

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jean-Claude DOUAI

Sur la 2-cohomologie non abélienne des modèles réguliers des anneaux locaux henséliens

Tome 21, n° 1 (2009), p. 119-129.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_1_119_0>

© Université Bordeaux 1, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Sur la 2-cohomologie non abélienne des modèles réguliers des anneaux locaux henséliens

par JEAN-CLAUDE DOUAI

RÉSUMÉ. Soit A un anneau Noetherien, local, Hensélien, excellent, de corps résiduel k , k étant ou algébriquement clos de caractéristique 0 ou un corps fini, $X \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre dont la fibre spéciale $X_0 \rightarrow \text{Spec } A$ est de dimension au plus 1. Dans ce papier, nous complétons les résultats de [1] en montrant que si X est régulier et si L est un $X_{\text{ét}}$ -lien localement représentable par un groupe semi-simple simplement connexe, alors toutes les classes de $H^2(X_{\text{ét}}, L)$ sont neutres. Prenant pour X un modèle régulier de A , nous montrons que toutes les classes de $H^2(K, L)$, $K = \text{Frac}(A)$, sont neutres si $\dim(A) = 2$ et k algébriquement clos de caractéristique 0. Ceci redonne certains résultats de [2].

ABSTRACT. Let A be a Noetherian, local, Henselian, excellent domain with algebraically closed residue field of characteristic 0 or finite k , $K = \text{Frac}(A)$, $X \rightarrow \text{Spec } A$ a proper morphism with special fiber $X_0 \rightarrow \text{Spec } k$ of dimension at most one. Here we complete the results of [1] showing that if X is regular and if L is a $X_{\text{ét}}$ -lien that is locally representable by a simply connected semi-simple group, then all classes of $H^2(X_{\text{ét}}, L)$ are neutral. Taking for X a regular model of A , we show that all classes of $H^2(K, L)$ are neutral if $\dim(A) = 2$ and if k is algebraically closed of characteristic 0. We find again some results of [2].

Introduction

Soit A un anneau noethérien, local, hensélien, excellent, de corps résiduel k . Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0 ou k fini. Soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre dont la fibre spéciale $X_0 \rightarrow \text{Spec } k$ est de dimension au plus un. Colliot-Thélène, Ojanguren et Parimala ont montré que, si X était régulier, alors $Br(X) = Br(X_0) = 0$. Ils ont aussi établi la nullité du $H^1(K, \tilde{G})$ où $K = \text{Frac}(A)$, quand $\dim A = 2$ et k est algébriquement clos de caractéristique 0, \tilde{G} désignant un K -groupe linéaire semi-simple simplement connexe. Dans le même esprit, nous montrons que toutes les classes de $H_{\text{ét}}^2(X, L)$ sont neutres pour tout $X_{\text{ét}}$ -lien L localement représentable par un X -schéma en groupes semi-simples simplement connexes \tilde{G} . En appliquant ce résultat à un modèle régulier X de A et, en

combinant avec un résultat de [3], on en déduit que toutes les classes de $H^2(K, L)$ sont aussi neutres quand $\dim A = 2$ et k algébriquement clos, de caractéristique 0. K est alors un corps de type (II) au sens de [2] et ceci redonne certains résultats de Colliot-Thélène, Gilles, Parimala tels que, par exemple, la surjectivité du cobord $H^1(K, G) \xrightarrow{\delta^1} H^2(K, \mu)$ pour G semi-simple et μ le noyau du revêtement universel de G . Ces derniers imposent toujours la condition « l'indice d'une K -algèbre simple centrale quelconque est égal à son exposant ». Notre résultat local de [3] donne automatiquement cette égalité quand on travaille sur les corps de type (SI) au sens de [2] (cf. aussi le théorème 1.5 de [2]) et, de là par globalisation, sur les corps de type de type (II) (cf. aussi le théorème 1.3 de [2]).

Je tiens à remercier le referee pour son aide et ses corrections.

Dans toute la suite, nous supposons A noethérien.

§ I.

Proposition 1.1. *Soient A un anneau local hensélien, k son corps résiduel, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre, $X_0 \rightarrow \text{Spec } k$ la fibre de π au-dessus du point fermé. Soit L un lien localement (pour la topologie étale) représentable par un X -groupe semi-simple G . [On sait qu'alors L est représentable par un X -groupe G_L de même type que G (cf. par ex. la prop. 1.1 de [4] – G_L peut même être pris quasi-déployé)]. Alors, désignant par $Z(G_L)$ le centre de G_L (resp. par $Z(L)$ le centre de L), l'indice 0 indiquant la restriction à X_0 ,*

$$H_{\text{ét}}^2(X, Z(L)) = H_{\text{ét}}^2(X, Z(G_L)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(X_0, Z(G_{L_0}))$$

et $H_{\text{ét}}^2(X, L)$ est isomorphe à $H_{\text{ét}}^2(X_0, L_0)$, cet isomorphisme d'ensembles étant compatible avec les actions simplement transitives respectives de $H_{\text{ét}}^2(X, Z(G_L))$ et $H_{\text{ét}}^2(X_0, Z(G_{L_0}))$.

Démonstration. $Z(G_L)$ est un X -faisceau en groupes finis et l'isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^2(X, Z(G_L)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(X_0, Z(G_{L_0}))$$

résulte du théorème de changement de base propre (cf. par exemple [6] - VI - 2.7). Or, $H_{\text{ét}}^2(X, Z(G_L))$ (resp. $H_{\text{ét}}^2(X_0, Z(G_{L_0}))$) opère simplement transitivement sur $H_{\text{ét}}^2(X, L)$ (resp. $H_{\text{ét}}^2(X_0, L_0)$) (cf. le théor. 3.3.3 - Chap. IV de [6]). Compte tenu du fait que $H_{\text{ét}}^2(X, L)$ (resp. $H_{\text{ét}}^2(X_0, L)$) est pointé par la classe neutre unité $\varepsilon = [\text{Tors}(X_{\text{ét}}, G_L)]$ (resp. $\varepsilon_0 = [\text{Tors}(X_{0,\text{ét}}, G_{L_0})]$), on obtient alors le résultat. □

Conjecture 1.2. Sous les hypothèses de la prop. 1.1, il y a autant de classes dans $H_{\text{ét}}^2(X, L)$ que dans $H_{\text{ét}}^2(X_0, L_0)$. Il nous faut alors comparer les sous-ensembles des classes neutres de $H_{\text{ét}}^2(X, G_L)$ et $H_{\text{ét}}^2(X_0, G_{L_0})$: on

peut conjecturer que l'image inverse par l'application

$$H_{et}^2(X, L) \longrightarrow H_{et}^2(X_0, L_0)$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$H_{et}^2(X, G_L) \qquad H_{et}^2(X_0, G_{L_0})$$

de l'ensemble des classes neutres de $H_{et}^2(X_0, L_0)$ est l'ensemble des classes neutres de $H_{et}^2(X, L)$ étendant ainsi le résultat du cor. 2.2.6 (ii) du chap. VII de [5] où le résultat est énoncé pour les liens ind-finis L . On sait seulement que l'application :

$$H_{et}^1(X, (G_L)_{ad}) \longrightarrow H_{et}^1(X_0, (G_{L_0})_{ad})$$

est injective (cf. cor.5.5-exposé XII, p.90, Lecture Notes n° 305).

Dans le théorème 1.3 suivant, nous montrons que, dans le cas où la fibre spéciale est de dimension au plus 1, k étant séparablement clos ou fini et $G = \tilde{G}$ semi-simple simplement connexe, alors toutes les classes de $H_{et}^2(X, L)$ sont neutres, toutes les classes de $H_{et}^2(X_0, L_0)$ étant neutres, ce qui établit la conjecture 1.2 dans ce cas.

Théorème 1.3. *Soient A un anneau local hensélien et k son corps résiduel. Supposons k soit ou séparablement clos ou fini. Soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme propre dont la fibre spéciale $X_0 \rightarrow \text{Spec } k$ est de dimension au plus 1. Supposons X régulier. Soit \tilde{G} un X -groupe semi-simple simplement connexe. Alors, pour tout X_{et} -lien L localement représentable par \tilde{G} , toutes les classes de $H_{et}^2(X, L)$ sont neutres.*

Démonstration. Le lien L est représentable par un X -groupe semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé $\tilde{G}_L : \tilde{G}_L$ admet un X -couple de Killing (\tilde{B}, \tilde{T}) où \tilde{T} est un X -tore induit (cf. la prop. 3.13 - exposé XXIV de S.G.A.D. [7]) :

$$\tilde{T} = \prod_{X'/X} G_{m_{X'}} ,$$

X' ouvert étale fini de X , $\prod_{X'/X}$ désignant la restriction à la Weil de X' à X , d'où

$$H^2(X, \tilde{T}) = H_{et}^2(X, \tilde{T}) = H_{et}^2(X', G_m) = Br(X') = Br(X'_0) = 0$$

(cf. par ex. le corollaire 1.10 (b) et le corollaire 1.11 (b) de [1]). Donc $H^2(X, \tilde{T}) = 0$.

• Soit q une classe de $H_{et}^2(X, L) = H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)$. Ecrivons q sous la forme $\alpha \cdot \varepsilon$ où $\alpha \in H^2(X, Z(\tilde{G}_L))$, $\varepsilon =$ classe « unité » [Tors \tilde{G}_L] de $H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)$. La classe q est en relation avec α par

$$\begin{array}{ccc} H_{et}^2(X, Z(\tilde{G}_L)) & \xrightarrow{\circ} & H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) \\ \alpha & \xrightarrow{\circ} & q . \end{array}$$

Mais q est aussi en relation avec l'image de α dans $H^2(X, \tilde{T}) = 0$ par la relation

$$H^2(X, \tilde{T}) \xrightarrow{\circ} H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)$$

induite par $\tilde{T} \hookrightarrow \tilde{G}_L$ (cf. la déf. 3.1.4 - Chap. IV de [5] pour la relation $\xrightarrow{\circ}$) dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\circ} & q \\ \\ H_{et}^2(X, Z(L)) & \xrightarrow{\circ} & H_{et}^2(X, L) = H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) \\ & \searrow & \nearrow \circ \\ & H^2(X, \tilde{T}) = 0. & \end{array}$$

• La classe q est donc nécessairement neutre, ce qui démontre le théorème. □

Corollaire 1.4 (au théorème 1.3).

$$H_{et}^2(X, L) = H_{et}^2(X, L)' \simeq H_{et}^2(X_0, L_0)' = H_{et}^2(X_0, L_0)$$

où le ' désigne le sous-ensemble des classes neutres de $H_{et}^2(X, L)$ (resp. $H_{et}^2(X_0, L_0)$).

§ II.

Dans cette deuxième partie, nous appliquerons les résultats du § I précédent au cas où A est un anneau local, hensélien, excellent, de dimension 2, de corps résiduel k algébriquement clos et de caractéristique 0. Selon Hironaka, Abhyankar et Lipman, il existe alors des modèles réguliers X de A i.e. des schémas réguliers X munis d'un morphisme projectif birationnel $X \rightarrow \text{Spec} A$. La fibre X_0 de $X \rightarrow \text{Spec} A$ en le point fermé de $\text{Spec} A$ est une variété projective de dimension au plus 1 sur k . La propriété que k est algébriquement clos de caractéristique 0 implique que $cd \cdot (K)$, où $K = \text{Frac}(A)$, est égal à 2 (si k était de caractéristique p , on aurait seulement $cd_l(K) = 2$ pour $l \neq p$).

• Supposons donc que A est un anneau local, de dimension 2, hensélien, excellent, à corps résiduel k algébriquement clos, de caractéristique 0. Le corps $K = \text{Frac}(A)$ est un corps de type $(ll) = (local/local)$ comme défini dans [2]. Pour X un modèle projectif lisse de A , soient X^1 l'ensemble des

points de codimension 1 de X et Ω_X l'ensemble des valuations discrètes v associées aux points $x \in X^1$. Soit Ω la réunion sur tous les modèles projectifs lisses X des Ω_X . Par le corollaire 1.10 de [1], $Br(X) = 0$. La nullité de $Br(X)$ implique la trivialité de $Br_{nr}(K)$ défini à la page 187 dans loc-citado où $Br_{nr}(K)$ désigne le groupe de Brauer non ramifié de K consistant de toutes les classes de $Br(K)$ qui sont non ramifiées en toute valuation discrète de K . La trivialité de $Br_{nr}(K)$ implique à son tour la trivialité du noyau de la fonction restriction diagonale des groupes de Brauer

$$Br(K) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_X} Br(K_v)$$

et, a fortiori, du noyau de

$$Br(K) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega} Br(K_v).$$

• On sait par [2] p. 293 que chaque K_v , pour $v \in \Omega$, est un corps de type $(sl) = (semi - local)$. En utilisant la théorie de Bruhat-Tits, il a été montré dans [3] Chap. VII - Théorème 3.1, p. 99 (cf aussi les corollaires 2.6 et 2.8 de [4]) que si $G = \tilde{G}$ est un groupe semi-simple simplement connexe défini sur un corps semi-local K_v , alors toutes les classes de $H^2(K_v, L)$, où L est un K_v -lien localement (pour la topologie étale) représentable par \tilde{G} , sont neutres. Ce résultat implique, en particulier, l'égalité entre l'indice et l'exposant pour les corps de type (sl) , mentionnée dans l'introduction. Nous obtenons alors :

Théorème 2.1. *Soit A un anneau local, hensélien, excellent, de dimension 2, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique 0, K son corps des fractions, L un K -lien localement (pour la topologie étale) représentable par un K -groupe semi-simple simplement connexe $\tilde{G} = \tilde{G}_L$. Alors toutes les classes de $H^2(K, L)$ sont neutres.*

Démonstration. Dans la démonstration du théorème 1.3, nous avons considéré la relation

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, \tilde{T}) = 0 & \dashrightarrow & H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) = H_{et}^2(X, L) \\ \parallel & & \\ Br(X') & & \end{array}$$

où X' était défini par la condition $\tilde{T} \simeq \prod_{X'/X} G_{m_{X'}}$.

Par ce qui a été dit précédemment, la flèche

$$Br(K') \hookrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_{X'}} H^2(K'_v, G_m)$$

(K' = corps des fonctions de X')

est injective. Elle s'insère dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbf{D}_1) : H^2(X, \tilde{T}) = Br(X') = 0 = Br_{nr}(K') & \longrightarrow & Br(K') \subset & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_{X'}} Br(K'_v) \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\
 H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) & \longrightarrow & H^2(K, \tilde{G}_L) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L).
 \end{array}$$

$\| \leftarrow$ th. 1.3

$H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)'$

- L'application

$$H^2(K, \tilde{G}_L) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L)$$

est compatible avec les actions respectives de $H^2(K, Z(\tilde{G}_L))$ et $\bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L))$. L'injectivité de

$$Br(K') \hookrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_{X'}} Br(K'_v)$$

implique immédiatement l'injectivité de

$$H^2(K', \mu_n) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_{X'}} H^2(K'_v, \mu_n) \quad \forall n \geq 0,$$

puis celle de

$$H^2(K, Z(\tilde{G}_L)) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L)).$$

L'application

$$H^2(K, \tilde{G}_L) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L)$$

dans le diagramme (\mathbf{D}_1) est donc injective (comme application d'ensembles). En particulier, si une classe de $H^2(K, \tilde{G}_L)$ est envoyée sur la classe unité $\bigoplus_{v \in \Omega_X} \epsilon_v = \bigoplus_{v \in \Omega_X} [Tors(\tilde{G}_L)_v]$ de $\bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L)$, alors elle coïncide avec la classe unité $\epsilon = [Tors \tilde{G}_L]$.

Montrons maintenant que toutes les classes de $H^2(K, \tilde{G}_L)$ sont neutres. Nous en donnons deux démonstrations.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbf{D}_2) : & H^1(K, \tilde{G}_L) & \longrightarrow & H^1(K, \text{Int.}\tilde{G}_L) & \longrightarrow & H^2(K, Z(\tilde{G}_L)) & \longrightarrow & H^2(K, \tilde{G}_L) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^1(K_v, \tilde{G}_L) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^1(K_v, \text{Int.}\tilde{G}_L) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L)) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L) \\
 & & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L)'
 \end{array}$$

La deuxième flèche verticale est injective par le théorème 5.3 de [1] (propriété non indispensable dans la suite).

Dans le diagramme (\mathbf{D}_2) , toutes les classes de $\bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L))$ sont envoyées sur la classe unité $\bigoplus_{v \in \Omega_X} \epsilon_v$ de $\bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \tilde{G}_L)$ par la relation \dashrightarrow dans la deuxième ligne. Du carré de droite dans le diagramme (\mathbf{D}_2) résulte alors que toutes les classes de $H^2(K, Z(\tilde{G}_L))$ sont envoyées sur la classe $\epsilon = [Tors \tilde{G}_L]$ par la relation \dashrightarrow de la première ligne, d'où la surjectivité de l'application

$$H^1(K, Int.\tilde{G}_L) \dashrightarrow H^2(K, Z(\tilde{G}_L))$$

dans la suite exacte d'ensemble pointés

$$H^1(K, \tilde{G}_L) \longrightarrow H^1(K, Int.\tilde{G}_L) \dashrightarrow H^2(K, Z(\tilde{G}_L)) \longrightarrow 1$$

Comparant avec la suite exacte :

$$H^1(K, \tilde{G}_L) \longrightarrow H^1(K, Int.\tilde{G}_L) \dashrightarrow H^2(K, \tilde{G}_L)' \longrightarrow 1$$

de la proposition 3.2.6(iii)-Chap.IV de [5], on en déduit que $H^2(K, \tilde{G}_L) = H^2(K, \tilde{G}_L)'$, i.e que toute classe de $H^2(K, \tilde{G}_L)$ est neutre.

Plus rapidement, on peut dire que la classe 0 de $H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L))$, pour $v \in \Omega_X$, est en relation avec toute classe de $H^2(K_v, \tilde{G}_L) = H^2(K_v, \tilde{G}_L)'$ (cf par ex. le corollaire 3.3.7 (i) Chap.IV de [5]). D'où la classe $(0, 0, \dots)$ de $\bigoplus_v H^2(K_v, Z(\tilde{G}_L))$ est en relation avec toute classe de $\bigoplus_v H^2(K_v, \tilde{G}_L)$. Par le carré de droite du diagramme (\mathbf{D}_2) , la classe 0 de $H^2(K, Z(\tilde{G}_L))$ est donc en relation avec toute classe de $H^2(K, \tilde{G}_L)$, i.e toute K -gerbe à lien représentable par \tilde{G}_L admet une section, i.e toutes les classes de $H^2(K, \tilde{G}_L)$ sont neutres. \square

Corollaire 2.2. *Toutes les classes de*

$$H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)' = H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)$$

sont envoyées sur la classe unité $[Tors \tilde{G}_L]$ de $H^2(K, \tilde{G}_L)$ par l'application $H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) \rightarrow H^2(K, \tilde{G}_L)$.

• L'application $H_{et}^2(X, \tilde{G}_L) \rightarrow H^2(K, \tilde{G}_L)$ est compatible avec les actions de $H_{et}^2(X, Z(\tilde{G}_L))$ (resp. $H^2(K, Z(\tilde{G}_L))$) sur $H_{et}^2(X, \tilde{G}_L)$ (resp. $H^2(K, \tilde{G}_L)$). Supposons, pour simplifier, que $Z(\tilde{G}_L) = \mu_n$, $n \geq 0$. L'homomorphisme $H_{et}^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(K, \mu_n)$ se factorise par $Br(X)_n$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 Pic(X) & \xrightarrow{\times n} & Pic(X) & \longrightarrow & H_{et}^2(X, \mu_n) & \longrightarrow & H_{et}^2(K, \mu_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_X} H^2(K_v, \mu_n) \\
 & & & & \downarrow & \nearrow & \parallel & & \\
 & & & & Br(X)_n = 0 & \longrightarrow & Br(K)_n & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Il est donc nul : dans le cas où $Z(\tilde{G}_L) = \mu_n$, toutes les classes de $H_{\text{ét}}^2(X, \tilde{G}_L) = H^2(X, \tilde{G}_L)'$ sont envoyées sur la classe unité de $H^2(K, \tilde{G}_L)$. On se ramène ensuite au cas où $Z(\tilde{G}_L) = \mu_n$.

Corollaire 2.3. *Supposons que A et K sont comme dans le théorème 2.1. Si L est un K -lien localement (pour la topologie étale) représentable par un K -groupe semi-simple, toutes les classes de $H^2(K, L)$ sont neutres.*

En effet, L est représentable par un K -groupe semi-simple G_L . Soit \tilde{G}_L un revêtement universel de G_L :

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \tilde{G}_L \rightarrow G_L \rightarrow 1.$$

Comme K est de dimension cohomologique 2, l'application

$$H^2(K, \tilde{G}_L) \rightarrow H^2(K, G_L)$$

est surjective. Toutes les classes de $H^2(K, G_L)$ sont donc neutres. c.q.f.d.

Le corollaire 2.3 précédent redonne en particulier la proposition 5.3 de [2] pour les corps de type (II).

Bibliographie

- [1] J.L. COLLIOT-THÉLÈNE, M. OJANGUREN AND R. PARIMALA, *Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional Henselian rings and Brauer groups of related schemes*. In Algebra, Arithmetic and Geometry, I, II (Mumbai, 2000), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. **16** (2002), 185–217. MR 1940669.
- [2] J.L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. GILLE AND R. PARIMALA, *Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields*. Duke Math. J. **121** (2004), 285–341.
- [3] J.C. DOUAI, *2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples*. Thèse d'Etat, Université de Lille 1, Lille, France, 1976.
- [4] J.C. DOUAI, *Sur la 2-cohomologie galoisienne de la composante résiduellement neutre des groupes réductifs connexes définis sur les corps locaux*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **342** (2006), 813–818.
- [5] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*. Grundlehren Math. Wiss. vol. **179**, Springer-Verlag, 1971.
- [6] J.S. MILNE, *Etale cohomology*. Princeton Mathematical Series, vol. **33**, Princeton University Press, Princeton, 1980.
- [7] S.G.A.D., *Séminaire de géométrie algébrique 1963-1964*. Lecture Notes in Math., 151–153, Springer, 1970.

Jean-Claude DOUAI
 Laboratoire Painlevé
 U.M.R 8524
 Université des sciences et technologies de Lille 1
 59655 Villeneuve d'ascq cedex France
 E-mail: douai@math.univ-lille1.fr