

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Fabien PAZUKI

**Remarques sur une conjecture de Lang**

Tome 22, n° 1 (2010), p. 161-179.

[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2010\\_\\_22\\_1\\_161\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2010__22_1_161_0)

© Université Bordeaux 1, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## Remarques sur une conjecture de Lang

par FABIEN PAZUKI

RÉSUMÉ. Le but de cet article est d'étudier une conjecture de Lang énoncée sur les courbes elliptiques dans un livre de Serge Lang, puis généralisée aux variétés abéliennes de dimension supérieure dans un article de Joseph Silverman. On donne un résultat asymptotique sur la hauteur des points de Heegner sur  $J_0(N)$ , lequel permet de déduire que la conjecture est optimale dans sa formulation.

ABSTRACT. *Remarks on a conjecture of Lang.*

The aim of this paper is to study a conjecture predicting a lower bound on the canonical height on abelian varieties, formulated by S. Lang and generalized by J. H. Silverman. We give here an asymptotic result on the height of Heegner points on the modular jacobian  $J_0(N)$ , and we derive non-trivial remarks about the conjecture.

### 1. La conjecture de Lang et Silverman

S. Lang a conjecturé dans [12] p. 92 une minoration de la hauteur de Néron-Tate d'une courbe elliptique, qu'on rappelle ici :

**Conjecture 1.** *(Lang) Pour tout corps de nombres  $k$ , il existe une constante positive  $c(k)$  telle que pour toute courbe elliptique  $E$  définie sur  $k$  et tout point  $P$  d'ordre infini de  $E(k)$  on ait :*

$$\widehat{h}(P) \geq c(k) \max \left\{ \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E) \right\},$$

où  $\widehat{h}(\cdot)$  est la hauteur de Néron-Tate sur  $E$ ,  $N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$  la norme du discriminant minimal de la courbe  $E$  et  $h(j_E)$  la hauteur de Weil logarithmique et absolue de l'invariant modulaire  $j_E$  de la courbe  $E$ .

**Remarque.** *Dans cette conjecture il est équivalent de chercher une minoration du type  $\widehat{h}(P) \geq c(k) h_{\mathbb{F}}(E/k)$  où  $h_{\mathbb{F}}(E/k)$  est la hauteur de Faltings (relative) de la courbe elliptique  $E$ . Dans la formulation de la question qui figure dans [12], S. Lang ne faisait intervenir que le logarithme du discriminant.*

Cette conjecture de Lang a été partiellement démontrée par M. Hindry et J. Silverman qui obtiennent dans [6], corollaire 4.2 (ii) de leur théorème 4.1 (p. 430 et 431), le résultat suivant :

**Théorème 1.** (*Hindry, Silverman*) *Soit  $k$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soit  $E/k$  une courbe elliptique de discriminant minimal  $\Delta_E$  et de conducteur  $F_E$ . On note  $\sigma_E$  le quotient de Szpiro défini par*

$$\sigma_E = \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) / \log N_{k/\mathbb{Q}}(F_E).$$

*Alors pour tout point  $P \in E(k)$  d'ordre infini on a la minoration :*

$$\widehat{h}(P) \geq (20\sigma_E)^{-8d} 10^{-4\sigma_E} \frac{1}{12} \max \left\{ \log N_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E) \right\}.$$

Ceci permet de conclure pour toute famille de courbes elliptiques pour lesquelles le quotient de Szpiro est borné uniformément. Une conjecture de Szpiro affirme que c'est en fait le cas de toutes les courbes elliptiques sur  $k$  et entraîne donc la conjecture de Lang ci-dessus. La preuve de ce théorème repose sur l'existence d'une décomposition de la hauteur de Néron-Tate en somme de hauteurs locales bien normalisées.

J. Silverman avait démontré auparavant plusieurs cas particuliers de cette conjecture dans [23] et [22]. Par la suite S. David a publié une preuve de transcendance [2] offrant une constante  $c(d, \sigma_E)$  polynomiale inverse en  $d$  et  $\sigma_E$ . On peut citer aussi l'article de M. Krir [11] qui explicite sur  $k = \mathbb{Q}$  d'une manière un peu différente ce résultat de minoration pour des familles de courbes elliptiques particulières. Plus récemment, une nouvelle constante polynomiale inverse a été obtenue par C. Petsche [20] par la technique de décomposition locale.

La conjecture sur les courbes elliptiques a ensuite été généralisée aux variétés abéliennes de dimension supérieure par J. Silverman dans [22] p. 396 :

**Conjecture 2.** (*Lang, Silverman*) *Soit  $g \geq 1$ . Pour tout corps de nombres  $k$ , il existe une constante positive  $c(k, g)$  telle que pour toute variété abélienne  $A/k$  de dimension  $g$ , pour tout diviseur ample et symétrique  $\mathcal{D} \in \text{Div}(A)$  et tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\mathbb{Z} \cdot P = \{mP | m \in \mathbb{Z}\}$  soit Zariski-dense on ait :*

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c(k, g) \max \left\{ 1, h_{\mathbb{F}}(A/k) \right\},$$

où  $\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(\cdot)$  est la hauteur de Néron-Tate sur  $A$  associée au diviseur  $\mathcal{D}$  et  $h_{\mathbb{F}}(A/k)$  est la hauteur de Faltings (relative) de la variété abélienne  $A$ .

**Remarque.** *Il y a plusieurs notions de hauteur d'une variété abélienne. L'énoncé de cette conjecture est plus fin avec la hauteur de Faltings (relative) comme minorant qu'avec la hauteur de Faltings stable notée  $h_{\text{st}}$ . Rappelons de plus que la hauteur de Faltings stable est comparable à une*

hauteur modulaire, comme par exemple la hauteur thêta d'une variété abélienne.

**Remarque.** On peut se demander s'il est possible de conjecturer encore mieux en imposant  $c(k, g) = c_0$  une constante absolue. On va voir dans cet article que c'est impossible.

S. David a proposé une preuve partielle de cette conjecture généralisée, preuve basée sur un raisonnement de type transcendance (voir [1]) : il donne une borne inférieure pouvant tendre vers l'infini avec la hauteur (thêta) de la variété. Plus précisément il obtient le théorème :

**Théorème 2.** (David) Soient  $g \geq 1$  un entier,  $k$  un corps de nombres,  $v$  une place archimédienne,  $(A, \mathcal{D})/k$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$  et  $\tau_v$  une matrice telle que  $A(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_v\mathbb{Z}^g$ . On note  $\|\text{Im } \tau_v\| = \max_{i,j} |\text{Im } \tau_{v,ij}|$ . Posons :  $\rho(A) = h_{\text{st}}(A)/\|\text{Im } \tau_v\|$ .

Alors il existe une constante  $c_1(k, g) > 0$  telle que, tout point  $P \in A(k)$  vérifiant que  $\mathbb{Z}.P$  est Zariski-dense, on a :

$$\hat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c_1(k, g)\rho(A)^{-4g-2}(\log \rho(A))^{-4g-1} h_{\text{st}}(A).$$

Cet énoncé implique donc l'inégalité cherchée pour les familles de variétés abéliennes vérifiant  $\rho(A, k)$  borné. D. Masser utilise d'ailleurs ces résultats dans [14] pour exhiber une famille de variétés abéliennes simples avec  $\rho$  borné, famille vérifiant donc la conjecture de Lang et Silverman. On trouvera des énoncés plus récents traitant notamment de familles en dimension 2 dans le chapitre 2 de [19].

**Applications.** Un résultat de minoration uniforme en la variété du type de l'énoncé de Lang et Silverman aurait des conséquences intéressantes pour plusieurs problèmes concernant les variétés algébriques. On se limitera ici à deux problèmes applicatifs. Tout d'abord les techniques de preuve des résultats partiels en direction de l'inégalité de Lang et Silverman passent généralement par un raisonnement du type : « parmi les  $N$  points distincts  $P_1, \dots, P_N$ , il en existe un qui vérifie  $\hat{h}(P_i) > \alpha$  ». Si  $\alpha$  est strictement positif, on déduit donc qu'il ne peut y avoir plus de  $N$  points de hauteur nulle, ce qui procure une borne uniforme sur la torsion des variétés abéliennes considérées pour peu que  $N$  soit uniforme. Le deuxième problème lié à ces minorations est l'obtention de bornes uniformes sur le nombre de points rationnels d'une courbe algébrique de genre  $g \geq 2$ , en passant par l'étude de la variété jacobienne.

Nous réunissons ici des remarques concernant la conjecture 2. On montre en particulier qu'il est impossible de proposer une conjecture plus générale dans laquelle la constante de comparaison des hauteurs ne dépend pas du

corps ou ne dépend pas de la dimension de la variété. On traite en détail le cas des jacobiniennes de courbes modulaires  $J_0(N)$ . Plus exactement on produit un équivalent de la hauteur de Néron-Tate d'un point de Heegner lorsque le niveau  $N$  est grand, généralisant une démarche déjà présente dans [16]. Pour  $k$  un corps de nombres dont l'anneau des entiers est noté  $\mathcal{O}_k$ , on note  $h_k$  son nombre de classes,  $u_k$  la moitié du cardinal de ses unités et  $\mathbb{N}_k$  l'ensemble des entiers  $N$  tels qu'il existe un point de Heegner associé à  $\mathcal{O}_k$  sur  $X_0(N)$ . Cet ensemble peut aussi être défini par des congruences. Soulignons de plus qu'on imposera toujours aux entiers considérés dans  $\mathbb{N}_k$  d'être premiers à 6 et sans facteur carré. Le résultat est le suivant :

**Théorème 3.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions  $D < 0$  et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}_k$ , soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim h_k u_k \log(N),$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

Notons  $g(N)$  la dimension de  $J_0(N)$ . L'utilisation de l'équivalent (obtenu dans [10] grâce à des calculs de géométrie hyperbolique complexe)  $h_{\text{st}}(J_0(N)) \sim g(N) \log(N)/3$  de la hauteur de Faltings stable de  $J_0(N)$  lorsque  $N$  est grand et sans facteur carré permet, par comparaison des asymptotiques, de conclure au fait suivant :

**Corollaire 1.** *Soit  $k$  un corps quadratique dont le discriminant  $D$  vérifie les conditions  $D < 0$  et  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}_k$ , soit  $x_D \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$  et posons :  $c_D = (x_D) - (\infty)$ . Notons  $g(N)$  le genre de  $X_0(N)$ . Alors on a :*

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D) \sim \frac{3h_k u_k}{g(N)} h_{\text{st}}(J_0(N)),$$

lorsque  $N \in \mathbb{N}_k$  tend vers l'infini.

Merci à l'arbitre de la publication qui par ses remarques précises a permis d'améliorer le texte en plusieurs endroits.

## 2. Points de Heegner et courbes modulaires

On s'intéresse dans cette partie aux jacobiniennes de courbes modulaires et aux points particuliers que sont les points de Heegner sur ces jacobiniennes.

Soit  $k$  un corps quadratique imaginaire dont le discriminant  $D < 0$  est tel que  $D \equiv 1 \pmod{4}$  ( $D$  sans facteur carré). On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble  $\mathbb{N}_k$  des entiers  $N$  tels qu'il existe un point de Heegner associé à  $k$  sur la courbe modulaire  $X_0(N)$ . On estime ensuite, pour de tels

$N$ , la hauteur du point de Heegner sur la jacobienne  $J_0(N) = \text{Jac}(X_0(N))$ . On montre en étudiant les différents termes présents l'asymptotique du théorème 3, en notant  $h_k$  le nombre de classes associées à  $k$  et  $u_k$  la moitié du nombre de ses unités.

On en déduit ensuite des conséquences sur la conjecture de Lang et Silverman et sur la torsion des jacobiniennes de courbes modulaires.

**2.1. Cadre général.**

**2.1.1. La courbe modulaire  $X_0(N)$ .** Soit  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré et  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Le groupe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

agit sur  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}^*/\Gamma_0(N)$  est une surface de Riemann compacte; c'est la compactifiée de  $Y_0(N) := \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$  laquelle paramètre les paires  $(E_\tau, G_\tau)$  où  $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  est une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  et  $G_\tau$  est un sous-groupe de  $E_\tau(\mathbb{C})$  cyclique d'ordre  $N$ . Sur un corps de caractéristique 0 un point de  $Y_0(N)$  correspond à une paire  $(E, E')$  de courbes elliptiques munies d'une isogénie  $\phi : E \rightarrow E'$  cyclique de degré  $N$ .

Cela permet d'identifier  $\mathcal{H}^*/\Gamma_0(N)$  à la courbe modulaire  $X_0(N)$  définie sur  $\mathbb{Q}$ .

**2.1.2. Points de Heegner.** Soit  $k$  un corps quadratique imaginaire. Soit  $N$  un entier premier au discriminant de  $k$ . Le point  $x = (E \rightarrow E') \in X_0(N)$  est appelé point de Heegner associé à  $k$  lorsque les deux courbes elliptiques  $E$  et  $E'$  sont à multiplication complexe par  $\mathcal{O}_k$ .

On peut décrire les points de Heegner sur  $\mathbb{C}$  (on pourra se référer par exemple à [5] p. 235 et [4]) :

$$\left\{ (\mathcal{A}, \mathfrak{n}), \mathcal{A} \in Cl_k, \mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_k, \mathcal{O}_k/\mathfrak{n} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right\} \leftrightarrow \left\{ x_{\text{Heegner}} \in X_0(N)(\mathbb{C}) \right\}$$

$$([\mathfrak{a}], \mathfrak{n}) \rightarrow (\mathbb{C}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}/\mathfrak{an}^{-1}).$$

La condition d'existence d'un point de Heegner est donc l'existence d'un idéal  $\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_k$  tel que  $\mathcal{O}_k/\mathfrak{n} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Un tel idéal existe si et seulement s'il existe  $\beta \in \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$  vérifiant  $\beta^2 \equiv D \pmod{4N}$ . On a alors  $\mathfrak{n} = \mathbb{Z}N + \mathbb{Z}\frac{\beta + \sqrt{D}}{2}$ .

Un point  $\tau \in \mathcal{H}$  correspondant à une courbe à multiplication complexe par  $\mathcal{O}_k$  est racine d'une équation quadratique de la forme  $A\tau^2 + B\tau + C = 0$  avec  $A, B$  et  $C$  entiers et de discriminant  $B^2 - 4AC = D = \text{disc}(k)$ . Or  $N\tau$  doit avoir la même propriété. Ceci implique que d'une part  $N \mid A$ , d'autre part  $B^2 \equiv D \pmod{4N}$ . À toute classe de formes quadratiques de

discriminant  $\text{disc}(k)$  correspond un point de Heegner différent associé au corps  $k$ .

**2.1.3. L'ensemble  $\mathbb{N}_k$ .** On considère un discriminant de la forme  $D = -d_1 \dots d_r$  avec les  $d_i$  des entiers naturels premiers impairs deux à deux distincts. Le corps  $k$  donnera lieu à des points de Heegner sur une courbe  $X_0(N)$  pour les entiers  $N \in \mathbb{N}_k$  avec :

$$\mathbb{N}_k := \left\{ N \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} (1) \exists d \in \mathbb{N}, d \wedge 4N = 1, D \equiv d^2 \pmod{4N} \\ (2) N \text{ est sans facteur carré et premier à } 6 \end{array} \right\}.$$

L'hypothèse (2) est essentiellement technique et figure ici pour pouvoir utiliser des calculs asymptotiques plus faciles à mener sous ces hypothèses.

**Proposition 2.1.** *L'ensemble  $\mathbb{N}_k$  est de cardinal infini.*

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas  $N = p$  premier supérieur ou égal à 5. Prenons donc  $p \geq 5$  un nombre premier différent des  $d_i$ . Le discriminant  $D$  doit être un carré inversible modulo  $4p$ , ce qui est équivalent aux conditions  $D \equiv 1 \pmod{4}$  et  $(D/p) = 1$ . On obtient pour la seconde :

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \prod_{i=1}^r \left(\frac{d_i}{p}\right) = 1.$$

Une telle équation en  $p$  admet comme ensemble type de solutions un nombre non nul et fini de progressions arithmétiques (on pourra consulter [8] p. 55), ceci étant une application directe répétée de la loi de réciprocité quadratique. Le cardinal de  $\mathbb{N}_k$  est donc infini.  $\square$

**Exemple.** *On peut traiter un exemple simple pour illustrer ce propos. Si  $D = -3$  on a tout d'abord  $D \equiv 1 \pmod{4}$  et de plus pour  $p \geq 5$  premier :*

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{3-1}{2}} = \left(\frac{p}{3}\right).$$

*On a donc comme solution la progression arithmétique  $\{p \equiv 1 \pmod{3}\} \subset \mathbb{N}_k$ . Ceci permet d'ailleurs de donner une minoration de la densité  $d(\mathbb{N}_k)$  des premiers de  $\mathbb{N}_k$  (au sens de Dirichlet) grâce à la forme forte du théorème de progression arithmétique de Dirichlet :  $d(\mathbb{N}_k) \geq \frac{1}{\varphi(3)} = \frac{1}{2}$  avec  $\varphi$  l'indicateur d'Euler.*

**2.2. La formule de Gross-Zagier.**

**2.2.1. Accouplement global.** On va reprendre ici l'expression de l'accouplement global des points de Heegner sur  $J_0(N) \times J_0(N)$  obtenu par Gross et Zagier dans [5] page 307 et valable pour  $(m, N) = 1$ . On rappelle que les calculs menés dans l'article [5] sont faits place par place, mais qu'*a priori* le symbole  $\langle c, c \rangle_v$  n'est pas bien défini. On peut cependant calculer  $\langle c, d \rangle_v$  avec  $c \neq d$  et utiliser le fait que globalement  $\langle c, d \rangle = \langle c, c \rangle$  car  $c - d$  est de torsion (c'est ici qu'on applique le théorème de Manin-Drinfeld). C'est la démarche qu'adoptent B. Gross et D. Zagier dans leur article.

On rappelle ici le cadre dans lequel on se place :

- $x_D$  étant une coordonnée d'un point de Heegner associé au corps quadratique imaginaire  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ , on considère le point  $c_D = (x_D) - (\infty) \in J_0(N)(H)$  et le point  $d_D = (x_D) - (0) \in J_0(N)(H)$  avec  $H$  le corps de classe de Hilbert associé à  $k$ .
- $T_m$  est le  $m$ -ième opérateur de Hecke. Son action sur  $x = (\phi : E \rightarrow E') \in X_0(N)$  est donnée par  $T_m(x) = \sum_C(x_C)$ , la somme portant sur tous les sous-groupes  $C$  d'ordre  $m$  dans  $E$  tels que  $C \cap \ker(\phi) = \{0\}$  avec  $x_C := (E/C \rightarrow E'/\phi(C))$ .
- Enfin  $\sigma \in \text{Gal}(H|k)$ , avec  $H$  le corps de classe de Hilbert de  $k$ , correspond *via* l'application d'Artin à la classe d'idéaux  $\mathcal{A}$  de  $k$ .

Alors l'article de B. Gross et D. Zagier [5] nous donne, en notant  $c = c_D$  et  $d = d_D$  :

$$\begin{aligned} \langle c, T_m d^\sigma \rangle_\infty &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[ -2u^2 \sum_{n=1}^\infty \sigma_{\mathcal{A}}(n) r_{\mathcal{A}}(m|D| + nN) \right. \\ &\quad \left. \times Q_{s-1} \left( 1 + \frac{2nN}{m|D|} \right) - \frac{h\kappa\sigma_1(m)}{s-1} \right] \\ &\quad + h\kappa \left[ \sigma_1(m) \left( \log \frac{N}{|D|} + 2 \sum_{p|N} \frac{\log(p)}{p^2-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 + 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2) - 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) \right] \\ &\quad + h\kappa \left[ \sum_{d|m} d \log \frac{m}{d^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{hur}_{\mathcal{A}}(m) \left[ 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) - 2\gamma - 2 \log 2\pi + \log |D| \right] \\
\langle c, T_m d^\sigma \rangle_{\text{fini}} &= -u^2 \sum_{1 \leq n \leq m|D|/N} \sigma'_{\mathcal{A}}(n) r_{\mathcal{A}}(m|D| - nN) \\
& + \text{hur}_{\mathcal{A}}(m) \log \frac{N}{m}.
\end{aligned}$$

Pour les membres de droite on a :

- $r_{\mathcal{A}}(n)$  représente le nombre d'idéaux dans la classe  $\mathcal{A}$  de norme égale à  $n$ .
- $\sigma_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d|n} \varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)$  et  $\sigma'_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d|n} \varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d) \log \frac{n}{d^2}$ . On rappelle que  $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)$  est nul si  $\text{pgcd}(d, n/d, D) > 1$ . Dans le cas où  $\text{pgcd}(d, n/d, D) = 1$ , en notant  $\text{pgcd}(d, D) = |D_2|$ ,  $D_1 D_2 = D$ ,  $\varepsilon_{D_i}(d) = \left(\frac{D_i}{d}\right)$  et  $\chi_{D_1 D_2}$  un certain caractère de  $Cl_k$  (voir [5] p. 277 et p. 268) :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d) = \varepsilon_{D_1}(d) \varepsilon_{D_2} \left( -N \frac{n}{d} \right) \chi_{D_1 D_2}(\mathcal{A}).$$

- $h = h_k$  est le nombre de classes associé à  $k$  et  $D = D_k$  est son discriminant. De plus  $u = u_k$  est la moitié du nombre de ses unités. On sait que  $u = 1$  sauf dans les cas  $D = -3$  où  $u = 3$  et  $D = -4$  où  $u = 2$ .
- $\kappa = \kappa_N = -12 / \left( N \prod_{p|N} \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \right)$ .
- $\sigma_1(m) = \sum_{d|m} d$ .
- $\gamma \simeq 0.57$  la constante d'Euler.
- $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  est la fonction zêta de Riemann.
- $L(s, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon(n)}{n^s}$  est la fonction  $L$  de Dirichlet, avec  $\varepsilon(n) = \left(\frac{n}{D}\right)$ .
- $Q_{s-1}(t)$  est la fonction de Legendre de seconde espèce. On a plusieurs expressions de cette quantité spectrale ([5] p. 238), par exemple pour  $t > 1$  et  $s > 0$  :

$$Q_{s-1}(t) = \int_0^\infty \frac{du}{(t + \sqrt{t^2 - 1} \cosh(u))^s}.$$

On utilisera dans la suite la fonction

$$g_s(z, w) = -2Q_{s-1} \left( 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \right).$$

C'est en particulier une fonction holomorphe de la variable  $s$  sur le domaine  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Ses propriétés sont détaillées dans [5] p. 239.

**2.2.2. Particularisations.** La première partie du travail consiste à évaluer cette formule pour se ramener à l'expression de la hauteur du point  $c \in J_0(N)(H)$ .

Tout d'abord par le théorème de Manin-Drinfeld,  $c$  et  $d$  représentent la même classe dans  $J_0(N)(H) \otimes \mathbb{Q}$ . On en déduit l'égalité suivante :

$$\langle c, T_m d^\sigma \rangle = \langle c, T_m c^\sigma \rangle.$$

On prend de plus  $m = 1$ . On obtient alors  $T_1 c = c$ . Enfin on prend  $\sigma = \operatorname{Id} \in \operatorname{Gal}(H|k)$ , ce qui impose donc de prendre  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_k$  l'anneau des entiers du corps  $k$ . Ceci étant posé on calcule alors le membre de droite pour obtenir,  $\widehat{h}_{J_0(N)}$  étant la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur  $2\Theta$  de la variété abélienne  $J_0(N)$  :

**Proposition 2.2.**

$$\widehat{h}_{J_0(N)}(c) = \langle c, c \rangle = \langle c, c \rangle_\infty + \langle c, c \rangle_{\text{fini}},$$

avec :

$$\langle c, c \rangle_\infty = \lim_{s \rightarrow 1} \left[ -2u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathcal{O}_k}(n) r_{\mathcal{O}_k}(|D| + nN) \times Q_{s-1} \left( 1 + \frac{2nN}{|D|} \right) - h \frac{\kappa}{s-1} \right] \quad (i)$$

$$+ h\kappa \left( \log \frac{N}{|D|} + 2 \sum_{p|N} \frac{\log(p)}{p^2 - 1} + 2 + 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2) - 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) \right) \quad (ii)$$

$$+ hu \left[ 2 \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) - 2\gamma - 2 \log 2\pi + \log |D| \right] \quad (iii)$$

$$\langle c, c \rangle_{\text{fini}} = -u^2 \sum_{1 \leq n \leq |D|/N} \sigma'_{\mathcal{O}_k}(n) r_{\mathcal{O}_k}(|D| - nN) + hu \log(N) \quad (iv)$$

**2.3. Preuve du théorème 3.** On se place toujours dans le même cadre, le discriminant  $D$  du corps  $k$  est fixé avec les conditions de l'introduction. D'après la proposition 2.1 l'ensemble  $\mathbb{N}_k$  est infini, on peut donc faire tendre  $N$  vers l'infini. On s'efforce alors dans cette troisième partie de trouver un équivalent, lorsque  $N$  tend vers l'infini, de la hauteur  $\widehat{h}_{J_0(N)}(c)$ . Nous allons donc étudier la contribution de chaque terme de la proposition 2.2. On commence par donner quelques majorations utiles.

### 2.3.1. Majorations.

**Lemme 2.3.** *Si on note  $\tau(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ , alors on a les majorations  $|\sigma_{\mathcal{O}_k}(n)| \leq \tau(n)$  et  $|\sigma'_{\mathcal{O}_k}(n)| \leq \tau(n) \log(n)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de voir que  $|\varepsilon_{\mathcal{A}}(n, d)|$  est borné par 1. □

**Lemme 2.4.** *On rappelle la majoration :  $\tau(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

*Démonstration.* On se reportera à [24] et [25] p. 13 et suivantes. □

**Lemme 2.5.** *On peut majorer :  $r_{\mathcal{O}_k}(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

*Démonstration.* Dans un anneau d'entiers, un idéal se décompose en produit d'idéaux premiers. Soient  $n \geq 1$  et  $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{P}_l^{\alpha_l}$  un idéal de norme  $n$ . En prenant la norme on obtient une égalité du type  $n = p_1^{\beta_1} \dots p_l^{\beta_l}$  avec les  $p_i$  des entiers naturels premiers. Les possibilités pour l'idéal  $\mathcal{I}$  sont donc fonction du nombre d'idéaux au-dessus de chaque premier  $p_i | n$ . Puisque  $k$  est un corps quadratique, il y a au plus deux idéaux au-dessus d'un entier premier  $p$  de  $\mathbb{Z}$  (auquel cas  $p$  est totalement décomposé), ceci donne donc lieu à au plus  $2^l$  idéaux  $\mathcal{I}$  de norme  $n$ . Or  $l = \sum_{p|n} 1 = \omega(n)$  et par définition de  $\tau(n)$  on a :  $2^{\omega(n)} \leq \tau(n)$ . On conclut donc par le lemme précédent. □

**Lemme 2.6.** *Si  $s > 1$  on a les propriétés asymptotiques suivantes :*

$$Q_{s-1}(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(t^{-s}),$$

$$Q_{s-1}(t) = -\frac{1}{2} \log(t-1) + O_{t \rightarrow 1}(1).$$

*Démonstration.* On pourra par exemple se référer à [3] à partir de la page 155. □

**Lemme 2.7.** *On rappelle enfin :  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O_{s \rightarrow 1}(1)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de faire une comparaison série-intégrale. □

**2.3.2. Les termes (ii), (iii), (iv).** Le traitement des trois derniers termes est assez rapide. En effet à  $D$  fixé  $h = h_k$  est constant, on obtient donc directement que le terme (iii) est un  $O_{N \rightarrow +\infty}(1)$ . De plus en utilisant l'estimation aisée  $\kappa = O\left(\frac{1}{N}\right)$  on a immédiatement que (ii) est un  $O\left(\frac{\log(N)}{N}\right)$ .

Pour (iv) on remarque que  $-u^2 \sum_{1 \leq n \leq |D|/N} \sigma'_{\mathcal{O}_k}(n)r_{\mathcal{O}_k}(|D| - nN) = 0$  si  $N > |D|$ ; cela suffit puisqu'on va considérer  $N$  grand à  $D$  fixé. On obtient donc que le terme dominant est  $hu \log(N)$ .

Jusqu'ici on a donc montré que le terme principal des contributions (ii), (iii) et (iv) est  $hu \log(N)$ . Il nous reste maintenant à étudier le terme (i) issu (comme (ii) et (iii)) des places archimédiennes.

**2.3.3. Le terme (i).** Le but de toute cette partie est de généraliser la démarche de P. Michel et E. Ullmo dans [16] pour montrer une majoration du terme (i) par un  $O_\varepsilon(N^{\varepsilon-1})$ . Commençons par poser :

$$\tilde{H}(s) := -2u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\mathcal{O}_k}(n)r_{\mathcal{O}_k}(|D| + nN)Q_{s-1} \left(1 + \frac{2nN}{|D|}\right).$$

Les lemmes 2.4, 2.5 et 2.6 assurent que  $\tilde{H}$  converge absolument pour  $\text{Re}(s) > 1$  et définit une fonction holomorphe.

On va utiliser plusieurs fonctions introduites dans l'article de B. Gross et D. Zagier pour étudier la fonction  $\tilde{H}$  au voisinage de 1. La fonction  $g_s$  est définie en 2.1. On rappelle donc :

Pour  $z, z' \in \mathcal{H}$ , on pose ([5] p. 251 et 252) :

$$G_{N,s}^1(z, z') := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N)/\{\pm 1\} \\ \gamma z' \neq z}} g_s(z, \gamma z') + 2hu \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log(2\pi) + \frac{L'}{L}(1, \varepsilon) + \frac{1}{2} \log(|D|) \right].$$

Pour  $\mathcal{A} \in Cl_k$ , on pose ([5] p. 243) :

$$\gamma_{N,s}^1(\mathcal{A}) := \sum_{\substack{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in Cl_k \\ \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{A}}} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_2}).$$

Les calculs de B. Gross et D. Zagier montrent alors que ([5] p. 243 et p. 247 combinée avec p. 285) :

$$\tilde{H}(s) = \gamma_{N,s}^1(\mathcal{O}_k) = \sum_{\substack{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in Cl_k \\ \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{O}_k}} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_2}) = \sum_{\mathcal{A}_1 \in Cl_k} G_{N,s}^1(\tau_{\mathcal{A}_1}, \tau_{\mathcal{A}_1}).$$

On peut alors trouver dans l'article de P. Michel et E. Ullmo ([16] p. 673) une étude d'un terme  $G_{N,s}^1(\tau, \tau)$  ( $= H(s)$  dans leur notation) pour un point de Heegner  $\tau$ . Leur résultat est le suivant :

**Proposition 2.8.** *On a la majoration suivante, valable pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s-1} \right) = O_\varepsilon(N^{\varepsilon-1}).$$

*Démonstration.* Nous allons suivre [16] en remarquant que leur preuve reste valide pour tout point de Heegner  $\tau$  lorsque  $D$  est fixé. On introduit le noyau automorphe pour  $\Gamma_0(N)/\{\pm 1\}$  :

$$G_{N,s}(z, z') = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N)/\{\pm 1\} \\ \gamma z' \neq z}} g_s(z, \gamma z').$$

On a alors l'égalité pour  $a > 1$  :

$$(1) \quad G_{N,s}^1(\tau, \tau) - G_{N,a}^1(\tau, \tau) = G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - 2hu \left( \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) \right).$$

On utilise pour conclure le lemme la proposition suivante, dont la preuve figure dans le livre de H. Iwaniec [9] p. 105, théorème 7.5.

**Proposition 2.9.** *Soient  $a > 1$  et  $\text{Re}(s) > 1$ . Soit  $N$  un entier sans facteur carré et premier à 6. On note  $s_j(1 - s_j)$  la  $j$ -ième valeur propre du laplacien sur  $X_0(N)$ . On prend de plus  $(u_j)_j$  une base orthonormale de fonctions propres associées à ces valeurs propres. On note de plus  $E_\rho$  la série d'Eisenstein associée à la pointe  $\rho$ . On pose enfin :*

$$\chi_{sa}(v) = \frac{1}{(s-v)(1-s-v)} - \frac{1}{(a-v)(1-a-v)}.$$

On a alors l'égalité :

$$G_{N,s}(z, z') - G_{N,a}(z, z') = \sum_j \chi_{sa}(s_j) u_j(z) \bar{u}_j(z') + \sum_{\rho \in \{\text{Pointes}\}} \frac{1}{4\pi i} \int_{\frac{1}{2} + i\mathbb{R}} \chi_{sa}(v) E_\rho(z, v) \bar{E}_\rho(z', \bar{v}) dv,$$

et la série et l'intégrale convergent absolument et uniformément sur tout compact.

□

Cette proposition permet de prolonger la fonction  $G_{N,s}(z, z') - G_{N,a}(z, z')$  en une fonction méromorphe (que l'on notera de la même manière) sur le domaine  $\Re(s) > 1/2$  avec un pôle simple en  $s = 1$  de résidu égal à  $\kappa$  (voir aussi [5] p. 239). Cette fonction est même holomorphe sur le domaine  $\Re(s) > 3/4$  privé du point  $s = 1$  (voir [16] p. 672).

On va choisir une bande verticale dans le plan complexe contenant l'abscisse  $s = 1$  dans le but d'appliquer le principe de Phragmen-Lindelöf à la fonction :

$$G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s - 1}.$$

On en déduira une majoration au voisinage de  $s = 1$  de celle-ci et donc par l'égalité (1) de  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s - 1)$ .

Tout d'abord par application des lemmes 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7 on a la majoration valable pour  $\Re(s) > 1$  et  $\varepsilon > 0$  :

$$G_{N,s}^1(\tau, \tau) = O_\varepsilon \left( N^{\varepsilon-1} \left( 1 + \frac{1}{|s - 1|} \right) \right).$$

On va à présent étudier la croissance de la fonction  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s - 1)$  (toujours par l'intermédiaire de l'égalité (1) ci-avant) dans une bande du type  $b \leq s \leq 1 + \varepsilon$  avec  $3/4 < b < 1$ . On prend par exemple  $b = 7/8$ . On utilise alors  $t = \text{Im}(s)$  et on a :

**Proposition 2.10.** *Il existe un  $A > 0$  tel que pour tout  $s$  dans la bande  $7/8 \leq s \leq 1 + \varepsilon$  on a la majoration, avec  $t = \text{Im}(s)$  et  $\tau$  un point de Heegner :*

$$G_{N,s}(\tau, \tau) - G_{N,a}(\tau, \tau) - \frac{\kappa}{s - 1} \ll (N(1 + |t|))^A,$$

et la constante implicite est indépendante de  $N$ .

*Démonstration.* On se reportera à [16] p. 673. □

On a donc une croissance suffisamment faible de la fonction  $G_{N,s}^1(\tau, \tau) - \kappa/(s - 1)$  dans la bande  $7/8 \leq \text{Re}(s) \leq 1 + \varepsilon$  pour pouvoir conclure par le principe de Phragmen-Lindelöf en utilisant l'équation fonctionnelle de [16] p. 654. Ceci achève la preuve du théorème 2.8.

Il suffit alors d'appliquer ce théorème à chacune des  $h$  classes associées à  $k$  pour obtenir :

**Proposition 2.11.** *On a la majoration valable pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \tilde{H}(s) - h \frac{\kappa}{s - 1} \right) = O_\varepsilon(N^{\varepsilon-1}).$$

La conjonction de la proposition 2.2 avec les résultats de majorations 2.3 à 2.7 et 2.11 démontre le théorème 3.

**2.4. Corollaires.** On donne ici deux corollaires du théorème 3 :

**Corollaire 2.12.** *Sous les hypothèses du théorème, avec  $|D| > 4$ , on a l'estimation de  $h_k$  suivante :*

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in \mathbb{N}_k}} \frac{\widehat{h}_{J_0(N)}(c_D)}{\log(N)} = h_k.$$

**Corollaire 2.13.** *Pour tout discriminant  $D \equiv 1 \pmod{4}$  négatif et sans facteur carré il existe un entier  $N_0(D)$  et un certain ensemble  $\mathbb{N}_k$  de congruences modulo  $D$  tels que pour tout  $N \geq N_0(D)$  et  $N \in \mathbb{N}_k$  les points de Heegner  $c_D$  sont d'ordre infini dans  $J_0(N)(H)$ .*

**Remarque.** *Pour certains petits  $N$  on sait que le corps de définition est nécessairement strictement plus gros que  $\mathbb{Q}$ . Par exemple on a  $c_D \in J_0(N)(H) \setminus J_0(N)(\mathbb{Q})$  pour tout  $N \in \{11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49\}$ . En effet on connaît les courbes modulaires  $X_0(N)$  de genre 1, il y en a douze et elles correspondent aux niveaux  $N$  ci-avant. Ces courbes sont des courbes elliptiques et on a donc dans ce cas un isomorphisme entre  $J_0(N)$  et  $X_0(N)$ . On sait de plus que pour ces douze courbes le groupe  $X_0(N)(\mathbb{Q})$  est fini, i.e. leur rang sur  $\mathbb{Q}$  est égal à zéro. (On se base ici sur une étude des courbes modulaires de genre 1 dont la référence est [13].)*

**2.5. Remarques sur la conjecture de Lang et Silverman.** On rappelle qu'on note  $h_{\mathbb{F}}(A/k)$  pour la hauteur de Faltings (relative) d'une variété abélienne  $A$ . La hauteur de Néron-Tate associée à  $2\Theta$  sera notée  $\widehat{h}_A(\cdot)$ . Rappelons l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman sur les variétés abéliennes :

**Conjecture 2.14.** *(Lang, Silverman) Soit  $g \geq 1$  et soit  $k$  un corps. Il existe une constante  $c = c(k, g) > 0$  telle que pour toute variété abélienne  $A/k$  de dimension  $g$ , tout diviseur ample et symétrique  $\mathcal{D} \in \text{Div}(A)$  et tout point  $P \in A(k)$  tel que  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = A$  on a :*

$$\widehat{h}_{A, \mathcal{D}}(P) \geq c h_{\mathbb{F}}(A/k).$$

On trouve dans l'article [10] l'équivalent suivant, obtenu par des techniques de géométrie hyperbolique complexe :

**Théorème 2.15.** *(Jorgenson, Kramer) Pour tout  $N$  sans facteur carré et premier à 6 on a, lorsque  $N$  tend vers l'infini :*

$$h_{\text{st}}(J_0(N)) = \frac{g(N)}{3} \log(N) + o(g(N) \log(N)).$$

Or la dimension de  $J_0(N)$  est égale au genre de  $X_0(N)$  et ce dernier s'exprime comme suit lorsque  $N$  est sans facteur carré (voir [21]) :

$$g(X_0(N)) = 1 + \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{4} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{3} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) - \frac{1}{2} \tau(N),$$

et donc en particulier on a l'équivalent lorsque  $N \rightarrow +\infty$  :

$$g(X_0(N)) \sim \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

avec l'encadrement pour une certaine constante  $\alpha > 0$  :

$$1 \leq \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \alpha \log \log(N).$$

**Remarque (importante).** *Les points de Heegner vérifient la condition  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = J_0(N)$  au moins lorsque le discriminant  $D$  est choisi suffisamment grand. Cela découle de l'étude menée par J. Nekovář et N. Schappacher dans [18].*

On a donc :

**Fait 2.16.** *Si nous réunissons ici les résultats obtenus dans les théorèmes 3.11 et 3.17 :  $\widehat{h}_{J_0(N)}(c) \sim h_k u_k \log(N)$  et  $h_{\text{st}}(J_0(N)) \sim g(N) \log(N)/3$ , on voit que la conjonction de ces théorèmes constitue un exemple indiquant que la constante présente dans la conjecture de Lang et Silverman doit nécessairement dépendre de la dimension  $g$  des variétés abéliennes considérées. On peut même affirmer pour un corps quadratique imaginaire  $k$  donné et  $H$  son corps de classe de Hilbert :*

$$c(H, g) \leq \frac{3h_k}{g} = \frac{3[H : k]}{g}.$$

On déduit de plus de la comparaison des deux asymptotiques le corollaire 1.

**2.6. Ordre et niveau sur la jacobienne.** On compare ici le résultat asymptotique montré précédemment avec un résultat existant pour les petites valeurs du niveau  $N$ . On pourra se référer à l'article de H. Nakazato [17]. On se place dorénavant dans la situation suivante : soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$ . D'après le théorème de Wiles étendu par Breuil, Conrad, Diamond, Taylor elle est munie d'un morphisme non constant :

$$\varphi : X_0(N) \longrightarrow E(\mathbb{C}).$$

On note de plus  $E_l$  l'ensemble des points de  $l$ -torsion de  $E$ . Si  $E$  n'est pas à multiplication complexe on pose :

$$S_E = \left\{ l \mid \text{Gal}(\mathbb{Q}(E_l) \mid \mathbb{Q}) \neq \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(E_l) \right\} \cup \{l \mid N\} \cup \{2, 3\}.$$

Si  $E$  est à multiplication complexe on posera seulement :

$$S_E = \{l \mid N\} \cup \{2, 3\}.$$

Fixons alors un discriminant  $D \equiv 1 \pmod{4}$  négatif tel qu'aucun facteur premier de  $D$  ne soit inclu dans  $S_E$ . L'ensemble  $S_E$  est fini et il y a une infinité de tels  $D$  (voir [17]). Soit alors  $N \in \mathbb{N}_k$ . Dans ces conditions on a :

**Théorème 2.17.** (Nakazato) *Soit  $\tau \in X_0(N)$  un point de Heegner associé à  $k$ . Si on a  $h_k > \deg(\varphi)$  alors  $\varphi(\tau)$  est un point d'ordre infini sur  $E$ .*

**Remarque.** *On peut minorer le degré de  $\varphi$  en fonction de  $N$ , par exemple en suivant [26] :*

$$\deg(\varphi) \geq N^{\frac{7}{6}-\varepsilon}.$$

En utilisant cette remarque et les théorèmes 2.13 et 2.17 on pourra garder à l'esprit que les points de Heegner sur la jacobienne  $J_0(N)$  sont génériquement des points d'ordre infini.

### 3. Variation du corps et restriction des scalaires à la Weil

On présente dans cette partie l'effet de la variation du corps, vue sous deux angles différents, sur l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

**3.1. Variation du corps.** Nous commençons notre étude par la remarque suivante : soient  $k$  un corps de nombres et  $(A, \Theta)/k$  une variété abélienne polarisée par un diviseur  $\Theta$ . Soit  $P \in A(k)$  un point d'ordre infini. Pour tout  $N \geq 1$  posons  $P_N = \frac{1}{N}P$  et  $k_N = k[P_N]$ . Alors :

$$\widehat{h}_{A, \Theta}(P_N) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A, \Theta}(P).$$

On a donc :

**Fait (classique) 3.1.** *Soient  $k$  un corps de nombres et  $A/k$  une variété abélienne. Il existe une suite d'extensions  $k_N/k$  et une suite de points  $P_N \in A(k_N)$  vérifiant  $\mathbb{Z}.P_N$  Zariski-dense telles que :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{A, \Theta}(P_N) = 0.$$

Ce fait souligne la nécessité d'avoir une constante dépendant du corps  $k$  dans l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman. On ajoute que la dépendance minimale en le corps  $k$  devrait être en  $[k : \mathbb{Q}]^{-1/g}$ .

**3.2. Restriction des scalaires à la Weil.** Nous exploitons ici la même idée de division de points, mais présentée différemment. Nous allons nous intéresser à la restriction des scalaires, appelée aussi foncteur norme. On consultera [15] et [27] pour une définition plus générale et les preuves des propriétés utilisées ci-après.

Soient  $k$  un corps de nombres et  $L/k$  une extension finie de degré  $m$ . Soit  $A/L$  une variété abélienne définie sur  $L$  de dimension  $g$ . On s'intéresse à la variété obtenue par restriction des scalaires  $A_* = N_{L/k} A$  définie sur  $k$ . C'est une variété abélienne car pour toute extension galoisienne  $k'$  de  $k$  contenant  $L$  on a l'isomorphisme :

$$\psi : (N_{L/k} A)_{k'} \longrightarrow A_{k'}^{\sigma_1} \times \dots \times A_{k'}^{\sigma_m},$$

où les  $\sigma_i$  sont les plongements de  $L$  dans  $k'$  au-dessus de  $k$ . Elle arrive de plus équipée d'un morphisme surjectif :

$$p : (N_{L/k} A)_L \longrightarrow A.$$

Soit  $b \in \text{Pic}^0(A)$ . On lui associe l'élément  $b_* = p^{\sigma_1^*}(b^{\sigma_1}) + \dots + p^{\sigma_m^*}(b^{\sigma_m})$ . Alors la proposition 4 de [15] nous donne un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{Pic}^0(A) &\rightarrow \text{Pic}^0(A_*) \\ b &\mapsto b_*. \end{aligned}$$

On associera à la variété abélienne polarisée  $(A, \Theta)/L$  sa restriction  $(A_*, \Theta_*)/k$  via cet isomorphisme. La proposition 5 de [15] nous donne alors :

**Proposition 3.2.** (Milne)

On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \text{Pic}^0(A) \times A(L) \rightarrow \mathbb{R}$  l'accouplement de Néron-Tate. Soient  $a \in A_*(k)$  et  $b \in \text{Pic}^0(A)$ , alors :

$$\langle b_*, a \rangle_k = \langle b, p(a) \rangle_L.$$

Considérons l'application (surjective, voir par exemple [7] p. 208) suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_\Theta : A &\rightarrow \text{Pic}^0(A) \\ Q &\mapsto t_Q^* \Theta - \Theta. \end{aligned}$$

Nous choisissons alors dans l'énoncé de Milne :  $b = \Phi_\Theta(p(a))$ , image du point  $p(a) \in A$  dans  $\text{Pic}^0(A)$ . On sait alors que  $\langle \Phi_\Theta(p(a)), p(a) \rangle_L = \widehat{h}_{A/L, \Theta}(p(a))$  et on déduit de ce qui précède :

$$\widehat{h}_{A_*/k, \Theta_*}(a) = \widehat{h}_{A/L, \Theta}(p(a)).$$

Considérons alors le cas de figure suivant. On choisit un point  $P_1 \in A(k)$  d'ordre infini et on forme, pour  $N \geq 1$ , une suite de points  $P_N = \frac{1}{N} P_1 \in A(k_N)$ , avec  $k_N = k[P_N]$ . On note  $m_N = [k_N : k]$ . On peut donc définir

une suite de variétés abéliennes  $A_N = N_{k_N/k} A$  définies sur  $k$  telles que, en notant  $P'_N$  un antécédent de  $P_N$  par  $p$  dans  $A_N(k)$  :

$$\widehat{h}_{A_N/k, \Theta_N}(P'_N) = \widehat{h}_{A/k_N, \Theta}(P_N) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A/k_N, \Theta}(P_1) = \frac{1}{N^2} \widehat{h}_{A/k, \Theta}(P_1).$$

Dans le même temps, grâce à l'isomorphisme  $\psi$  on peut déduire les relations suivantes sur les dimensions et les hauteurs stables :

$$\dim(A_N) = m_N \dim(A), \quad h_{st}(A_N) = m_N h_{st}(A).$$

On doit enfin calculer l'adhérence de  $\mathbb{Z} \cdot P'_N$ . Or comme  $P_N = \frac{1}{N} P_1$ , on aura  $\mathbb{Z} \cdot P_N = \frac{1}{N} \mathbb{Z} \cdot P_1$ , donc :

$$\overline{\mathbb{Z} \cdot P'_N} = \left\{ (P, \dots, P) \in A^{\sigma_1} \times \dots \times A^{\sigma_{m_N}} \right\} \subsetneq A^{\sigma_1} \times \dots \times A^{\sigma_{m_N}}$$

On peut donc garder à l'esprit :

**Fait 3.3.** *Soit  $k$  un corps de nombres. Il existe une suite de variétés abéliennes  $A_N/k$  définies sur  $k$  et une suite de points d'ordre infini  $Q_N \in A_N(k)$  telles que  $(\dim(A_N))_{N \geq 1}$  est croissante et :*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{A_N}(Q_N) &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} h_{st}(A_N) &= +\infty, \\ \dim(\overline{\mathbb{Z} \cdot Q_N}) &= \dim(A_1). \end{aligned}$$

Ce fait souligne le caractère crucial de l'hypothèse  $\overline{\mathbb{Z} \cdot P} = A$  dans l'énoncé de la conjecture de Lang et Silverman.

**Remarque.** *Une variante consiste à considérer la situation  $A = A_1 \times A_2$  et un point  $P = (P_1, O) \in A(k)$ , avec  $h_F(A_2/k)$  très grand.*

## Bibliographie

- [1] S. DAVID, *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes*. Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509–544.
- [2] S. DAVID, *Autour d'une conjecture de S. Lang*. Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990) (1992), 65–98.
- [3] A. ERDÉLYI ET W. MAGNUS ET F. OBERHETTINGER, ET F. TRICOMI, *Higher transcendental functions. Vols. I, II*. **30** (1953).
- [4] B. H. GROSS, *Heegner points on  $X_0(N)$* . Modular forms (Durham, 1983) (1984), 87–105.
- [5] B. GROSS ET D. B. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of  $L$ -series*. Invent. Math. **84** (1986), 225–320.
- [6] M. HINDRY ET J. H. SILVERMAN, *The canonical height and integral points on elliptic curves*. Invent. Math. **93** (1988), 419–450.
- [7] M. HINDRY ET J. H. SILVERMAN, *Diophantine geometry*. Graduate Texts in Mathematics **201** (2000).
- [8] K. IRELAND ET M. ROSEN, *A classical introduction to modern number theory*. Graduate Texts in Mathematics **84** (1990).

- [9] H. IWANIEC, *Spectral methods of automorphic forms*. Graduate Studies in Mathematics **53** (2002).
- [10] J. JORGENSEN ET J. KRAMER, *Bounds on Faltings' delta function through covers*. Ann. of Math. (2) (accepté en 2006).
- [11] M. KRIR, *À propos de la conjecture de Lang sur la minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$* . Acta Arith. **100** (2001), 1–16.
- [12] S. LANG, *Elliptic curves : Diophantine analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **231** (1978).
- [13] G. LIGOZAT, *Courbes modulaires de genre 1*. Bull. Soc. Math. France, Mém. 43, Supplément au Bull. Soc. Math. France Tome 103, no. 3 (1975).
- [14] D. W. MASSER, *Large period matrices and a conjecture of Lang*. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92 **116** (1993), 153–177.
- [15] J. S. MILNE, *On the arithmetic of abelian varieties*. Invent. Math. **17** (1972), 177–190.
- [16] P. MICHEL ET E. ULLMO, *Points de petite hauteur sur les courbes modulaires  $X_0(N)$* . Invent. Math. **131** (1998), 645–674.
- [17] H. NAKAZATO, *Heegner points on modular elliptic curves*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), 223–225.
- [18] J. NEKOVÁŘ ET N. SCHAPPACHER, *On the asymptotic behaviour of Heegner points*. Turkish J. Math. **23** (1999), 549–556.
- [19] F. PAZUKI, *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes : sur la conjecture de Lang et Silverman*. Thèse (2008).
- [20] C. PETSCHKE, *Small rational points on elliptic curves over number fields*. New York J. Math. **12** (2006), 1–14.
- [21] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Publications of the Mathematical Society of Japan **11** (1994).
- [22] J. H. SILVERMAN, *Lower bounds for height functions*. Duke Math. J. **51** (1984), 395–403.
- [23] J. H. SILVERMAN, *Lower bound for the canonical height on elliptic curves*. Duke Math. J. **48** (1981), 633–648.
- [24] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Société Mathématique de France **1** (1995).
- [25] G. TENENBAUM, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*. Société Mathématique de France **2** (1996).
- [26] M. WATKINS, *Computing the modular degree of an elliptic curve*. Experiment. Math. **11** (2002), 487–502.
- [27] A. WEIL, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Hermann & Cie., Paris (1948).

Fabien PAZUKI  
 IMJ Université Paris 7  
 2, place de Jussieu  
 75 251 Paris Cedex 05, France  
*E-mail:* pazuki@math.jussieu.fr  
*URL:* <http://www.math.jussieu.fr/~pazuki>