow f_i$ pour tout $1 \leq i \leq 4$ ;
- Si $a$ est pair, $b$ et $c$ impairs ou si $a$ est impair, $b$ et $c$ pairs, alors $f_1 \leftrightarrow f_4$ et $f_2 \leftrightarrow f_3$ ;
- Si $b$ est pair, $a$ et $c$ impairs ou si $b$ est impair, $a$ et $c$ pairs, alors $f_1 \leftrightarrow f_2$ et $f_3 \leftrightarrow f_4$ ;
- Si $c$ est pair, $a$ et $b$ impairs ou si $c$ est impair, $a$ et $b$ pairs, alors $f_1 \leftrightarrow f_3$ et $f_2 \leftrightarrow f_4$.

Notons

$$\Sigma_{1,1} := \Sigma \frac{1}{(2^a 3^b 5^c)^s}$$

la somme étant prise pour $a \equiv 0 \quad b \equiv 0 \quad c \equiv 0$ et $a \equiv 1 \quad b \equiv 1 \quad c \equiv 1$.

$$\Sigma_{1,2} := \Sigma \frac{1}{(2^a 3^b 5^c)^s}$$

la somme étant prise pour $a \equiv 0 \quad b \equiv 1 \quad c \equiv 0$ et $a \equiv 1 \quad b \equiv 0 \quad c \equiv 1$

$$\Sigma_{1,3} := \Sigma \frac{1}{(2^a 3^b 5^c)^s}$$

la somme étant prise pour $a \equiv 0 \quad b \equiv 0 \quad c \equiv 1$ et $a \equiv 1 \quad b \equiv 1 \quad c \equiv 0$

$$\Sigma_{1,4} := \Sigma \frac{1}{(2^a 3^b 5^c)^s}$$

la somme étant prise pour $a \equiv 0 \quad b \equiv 1 \quad c \equiv 1$ et $a \equiv 1 \quad b \equiv 0 \quad c \equiv 0$.

Par suite

$$\begin{aligned} S(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_1(n) + f_2(n)}{n^s} &= \sum_{(n',30)=1} \frac{f_1(n') + f_2(n')}{n'^s} (\Sigma_{1,1} + \Sigma_{1,2}) \\ &\quad + \sum_{(n',30)=1} \frac{f_3(n') + f_4(n')}{n'^s} (\Sigma_{1,3} + \Sigma_{1,4}). \end{aligned}$$

Posons $A_+ := \Sigma_{1,1} + \Sigma_{1,2}$ et $A_- := \Sigma_{1,3} + \Sigma_{1,4}$. Si

$$D := (1 - \frac{1}{2^{2s}})(1 - \frac{1}{3^{2s}})(1 - \frac{1}{5^{2s}}),$$

alors

$$\Sigma_{1,1} = \frac{1}{D}(1 + \frac{1}{2^s 3^s 5^s}) \qquad \Sigma_{1,2} = \frac{1}{D}(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^s 5^s})$$

$$A_+ = \frac{1 + \frac{1}{2^s 5^s}}{(1 - \frac{1}{2^{2s}})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^{2s}})} \qquad A_- = \frac{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{5^s}}{(1 - \frac{1}{2^{2s}})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^{2s}})}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A_+ + A_- &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s})} \\ A_+ - A_- &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 + \frac{1}{5^s})}. \end{aligned}$$

Remarquons que si $\left(\frac{n'}{30}\right) = -1$, aucune forme $f_i$ ne représente $n'$. Mais si $\left(\frac{n'}{30}\right) = 1$ et si $\left(\frac{n'}{3}\right) = 1$, alors $f_1$ ou $f_2$ représente $n'$. De même si $\left(\frac{n'}{30}\right) = 1$ et si $\left(\frac{n'}{3}\right) = -1$, alors $f_3$ ou $f_4$ représente $n'$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} S(s) = &\sum_{(n',30)=1} \frac{f_1(n') + f_2(n')}{n'^s} A_+ + \sum_{(n',30)=1} \frac{f_3(n') + f_4(n')}{n'^s} A_- \\ &+ \sum_{(n',30)=1} (1 - \left(\frac{n'}{3}\right)) \frac{f_1(n') + f_2(n')}{2n'^s} A_+ \\ &+ \sum_{(n',30)=1} (1 + \left(\frac{n'}{3}\right)) \frac{f_1(n') + f_2(n')}{2n'^s} A_- \end{aligned}$$

Notons

$$\psi(n) = \#\{n/n \text{ représenté par } f_1, f_2, f_3 \text{ ou } f_4\}$$

D'après le théorème 6, si $(n,30) = 1$, $\psi(n) = 2\sum_{\mu|n} \left(\frac{-120}{\mu}\right)$. Par suite,

$$S(s) = \sum_{(n',30)=1} \frac{\psi(n')}{2n'^s}(A_+ + A_-) + \sum_{(n',30)=1} \frac{\psi(n')}{2n'^s} \left(\frac{n'}{3}\right) (A_- - A_+).$$

Ecrivant $n' = \mu r$, il vient

$$
\begin{aligned}
S(s) = &\sum_{(r,30)=1} \frac{1}{r^s} \sum_{(\mu,30)=1} \left(\frac{-120}{\mu}\right) \frac{1}{\mu^s} \frac{1}{(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})} \\
&- \sum_{(r,30)=1} \frac{1}{r^s} \left(\frac{-3}{r}\right) \sum_{(\mu,30)=1} \left(\frac{40}{\mu}\right) \frac{1}{\mu^s} \frac{1}{(1+\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1+\frac{1}{5^s})}
\end{aligned}
$$

Comme $\left(\frac{-3}{2}\right) = -1$, $\left(\frac{-3}{5}\right) = -1$, $\left(\frac{40}{3}\right) = 1$, on obtient

$$S(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) - L_{-3}(s)L_{40}(s). \tag{3.2}$$

D'où grâce à (3.1)

$$S_1(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) + L_{-3}(s)L_{40}(s). \tag{3.3}$$

Un raisonnement analogue nous permettrait d'établir

$$S'(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) + L_5(s)L_{-24}(s) \tag{3.4}$$

$$S'_1(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) - L_5(s)L_{-24}(s). \tag{3.5}$$

De même on obtiendrait

$$S''(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) - L_8(s)L_{-15}(s) \tag{3.6}$$

$$S''_1(s) = \zeta(s)L_{-30}(s) + L_8(s)L_{-15}(s). \tag{3.7}$$

Le théorème 1 se déduit alors des relations (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7).

## 4. Preuve du théorème 2

On rappelle d'abord les formules

$$d_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L_{-3}(2)$$

et

$$L_k(2s) = \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-1} \pi^{2s}}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{k} \chi_k(n) \frac{B_{2s}(1-\frac{n}{k})}{(2s)!} \qquad k > 0. \tag{4.1}$$

On en déduit

$$L_{40}(2) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{40}} \frac{7}{20}.$$

Le théorème 2 découle alors du théorème 1.

## 5. Preuve du théorème 3

Avant de donner la preuve du théorème 3, expliquons pourquoi on peut obtenir ce genre de résultats. Cela repose essentiellement sur une méthode arithmétique de construction de variétés hyperboliques de dimension 3. Cette construction remonte à Bianchi et Humbert [2] [11] [14]. L'idée est de considérer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_d$ d'un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \geq 1$ entier sans facteurs carrés. Le sous-groupe $\Gamma_d = \mathrm{PSl}(2, \mathcal{O}_d)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSl}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^3)$ où $\mathbb{H}^3$ désigne le plan hyperbolique. La variété hyperbolique $M^3$ de dimension 3, définie par $M^3 = \mathbb{H}^3/\Gamma_d$ a un volume fini et l'on a la formule essentiellement due à Humbert

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{H}^3/\mathrm{PSl}(2, \mathcal{O}_d)) = \frac{D^{3/2}}{24}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(2)/\zeta_{\mathbb{Q}}(2)$$

où $D$ est le discriminant du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Par la formule de Hecke, on a également

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n>0} \frac{\left(\frac{-D}{n}\right)}{n^s}$$

où $\left(\frac{-D}{n}\right)$ est le symbole de Legendre.

On peut trianguler la variété hyperbolique $M^3$ en tétraèdres hyperboliques dont les sommets sont des nombres algébriques. Par une formule de Lobachevsky, (voir en détail dans Thurston/Milnor [15]), le volume d'un tétraèdre hyperbolique peut s'exprimer comme combinaison linéaire de valeurs de dilogarithmes de Bloch-Wigner en des fonctions algébriques des coordonnées des sommets.

Ces tétraèdres hyperboliques peuvent eux-mêmes se décomposer [17] en tétraèdres hyperboliques idéaux $\Delta_z$ de sommets 0, 1, $\infty$, $z$, de volume

$$\mathrm{Vol}(\Delta_z) = D((0:1:\infty:z)) = D(z)$$

où $D$ désigne le dilogarithme de Bloch-Wigner et $(0:1:\infty:z)$ le birapport des points.

Il existe également une interprétation hyperbolique de la relation à 5 termes du dilogarithme de Bloch-Wigner. C'est la relation de recollement des tétraèdres idéaux [17]. Si $P_1, ..., P_5 \in \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors

$$\sum((-1)^i)\mathrm{Vol}(P_1, ..., \hat{P}_i, ..., P_5) = 0.$$

Zagier [18] a généralisé tous ces résultats aux corps de nombres quelconques.

On a aussi une autre interprétation du volume de $M$ en termes du groupe de Bloch du corps de nombres.

Si $F$ est un corps abstrait, on définit le groupe de Bloch $\mathcal{B}(F)$ par

$$\mathcal{B}(F) := \mathcal{A}(\mathcal{F})/\mathcal{C}(F)$$

$$\mathcal{C}(F) \subset \mathcal{A}(F) \subset \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]$$

Si $\beta$ est l'application définie pour $x \neq 0, 1, \infty$ par

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)] & \rightarrow & \Lambda^2 F^\times \\ x & \mapsto & (x) \wedge (1-x) \end{array}$$

et

$$\beta(0) = \beta(1) = \beta(\infty) = 0,$$

alors

$$\mathcal{A}(F) = \ker \beta.$$

Le sous-groupe $\mathcal{C}(F)$ est engendré par les éléments suivants

$$\mathcal{C}(F) = \langle [x] + [y] + [1-xy] + [\frac{1-x}{1-xy}] + [\frac{1-y}{1-xy}] \rangle.$$

Neumann et Zagier [12] ont défini une application

$$M = \mathbb{H}^3/\Gamma_d \rightsquigarrow [M] \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Ce morphisme avait déjà été introduit par Dupont et Sah [7] dans leurs travaux sur les groupes de congruence géométriques par découpages.

Le passage au groupe quotient dans $\mathcal{B}(F)$ traduit les conditions de recollement des tétraèdres idéaux triangulant la variété $M$ et en outre le dilogarithme de Bloch-Wigner

$$\begin{array}{rcl} D : \mathcal{B}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ [M] & \mapsto & \mathrm{Vol}(M) \end{array}$$

est une réalisation du volume [17][18].

La méthode de triangulation a permis à Zagier [18] de prouver entre autres que si $F$ est un corps de nombres avec un seul plongement complexe, alors

$$\zeta_F(2) = \mid D_F \mid^{1/2} \pi^{2(n-1)} D(\xi)$$

pour un $\xi \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{Q}}) \bigotimes \mathbb{Q}$.

En outre, $\xi$ peut être choisi dans le sous-groupe $\mathcal{B}(F) \bigotimes \mathbb{Q}$ [19]. Plus précisément [17], si $\xi$ est une base de $\mathcal{B}(F)/\mathrm{tors} \simeq \mathbb{Z}$, alors

$$\zeta_F(2) \doteq \frac{\pi^{2(n-1)}}{\sqrt{\mid D_F \mid}} D(\xi),$$

où le signe $\doteq$ signifie à un facteur rationnel près. Ce dernier résultat peut se prouver à l'aide de la $K$-théorie via le régulateur de Borel. A cette fin on pourra consulter Bloch [3], Borel [4] et Suslin [13].

Une autre preuve de ce même résultat a été donnée quelques années plus tard par Goncharov [8].

L'exemple le plus connu est le suivant :

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}(2) = \frac{4\pi^2}{21\sqrt{7}}\left[2D(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}) + D(\frac{-1+\sqrt{-7}}{4})\right].$$

On connaît en fait peu d'exemples de ce genre. Leur détermination repose ou bien sur la connaissance d'une décomposition effective de la variété hyperbolique en tétraèdres idéaux ou bien sur la connaissance d'une base du groupe de Bloch modulo la torsion.

Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$, on trouve dans un papier de Boyd, Rodriguez-Villegas et Dunfield [5] une triangulation en tétraèdres idéaux due à Gangl. Utilisant ce résultat, Bertin [1] a prouvé que

$$L_{-15}(2) = \frac{24}{15^{3/2}}\Sigma D.$$

(En fait l'élément $\xi$ engendrant le groupe de Bloch donné par Bertin est déduit de celui de Gangl par une relation à 5 termes utilisant le polynôme minimal de l'entier algébrique $\frac{-1+\sqrt{-15}}{4}$, donnant ainsi un générateur avec moins de termes.)

Rappelons le lemme 3.1 de Bertin [1].

**Lemme 1.** (1)

$$\sum_{m,k}{}' \left(\frac{1}{(2m^2+mk+k^2)^s} + \frac{1}{m^2+mk+4k^2)^s}\right) = 2\zeta(s)L_{-15}(s)$$

(2)

$$\sum_{m,k}{}' \left(\frac{1}{(3m^2+5k^2)^s} + \frac{1}{(m^2+15k^2)^s}\right) = 2(1+\frac{1}{2^{2s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}})\zeta(s)L_{-15}(s)$$

(3)

$$\sum_{m,k}{}' \left(\frac{1}{(m^2+mk+4k^2)^s} - \frac{1}{2m^2+mk+2k^2)^s}\right) = 2L_{-3}(s)L_5(s)$$

(4)

$$\sum_{m,k}{}' \left(\frac{1}{(m^2+15k^2)^s} - \frac{1}{(3m^2+5k^2)^s}\right) = 2(1+\frac{1}{2^{2s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}})L_{-3}(s)L_5(s)$$

Ce lemme appliqué à $s = 2$ donne les relations suivantes :

$$\zeta_{(1,1,4)}(2) = \zeta(2)L_{-15}(2) + L_{-3}(2)L_5(2)$$
$$\zeta_{(2,1,2)}(2) = \zeta(2)L_{-15}(2) - L_{-3}(2)L_5(2)$$

$$\zeta_{(1,0,15)}(2) = \frac{3}{8}\zeta(2)L_{-15}(2) + \frac{13}{8}L_{-3}(2)L_5(2)$$
$$\zeta_{(3,0,5)}(2) = \frac{3}{8}\zeta(2)L_{-15}(2) - \frac{13}{8}L_{-3}(2)L_5(2).$$

Or grâce à la formule (4.1)

$$L_5(2) = \frac{4\pi^2}{25\sqrt{5}}$$

et à la formule de Bloch [9]

$$d_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L_{-3}(2) = L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3}{4\pi}\sum_{m=1}^{3}\chi_{-3}(m)D(\zeta_3^m) = \frac{3}{2\pi}D(j),$$

on obtient le résultat annoncé.

## 6. Preuve du théorème 4

La formule de Bloch

$$L_{-f}(2) = \frac{1}{\sqrt{f}}\sum_{m=1}^{f}\chi_{-f}(m)D(\zeta_f^m)$$

où $\zeta_f$ désigne une racine primitive f-ième de l'unité, ainsi que les expressions

$$L_5(2) = \frac{4\pi^2\sqrt{5}}{125}$$
$$L_8(2) = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$
$$L_{40}(2) = \frac{7\pi^2\sqrt{40}}{400}$$

déduites de la formule (4.1) prouvent le théorème 4.

Comme l'on ne connaît pas de triangulation en tétraèdres idéaux des variétés hyperboliques ni de base du groupe de Bloch modulo torsion concernant les corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$, on a seulement une expression en dilogarithmes de Bloch-Wigner de racines de l'unité.

**Remerciements.** Je remercie vivement le rapporteur pour ses remarques et suggestions qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de certains passages.

## Bibliographie

[1] M.J. Bertin, *A Mahler measure of a K3 surface expressed as a Dirichlet L-series.* À paraître au Canadian Math. Bulletin.

[2] L. Bianchi, *Sui gruppi di sostitutioni lineari con coefficienti a corpi quadratici imaginarii.* Math. Ann. **38** (1891), 313–333 et (1892), 332–412.

[3] S. Bloch, *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry.* Proceedings of the International Symposium in Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), 103–114, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[4] A. Borel, *Cohomologie de $SL_n$ et valeurs de fonctions zêta aux points entiers.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **4** (1977), 613–636.

[5] D.W. Boyd, F. Rodriguez-Villegas & N. Dunfield, *Mahler's measure and the dilogarithm (II)).* ArXiv :math/0308041v2 [math. NT], 21 Nov 2005.

[6] L. Dickson, *Introduction to the theory of numbers.* Dover, New York, 1957.

[7] J. Dupont & C. Sah, *Scissors congruences, II.* J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), 159–195.

[8] A. Goncharov, *Geometry of configurations, polylogarithms, and motivic cohomology.* Adv. Math. **114** (1995), 197–318.

[9] D. Grayson, *Dilogarithm computations for $K_3$.* In Algebraic K-theory (Evanston, 1980), ed. E. Friedlander and M. Stein, 168–178, Lecture Notes in Math. **854**, Springer, Berlin, 1981.

[10] J. Huard, P. Kaplan & K. Williams, *The Chowla-Selberg formula for genera.* Acta Arith. **73** (1995), 271–301.

[11] G. Humbert, *Sur la mesure des classes d'Hermite de discriminant donné dans un corps quadratique imaginaire, et sur certains volumes non euclidiens.* Comptes Rendus (Paris) **169** (1919), 448–454.

[12] W. Neumann & D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds.* Topology **24** (1985), 307–332.

[13] A.A. Suslin, *$K_3$ of a field, and the Bloch group, Galois theory, rings, algebraic groups and their applications.* Trudy Mat. Inst. Steklov **183** (1990), 180–199.

[14] R. Swan, *Generators and relations for certain special linear groups.* Bull. AMS **74** (1968), 576–581.

[15] W. Thurston, *The geometry and topology of* 3*-manifolds.* Chapter 7 "Computation of volume" by J. Milnor, Princeton Univ. Mimeographed Notes.

[16] K. Williams, *Some Lambert Series Expansions of Products of Theta functions.* The Ramanujan Journal **3** (1999), 367–384.

[17] D. Zagier, *The Dilogarithm Function, Frontiers in number theory, physics, and geometry II.* 3-65, Berlin, Springer, 2007.

[18] D. Zagier, *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions.* Invent. Math. **83** (1986), 285–301.

[19] D. Zagier & H. Gangl, *Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series.* In The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Nato Sciences Series C **548**, 561–615, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[20] I. Zucker & R. McPhedran, *Dirichlet L-series with real and complex characters and their application to solving double sums.* ArXiv :0708.1224v1 [math-ph], 9 Aug. 2007, 1–21.

[21] I. Zucker & M. Robertson, *A systematic approach to the evaluation of $\sum_{(m,n\neq 0,0)}(am^2+bmn+cn^2)^{-s}$.* J. Phys. A : Math. Gen., Vol. **9**, No. 8 (1976), 1215–1225.



Marie José Bertin
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
Institut de Mathématiques
175, rue du Chevaleret
75013 PARIS
*E-mail*: `bertin@math.jussieu.fr`