# Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*


Guillaume RICOTTA et Nicolas TEMPLIER

**Comportement asympotique des hauteurs des points de Heegner**

Tome 21, n° 3 (2009), p. 743-755.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_3_743_0>

*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **21** (2009), 743-755

# Comportement asympotique des hauteurs des points de Heegner

par Guillaume RICOTTA et Nicolas TEMPLIER

Résumé. Le terme principal de la moyenne, sur les discriminants quadratiques satisfaisant la condition de Heegner, de la hauteur de Néron-Tate des points de Heegner d'une courbe elliptique rationnelle $E$ a été déterminé dans [13]. Les auteurs ont également conjecturé l'expression du terme suivant. Dans cet article, il est démontré que cette expression est correcte et une asymptotique précise, qui sauve une puissance dans le terme d'erreur, est obtenue. Les annulations des coefficients de Fourier de formes sur $GL_2$ dans les progressions arithmétiques sont au cœur de la démonstration.

Abstract. *Asymptotic behaviour for the averaged height of Heegner points*

The leading order term for the average, over quadratic discriminants satisfying the so-called Heegner condition, of the Néron-Tate height of Heegner points on a rational elliptic curve $E$ has been determined in [13]. In addition, the second order term has been conjectured. In this paper, we prove that this conjectured second order term is the right one; this yields a power saving in the remainder term. Cancellations of Fourier coefficients of $GL_2$-cusp forms in arithmetic progressions lie in the core of the proof.

## 1. Introduction et présentation des résultats

**1.1. Problématique et résultats précédents.** Soient $N > 1$ un entier sans facteur carré et

$$\mathcal{D} := \left\{ d \in \mathbb{Z},\ d < 0,\ \mu^2(d) = 1,\ d \equiv \nu^2 \mod (4N),\ (\nu, 4N) = 1 \right\}$$

l'ensemble des discriminants fondamentaux impairs qui satisfont la *condition de Heegner*. Pour $d$ dans $\mathcal{D}$, notons $\mathbb{H}_d$ le corps de classes de Hilbert du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Soient $E$ une courbe elliptique rationnelle de conducteur $N$ et $\mathrm{P}_d \in E(\mathbb{H}_d)$ l'un des points de Heegner de $E$ de discriminant $d$. Notons $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d)$ la hauteur de Néron-Tate de ce point, sachant que la normalisation adoptée est donnée par $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d) = [\mathbb{H}_d : \mathbb{Q}]\widehat{h}(\mathrm{P}_d)$

Manuscrit reçu le 7 juillet 2008.
*Classification math..* 11G50, 11M41.

où $\widehat{h} : E(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_+$ désigne la fonction hauteur canonique (voir [15, Chapitre VIII Section 9] par exemple). Cette valeur, qui ne dépend pas du choix du point de Heegner de discriminant $d$ (voir [8]), est un invariant arithmétique du couple $(E, d)$ qui semble très irrégulier, comme le suggère la figure 1 page 1407 de [13].

Le but de cet article, est de poursuivre l'étude quantitative de $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d)$ *en moyenne* sur les discriminants $d$ dans $\mathcal{D}$. De façon plus précise, il s'agit, comme dans [13], d'étudier le comportement asymptotique de la somme

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\ |d|\leqslant Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d) \tag{1.1}$$

lorsque $Y > 0$ tend vers l'infini.

Il est possible de montrer que l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$ possède une densité

$$\lim_{Y\to+\infty} \frac{\mathrm{card}\{d \in \mathcal{D},\ |d| \leq Y\}}{Y} = 2c_N$$

dont la valeur explicite est

$$c_N := \frac{3}{\pi^2 N}\left(\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p|2N}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\right)\mathrm{card}\left(\left\{\nu^2 \in \mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}\ ,\ (\nu, 4N) = 1\right\}\right).$$

La plupart des notations de cet article sont compatibles avec celles de [13].

L'approche analytique naturelle de cette étude repose sur la formule de Gross-Zagier ( [8, Théorème 6.1, Section I Page 230])

$$L'_d(E, 1) = \frac{2\Omega}{u^2\sqrt{-d}}\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) \tag{1.2}$$

où $2u$ est le nombre de racines de l'unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\Omega$ est le volume complexe de $E$ c'est-à-dire le double de l'aire d'un parallélogramme fondamental de $E(\mathbb{C})$ (voir remarque 5). La définition de la série $L$ apparaissant dans le membre de gauche est donnée dans la section 2. Les auteurs de [13] ont déterminé le comportement asymptotique suivant (voir [13, Théorème 4.1 Page 1417]).

**Théorème** (G. Ricotta & T. Vidick)**.** *Si $E$ est une courbe elliptique rationnelle de conducteur $N$ sans facteur carré et $F$ est une fonction lisse à support compact dans $\mathbb{R}_+^{\times}$ alors*

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} L'_d(E,1)F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \alpha Y\log Y + \beta Y + \mathsf{Error} + O_\epsilon\left(N^{15/4+\epsilon}Y^{19/20+\epsilon}\right)$$

*où*

$$\mathsf{Error} = O_\epsilon\left(NY\left(\log\left(NY\right)\right)^{1/2+\epsilon}\right) \tag{1.3}$$

*pour tout* $\epsilon > 0$ *et où*

$$\alpha := c_N L(1) \int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t,$$

$$\beta := c_N \int_0^{+\infty} F(t) \left( L'(1) + L(1) \left( \log\left( \frac{Nt}{4\pi^2} \right) - 2\gamma \right) \right) \mathrm{d}t$$

*avec*

$$L(s) := L(\mathrm{Sym}^2 E, 2s) \frac{\zeta^{(N)}(4s-2)}{\zeta^{(N)}(2s)} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ (p,2N)=1}} \left( 1 - \frac{1}{p^{4s-2}(p+1)} \right).$$

**Remarque 1.** *Selon l'estimation* (1.3) *de* Error, *ce théorème est un développement asymptotique à un terme du premier moment de la valeur de la dérivée de la série* $L_d(E,s)$ *au point critique* $s = 1$*, lorsque* $F$ *est d'intégrale non nulle. L'analyse analytique et numérique menée dans [13] avait suggéré que ce terme devrait être négligeable devant* $Y$*. L'objectif de ce travail est de confirmer cette observation c'est-à-dire de prouver qu'il existe des constantes réelles explicites* $\delta_2$ *et* $\delta_1 > 0$ *telles que*

$$\mathsf{Error} = O_\epsilon \left( N^{\delta_2 + \epsilon} Y^{1 - \delta_1 + \epsilon} \right)$$

*pour tout* $\epsilon > 0$ *(voir* (3.1)*).*

**Remarque 2.** *La fonction* $L(s)$ *ci-dessus correspond à la fonction* $\widetilde{\mathcal{L}}(s)$ *de [13, Page 1417]. D'une part, son expression a été simplifiée :* $L(s)$ *apparaît clairement comme*[1] $L(Sym^2 E, 2s)$ *multiplié par des facteurs correctifs, dont le produit converge absolument lorsque* $s$ *est proche de* 1*. D'autre part, une petite erreur dans les facteurs Eulériens à la place* 2 *a été corrigée. Ceci modifie très légèrement la valeur de* $\beta$*, mais ne modifie pas la valeur de* $\alpha$*. C'est uniquement ce facteur* $\alpha$ *qui est utilisé dans le paragraphe* 5 *de [13] lors de la confrontation des résultats numériques et théoriques.*

**1.2. Présentation des nouveaux résultats.** Le résultat principal de cet article est le suivant.

**Théorème A.** *Si* $E$ *est une courbe elliptique rationnelle de conducteur* $N$ *sans facteur carré et* $F$ *est une fonction lisse à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\times$ *alors*

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L'_d(E,1) F\left( \frac{|d|}{Y} \right) = \alpha Y \log Y + \beta Y + O_\varepsilon \left( N^{15/4+\epsilon} Y^{19/20+\epsilon} \right)$$

*pour tout* $\varepsilon > 0$*, uniformément en* $N$ *et* $Y > 0$*.*

---

1. Signalons que, selon la normalisation adoptée, la bande critique de $L(\mathrm{Sym}^2 E, s)$ est $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 2$.

**Remarque 3.** *L'estimée est très précise en la variable $Y$. Si la courbe elliptique $E$ est fixée, une petite puissance dans le terme d'erreur a été sauvée par rapport au terme principal. Bien qu'il soit possible d'améliorer nettement les exposants $15/4$ et $19/20$, des arguments courts, qui donnent des exposants qui ne sont pas optimaux mais restent de taille modérée, ont été privilégiés.*

*Une dépendance explicite en le conducteur $N$ a été conservée tout au long de ce travail. La façon dont varie $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d)$ (ou plus simplement $\widehat{h}(E)$, la hauteur de Faltings de $E$) en fonction de $N$ est une question délicate et largement ouverte.*

**Remarque 4.** *D'une part, $c_N \asymp 2^{-\omega(N)}$ et $L(1) \asymp L(\mathrm{Sym}^2 E, 2)$ . D'autre part,*

$$N^{-\epsilon} \ll_\epsilon L(\mathrm{Sym}^2 E, 2) \ll \log N$$

*pour tout $\varepsilon > 0$ d'après [7]. Ainsi, le terme d'erreur croît (à $Y$ fixé) bien plus vite avec $N$ que les termes principaux ($\alpha$ et $\beta$). Le terme principal domine lorsque $N \ll Y^{1/76}$.*

Le théorème A et la formule de Gross-Zagier (1.2) impliquent le corollaire suivant (voir [13, Corollaire 4.3 Page 1424]).

**Corollaire B.** *Si $E$ est une courbe elliptique rationnelle de conducteur $N$ sans facteur carré alors*

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\|d|\leqslant Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(\mathrm{P}_d) = C_{\mathrm{P}} Y^{\frac{3}{2}} \log Y + C'_{\mathrm{P}} Y^{\frac{3}{2}} + O_\epsilon\left(N^{15/4+\epsilon} Y^{29/20+\epsilon}\right)$$

*pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément en $N$ et $Y > 0$, où $C_{\mathrm{P}}$ est la constante définie par*

$$C_{\mathrm{P}} := \frac{\pi}{3} c_N \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\(p,2N)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^2(p+1)}\right)^{-1} \frac{L(\mathrm{Sym}^2 E, 2)}{\pi\Omega}$$

*et*

$$C'_{\mathrm{P}} := C_{\mathrm{P}} \left(\log\left(\frac{N}{4\pi^2}\right) - \frac{2}{3} - 2\gamma\right) + \frac{c_N}{3\Omega} L'(1).$$

**Remarque 5.** *Une autre écriture possible pour la constante $C_{\mathrm{P}}$ est*

$$C_{\mathrm{P}} = \frac{\pi}{3} c_N \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\(p,2N)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^2(p+1)}\right)^{-1} \frac{deg(\Phi)}{N}$$

*où $\Phi : X_0(N) \to E$ est la paramétrisation modulaire de $E$. Cela résulte essentiellement de [14] et de l'égalité $\Omega \times deg(\Phi) = 4\pi^2 (f,f)$ où $(f,f)$ désigne le produit scalaire de Petersson de $f$ (voir [8, Pages 230, 308 et 310]).*

*Ainsi, l'intuition géométrique suggérant que, à conducteur $N$ fixé, la hauteur de Néron-Tate d'un point de Heegner est gouvernée par le degré de la paramétrisation modulaire de $E$, est vraie en moyenne sur les discriminants (voir [13, Remarque 4.5 Page 1425]).*

**1.3. Idée de la preuve du Théorème A.** Les premières étapes sont classiques et ont été effectuées dans [13]. On exprime $L'_d(E,1)$ comme un polynôme de Dirichlet tronqué à l'aide de l'équation fonctionnelle approchée. Un terme «diagonal» provenant des entiers $n$ qui sont des carrés fournit le terme principal $\alpha Y \log Y + \beta Y$, avec $\alpha$ et $\beta$ comme données précedemment (noté $\mathsf{TP}_1$ dans [13]). La contribution «hors-diagonale» $r'_d(n)$, voir la définition (2.3), correspond aux entiers $v$ qui sont différents de 0. C'est d'elle que provient le terme $\mathsf{Error}$. Pour démontrer le Théorème A, on améliore l'estimée (1.3). L'estimée (3.1) montre que $\mathsf{Error}$ est négligeable devant $\beta Y$ et que l'on peut l'incorporer dans le terme d'erreur.

Expliquons la différence principale avec l'article antérieur. Dans [13], il est fait appel à [13, Equation (4.2)] :

$$\sum_{d\in\mathcal{D}} r'_d(n) \leqslant 4\sqrt{n}. \tag{1.4}$$

Cette majoration combine astucieusement les aspects «clairsemés» de $\mathcal{D}$ et de l'équation $4n = u^2 + |d|v^2$. Elle met en évidence des annulations non triviales dans la somme en $d$ : il en découle l'estimée (1.3).

Dans cet article, les annulations de la somme en $d$ sont davantage exploitées en prenant en compte les oscillations des coefficients de Fourier $a_n$ dans les progressions arithmétiques (qui ne peuvent pas être détectées avec (1.4)). Ainsi, chaque étape est délicate dans la mesure où toute majoration trop directe briserait ces oscillations. C'est pour cette raison que la première étape de la démonstration consiste à «déployer» l'équation $4n = u^2 + |d|v^2$. Intuitivement, lorsque $d$ parcourt $\mathcal{D}$, l'entier $n$ parcourt des progressions arithmétiques. Au cœur de la démonstration est l'inégalité (3.9).

L'estimée (3.9) est très générale et peut être améliorée dans de nombreux cas [12, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 9]. Elle est suffisante dans le cas présent car le module des progressions arithmétiques est de taille modérée. La démonstration est de ce fait robuste et il est probable qu'elle s'adapte à d'autres problèmes.

**1.4. Organisation de l'article.** La Section 2 décrit les propriétés analytiques de la série $L$ en (1.2), ce qui permet de décrire précisément le terme $\mathsf{Error}$. La démonstration du Théorème A est détaillée dans la Section 3.

**Notations.** Le paramètre principal de cet article est un nombre réel strictement positif $Y$ qui tend vers l'infini. On gardera trace d'une dépendance polynomiale en $N$. Ainsi, si $f$ et $g$ sont des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes alors les notations $f(Y) \ll_B g(Y)$ ou $f(Y) = O_B(g(Y))$

signifient que $|f(Y)|$ est inférieur ou égal à une «constante» ne dépendant que de $B$ multipliée par $g(Y)$, au moins pour $Y > 0$ assez grand.

La lettre $\epsilon$ désigne un réel strictement positif arbitrairement petit dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. La lettre $\mu$ désigne la fonction de Möbius et la lettre $\omega$ désigne la fonction nombre de diviseurs premiers.

Les conventions concernant les symboles de Kronecker et de Jacobi sont les suivantes. Le symbole $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ désigne le caractère de Jacobi qui étend le caractère de Legendre par multiplicativité, voir [11, Equation (3.35)]. Lorsque $d$ est un discriminant fondamental, le symbole de Kronecker $\chi_d$ est l'unique caractère de Dirichlet primitif réel (i.e. quadratique) de module $|d|$. Plus généralement lorsque $d \equiv 0, 1(4)$, $\chi_d$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$ comme défini dans [11, Page 51]. Il n'est pas primitif en général et il est possible de le voir comme l'induction du caractère de Kronecker du discriminant fondamental sous-jacent. La construction du caractère de Kronecker est intimement liée à la loi de réciprocité quadratique et une caractérisation est la suivante. C'est l'unique caractère de Dirichlet modulo $|d|$ qui satisfait $\chi_d(p) = \left(\frac{d}{p}\right)$ pour tous les nombres premiers $p$ impairs. Rappelons que $\chi_d(-1) = sign(d)$.

Enfin, pour un produit Eulerien $L(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} L_p(s)$, $\mathcal{P}$ désignant l'ensemble des nombres premiers, et pour un entier $k \geqslant 1$, posons

$$L_{(k)}(s) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p|k}} L_p(s) \quad \text{et} \quad L^{(k)}(s) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ (p,k)=1}} L_p(s).$$

**Remerciements.** *Les auteurs remercient l'arbitre pour sa lecture attentive de ce manuscrit. Le premier auteur, financé par le projet ANR «Aspects Arithmétiques des Matrices Aléatoires et du Chaos Quantique», voudrait remercier chaleureusement H. Darmon pour lui avoir suggéré cette problématique et I. Fesenko pour son invitation et pour les excellentes conditions de travail offertes par l'Université de Nottingham. Le second auteur tient à remercier l'Université Bordeaux 1 pour son invitation au séminaire de théorie des nombres et pour son accueil chaleureux.*

## 2. Prérequis analytiques

La fonction $L$ de $E$ sur $\mathbb{Q}$ notée $L(E|\mathbb{Q}, s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ est définie a priori sur $\Re(s) > \frac{3}{2}$. Les travaux de A. Wiles et R. Taylor ( [17], [16]) assurent qu'il existe une forme primitive cuspidale $f$ de niveau $N$, de poids 2 et de caractère trivial telle que

$$L(E|\mathbb{Q}, s) = L(f, s).$$

Souvenons-nous que les coefficients de Fourier de $f$ satisfont

$$a_n \ll_\epsilon n^{1/2+\varepsilon} \tag{2.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La série de Dirichlet apparaissant dans le membre de gauche de la formule de Gross-Zagier (1.2) est définie sur $\Re(s) > 3/2$ par

$$L_d(E,s) := \left(\sum_{\substack{m\geqslant 1\\(m,N)=1}} \frac{\chi_d(m)}{m^{2s-1}}\right) \times \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n r_d(n)}{n^s}\right)$$

où $\chi_d$ est le caractère de Kronecker du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $r_d(n)$ désigne le nombre d'idéaux principaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de norme $n$. Par la méthode de Rankin-Selberg, $L_d(E,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Lambda_d(E,s) = -\chi_d(N)\Lambda_d(E,2-s)$$

où $\Lambda_d(E,s) := (N|d|)^s \left((2\pi)^{-s}\Gamma(s)\right)^2 L_d(E,s)$ est la série complétée (voir la section IV de [8] pour la mise en œuvre de la méthode). Remarquons que comme $d$ est un carré modulo $N$, le signe de l'équation fonctionnelle est $-1$, de sorte que $L_d(E,1) = 0$.

Comme expliqué dans l'introduction, il s'agit d'estimer minutieusement le terme $\mathsf{Error}$ qui est donné dans l'équation (4.3) de [13], et qui apparaît lorsque l'on applique à $\Lambda_d(E,s)$ la méthode de l'équation fonctionnelle approchée :

$$\mathsf{Error} := 2\sum_{d\in\mathcal{D}} \sum_{(m,N)=1} \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n\chi_d(m)r'_d(n)}{mn} V\left(\frac{4\pi^2 nm^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right). \tag{2.2}$$

Les notations sont les suivantes :

$$r'_d(n) := \mathrm{card}\left(\left\{(u,v) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)\,,\ u^2 + |d|v^2 = 4n\right\}\right) \tag{2.3}$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout élément $d$ de $\mathcal{D}$ (et plus généralement $\mathcal{D}'$ défini en (3.4)) ; $V : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de coupure définie à la page 1418 de [13] vérifiant

$$x^j V^{(j)}(x) \ll_j x^{-1/4} \exp\left(-2\sqrt{x}\right) \tag{2.4}$$

pour tout entier naturel $j$.

## 3. Estimée du terme Error

L'objectif de cette section est de démontrer que

$$\mathsf{Error} = O_\varepsilon\left(N^{13/12+\epsilon} Y^{5/6+\epsilon}\right) \tag{3.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément en $N$ et $Y > 0$.

**3.1. Estimées triviales.** On commence par déployer la définition (2.3) de sorte que :

$$\mathsf{Error} = 2 \sum_{(m,N)=1} \sum_{(d,n,u,v)} \frac{a_n \chi_d(m)}{mn} V\left(\frac{4\pi^2 nm^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right)$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble des quadruplets $(d,n,u,v) \in \mathcal{D} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ qui vérifient $4n = u^2 + |d|v^2$.

Le terme $F(|d|/Y)$ restreint la sommation à $Y \ll |d| \ll Y$ car $F$ est à support compact dans $\mathbb{R}_+^\times$. La décroissance exponentielle de $V$ donnée en (2.4) assure que la contribution des quadruplets pour lesquels

$$nm^2 \gg_\epsilon N^{1+\epsilon} Y^\epsilon |d|$$

est négligeable car elle est bornée par $O_{B,\epsilon}((NY)^{-B})$ pour tout nombre réel $B > 0$. C'est en particulier le cas lorsque $u > U/m$ ou bien $|v| > V/m$ ou encore $n > N_0/m^2$ où

$$U \coloneqq N^{1/2+\epsilon/2} Y^{1/2+\epsilon/2}, \quad V \coloneqq N^{1/2+\epsilon/2} Y^{\epsilon/2}, \quad N_0 \coloneqq (NY)^{1+\epsilon}.$$

Dans toute la suite, il est donc légitime de se restreindre aux intervalles de sommation

(3.2)
$$0 \leqslant u \leqslant \frac{U}{m} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant |v| \leqslant \frac{V}{m} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant m \leqslant V \quad \text{et} \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{N_0}{m^2}.$$

Même lorsqu'elles ne sont pas explicitées, ces inégalités sont sous-entendues dans toute la suite.

**Remarque 3.1.** *Comme $n$ est uniquement déterminé par $u, v$ et $d$, le reste de la contribution peut se majorer, en valeur absolue et à l'aide de* (2.1)*, par*

(3.3)
$$\begin{aligned} \mathsf{Error} &\ll_\epsilon (NY)^\epsilon \sum_{m \geqslant 1} \sum_{(u,v,d)} \frac{1}{m(u^2+|d|v^2)^{1/2}} \left(\frac{N|d|}{(u^2+|d|v^2)m^2}\right)^{1/4} \\ &\ll_\epsilon (NY)^\epsilon N^{1/4} \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m^{3/2}} \left\{ \sum_{\substack{|d| \ll Y \\ 1 \leqslant |v| \leqslant V/m}} \frac{1}{|d|^{1/2}|v|^{3/2}} + \sum_{\substack{|d| \ll Y \\ 1 \leqslant u \leqslant U/m \\ 1 \leqslant |v| \leqslant V/m}} \frac{1}{u|v|^{1/2}} \right\} \\ &\ll_\epsilon N^{1/2+\epsilon} Y^{1+\epsilon} \end{aligned}$$

*pour tout $\epsilon > 0$. Cette estimée «triviale» n'est pas suffisamment précise (en fait moins bonne que* (1.3)*). Pour obtenir* (3.1)*, il faut tenir compte des oscillations des coefficients $a_n$.*

**3.2. La condition *d* sans facteur carré.** Pour effectuer la somme sur $d \in \mathcal{D}$, il est commode d'introduire l'ensemble

$$\mathcal{D}' := \left\{ d \in \mathbb{Z},\ d < 0,\ d \equiv \nu^2 \mod (4N),\ (\nu, 4N) = 1 \right\} \tag{3.4}$$

qui est une union de $O(N)$ progressions arithmétiques de raison $4N$ ; et de détecter séparément la condition $d$ sans facteur carré à l'aide de l'identité

$$\sum_{a^2|d} \mu(a) = \mu^2(d).$$

La définition (2.3) est étendue à $d \in \mathcal{D}'$ et la somme est coupée selon la taille des diviseurs $a$ :

$$\mathsf{Error} \leqslant \sum_{1 \leqslant a \leqslant A} |\mathsf{Error}(a)| + \sum_{a > A} |\mathsf{Error}(a)| = \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2.$$

Ici, $A$ est une petite puissance de $Y$ qui sera «optimisée» dans la section 3.5 et

$$\mathsf{Error}(a) := 2 \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}' \\ a^2|d}} \sum_{(m,N)=1} \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n \chi_d(m) r'_d(n)}{mn} V\left(\frac{4\pi^2 n m^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right).$$

Le terme $\mathsf{E}_1$ est estimé dans la section suivante alors que le terme $\mathsf{E}_2$ est estimé dans la section 3.4.

**3.3. Contribution des petits diviseurs.** On suppose que $(a, 4N) = 1$ car sinon $\mathsf{Error}(a) = 0$.

**3.3.1. *Travail préparatoire.*** La loi de réciprocité quadratique implique que

$$\chi_d(m) = \begin{cases} \left(\dfrac{d}{m_1}\right) & \text{si } (m_2, d) = 1 \text{ et } m_1 \text{ impair,} \\ \chi_8(d)\left(\dfrac{d}{m_1}\right) & \text{si } (m_2, d) = 1 \text{ et } m_1 \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } (m_2, d) \neq 1 \end{cases}$$

pour tout $d$ dans $\mathcal{D}'$ et tout entier naturel $m = m_1 m_2^2 \geqslant 1$ où $m_1$ est sans facteur carré. Cette identité résulte du fait que $d \equiv 1(4)$ et de [11, Equations (3.4.3) et (3.4.4)]. En particulier, la fonction

$$d \mapsto \chi_d(m)$$

est $4m$-périodique.

Supposons, afin d'alléger les notations, que $N$ est impair. Le cas $N$ pair est similaire. Pour tout entier $d < 0$, l'appartenance $d \in \mathcal{D}'$ peut être détectée par l'identité :

$$\frac{1}{2^{\omega(N)+1}}\sum_{\chi \pmod 4}\sum_{\substack{\psi \pmod N\\ \psi^2=1}}\chi(d)\psi(d)=\delta_{d\in\mathcal{D}'}$$

où $\chi$ décrit les deux caractères de Dirichlet de module 4 et $\psi$ décrit les caractères de Dirichlet quadratiques de module $N$.

Pour toute la suite, posons

$$\phi(d):=\chi_d(m)\delta_{d\in\mathcal{D}'}.$$

C'est une fonction $4mN$-périodique.

En tenant compte de (2.3), il est possible d'obtenir l'estimation

$$\mathsf{Error}(a)\leqslant\sum_{(m,N)=1}\frac{1}{m}\sum_{(u,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*}\left|\sum_{(d,n)}\phi(d)\frac{a_n}{n}V\left(\frac{4\pi^2nm^2}{N|d|}\right)F\left(\frac{|d|}{Y}\right)\right| \tag{3.5}$$

où la sommation porte sur les couples $(d,n)\in\mathbb{Z}_-\times\mathbb{N}^*$ satisfaisant $4n=u^2+|d|v^2$, $a^2\mid d$ et $1\leqslant n\leqslant N_0/m^2$. Le changement de variables $d\mapsto d/a^2$ assure que

$$\mathsf{Error}(a)\leqslant\sum_{(m,N)=1}\frac{1}{m}\sum_{(u,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*}\left|\sum_{(d,n)}\phi(d)\frac{a_n}{n}V\left(\frac{4\pi^2nm^2}{Na^2|d|}\right)F\left(\frac{a^2|d|}{Y}\right)\right|$$

où la sommation porte sur les couples $(d,n)\in\mathbb{Z}_-\times\mathbb{N}^*$ satisfaisant $4n=u^2+a^2|d|v^2$ et $1\leqslant n\leqslant N_0/m^2$. En effet, si $d\in\mathbb{Z}_-$ est divisible par $a^2$ alors

$$\phi(d)=\delta_{(a,m)=1}\phi\left(\frac{d}{a^2}\right).$$

Cette égalité résulte essentiellement du fait que $(a,4N)=1$ et donc $d\in\mathcal{D}'$ si et seulement si $d/a^2\in\mathcal{D}'$.

Limitons-nous à estimer la contribution des $v$ pairs sachant que la contribution des $v$ impairs se traite de façon tout à fait similaire. Dans ce cas, $u$ est également pair. Il s'agit alors d'estimer

$$\sum_{\substack{(m,N)=1\\ 1\leqslant m\leqslant V}}\frac{1}{m}\sum_{\substack{0\leqslant u\leqslant U/(2m)\\ 1\leqslant|v|\leqslant V/(2m)}}\left|\mathsf{E}(u^2;a^2,v^2)\right|, \tag{3.6}$$

après avoir effectué le changement de variables $(u,v)\mapsto(u/2,v/2)$, et où

$$\mathsf{E}(u^2;a^2,v^2):=\sum_{\substack{n\equiv u^2 \pmod{a^2v^2}\\ u^2+a^2v^2\leqslant n\leqslant N_0/m^2}}\frac{a_n}{n}\phi\left(\frac{u^2-n}{a^2v^2}\right)V\left(\frac{4\pi^2nm^2}{N\left(n-u^2\right)/v^2}\right)F\left(\frac{\left(n-u^2\right)/v^2}{Y}\right) \tag{3.7}$$

**3.3.2.** ***Coefficients de Fourier dans des progressions arithmétiques de petit module.*** Selon (3.7), il s'agit donc d'estimer

$$\mathsf{E}(u^2; a^2, v^2) = \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} a_n \eta(n) G(n),$$

où $1 \leqslant n_1 := u^2 + a^2v^2 \ll n_2 := N_0/m^2$, $\eta$ est la fonction $4Nma^2v^2$-périodique et de module inférieur à 1 définie par

$$\eta(n) := \begin{cases} \phi\left(\dfrac{u^2 - n}{a^2v^2}\right) & \text{si } n \equiv u^2 \pmod{a^2v^2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $G$ est la fonction définie par

$$G(x) := \frac{1}{x} V\left(\frac{4\pi^2 x m^2}{N\left(x - u^2\right)/v^2}\right) F\left(\frac{\left(x - u^2\right)/v^2}{Y}\right)$$

pour tout nombre réel $x > 0$. Selon (2.4),

$$\begin{aligned} G(x) &\ll \left(\frac{NY}{m^2}\right)^{1/4} x^{-5/4}, \\ xG'(x) &\ll \left(\frac{NY}{m^2}\right)^{1/4} x^{-5/4}\left(1 + \frac{u^2}{Y^{1/4}|v|^{1/2}(x - u^2)^{3/4}}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

D'après [10, Lemma I], on a

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n \eta(n) \ll (Nma^2v^2)^{1/2} x \log x. \tag{3.9}$$

En sommant par parties,

$$\mathsf{E}(u^2; a^2, v^2) = \left[\left\{\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n \eta(n)\right\} G(x)\right]_{n_1}^{n_2} - \int_{n_1}^{n_2} \left\{\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n \eta(n)\right\} G'(x) \, \mathrm{d}x$$

ce qui implique que

$$\mathsf{E}(u^2; a^2, v^2) \ll_\epsilon (NY)^\epsilon \left(Nma^2v^2\right)^{1/2} \left(\frac{NY}{m^2}\right)^{1/4} \frac{N^{1/4}}{\left(u^2 + a^2v^2\right)^{1/4}} \tag{3.10}$$

pour tout $\epsilon > 0$ grâce à (3.8) et (3.9).

**3.3.3.** ***Estimée finale de la contribution des petits diviseurs.*** Une estimation triviale des sommes en $u$, $v$, et $m$ combinée avec (3.6) et (3.10) assure que

(3.11)

$$\begin{aligned}\mathsf{Error}(a) &\ll_\epsilon (NY)^\epsilon NY^{1/4}\sum_{m\leqslant V}\frac{1}{m}\left\{\sum_{1\leqslant|v|\leqslant V/(2m)}\sqrt{a}\sqrt{|v|}+\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant U/(2m)\\ 1\leqslant|v|\leqslant V/(2m)}}\frac{a|v|}{\sqrt{u}}\right\}\\ &\ll_\epsilon (NY)^\epsilon NY^{1/4}\sum_{m\leqslant V}\frac{1}{m^{5/2}}\left\{\sqrt{a}V^{3/2}+a\sqrt{U}V^2\right\}\\ &\ll_\epsilon (NY)^\epsilon N^{9/4}Y^{1/2}a\end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$ d'où

$$\mathsf{E}_1 \ll_\epsilon (NY)^\epsilon N^{9/4}Y^{1/2}A^2. \tag{3.12}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Cela conclut l'estimation de $\mathsf{E}_1$.

**3.4. Contribution des grands diviseurs.** En procédant comme dans la remarque 3.1, mais en tenant compte de la condition supplémentaire $a^2 \mid d$, la majoration

$$\mathsf{Error}(a) \ll_\epsilon N^{1/2+\epsilon}Y^{1+\epsilon}/a^2$$

est valide pour tout $\epsilon > 0$ et implique, en sommant sur les $a > A$, que

$$\mathsf{E}_2 \ll_\epsilon (NY)^\epsilon \frac{N^{1/2}Y}{A} \tag{3.13}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

**3.5. Choix du paramètre *A*.** Selon (3.12) et (3.13),

$$\mathsf{Error} \ll_\epsilon (NY)^\epsilon\left(N^{9/4}Y^{1/2}A^2+\frac{N^{1/2}Y}{A}\right)$$

pour tout $\epsilon > 0$ et le choix optimal est $A \coloneqq Y^{1/6}N^{-7/12}$.

## Bibliographie


[1] K. Chandrasekharan and Raghavan Narasimhan. Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions. *Acta Arith.*, 6 :487–503, 1960/1961.

[2] K. Chandrasekharan and Raghavan Narasimhan. Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions. *Ann. of Math. (2)*, 76 :93–136, 1962.

[3] W. Duke and H. Iwaniec. Estimates for coefficients of $L$-functions. I. In *Automorphic forms and analytic number theory (Montreal, PQ, 1989)*, pages 43–47. Univ. Montréal, Montreal, QC, 1990.

[4] W. Duke and H. Iwaniec. Estimates for coefficients of $L$-functions. II. In *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)*, pages 71–82, Salerno, 1992. Univ. Salerno.

[5] W. Duke and H. Iwaniec. Estimates for coefficients of $L$-functions. III. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1989–90*, volume 102 of *Progr. Math.*, pages 113–120. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.

[6] W. Duke and H. Iwaniec. Estimates for coefficients of $L$-functions. IV. *Amer. J. Math.*, 116(1) :207–217, 1994.

[7] D. Goldfeld, J. Hoffstein, and Lieman D. An effective zero free region. *Ann. of Math. (2)*, 140(2), 1994.

[8] Benedict H. Gross and Don B. Zagier. Heegner points and derivatives of $L$-series. *Invent. Math.*, 84(2) :225–320, 1986.

[9] James Lee Hafner and Aleksandar Ivić. On sums of Fourier coefficients of cusp forms. *Enseign. Math. (2)*, 35(3-4) :375–382, 1989.

[10] Henryk Iwaniec. On the order of vanishing of modular $L$-functions at the critical point. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 2(2) :365–376, 1990.

[11] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[12] R. A. Rankin. Sums of cusp form coefficients. In *Automorphic forms and analytic number theory (Montreal, PQ, 1989)*, pages 115–121. Univ. Montréal, Montreal, QC, 1990.

[13] Guillaume Ricotta and Thomas Vidick. Hauteur asymptotique des points de Heegner. *Canad. J. Math.*, 60(6) :1406–1436, 2008.

[14] Goro Shimura. The special values of the zeta functions associated with cusp forms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(6) :783–804, 1976.

[15] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1986 original.

[16] Richard Taylor and Andrew Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :553–572, 1995.

[17] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.



Guillaume Ricotta
Université Bordeaux 1
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Laboratoire A2X
351, cours de la libération
33405 Talence Cedex, France
*E-mail*: `Guillaume.Ricotta@math.u-bordeaux1.fr`
*URL*: `http://www.math.u-bordeaux.fr/A2X/`

Nicolas Templier
Université Montpellier 2
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier
Case courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex, France
*E-mail*: `nicolas.templier@normalesup.org`
*URL*: `http://www.math.univ-montp2.fr/`