Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jean GILLIBERT

**Invariants de classes : propriétés fonctorielles et applications à l'étude du noyau**

Tome 19, n° 2 (2007), p. 415-432.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2007__19_2_415_0>

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **19** (2007), 415-432

# Invariants de classes : propriétés fonctorielles et applications à l'étude du noyau

par Jean GILLIBERT

Résumé. L'homomorphisme de classes mesure la structure galoisienne de torseurs – sous un schéma en groupes fini et plat – obtenus grâce au cobord d'une suite exacte. Son introduction est due à Martin Taylor (la suite exacte étant une isogénie entre schémas abéliens). Nous commençons par énoncer quelques propriétés générales de cet homomorphisme, puis nous poursuivons son étude dans le cas où la suite exacte est donnée par la multiplication par $n$ sur une extension d'un schéma abélien par un tore.

Abstract. The class-invariant homomorphism measures the Galois module structure of torsors — under a finite flat group scheme — which lie in the image of a coboundary map associated to an exact sequence. It has been introduced first by Martin Taylor (the exact sequence being given by an isogeny between abelian schemes). We begin by giving general properties of this homomorphism, then we pursue its study in the case when the exact sequence is given by the multiplication by $n$ on an extension of an abelian scheme by a torus.

## 1. Introduction

Soit $F/K$ une extension galoisienne de corps de nombres, et soit $\Gamma$ son groupe de Galois. L'action de $\Gamma$ sur $F$ donne naissance à une structure de $K[\Gamma]$-module sur $F$. Le théorème de la base normale affirme que $F$ est libre de rang 1 en tant $K[\Gamma]$-module.

Soit à présent $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_F$) l'anneau des entiers de $K$ (resp. $F$). On constate que $\Gamma$ agit encore sur $\mathcal{O}_F$, ce qui munit ce dernier d'une structure de $\mathcal{O}_K[\Gamma]$-module. L'étude de cette structure a été initiée par D. Hilbert dans son *Zahlbericht* [16].

Le critère de Noether affirme que $\mathcal{O}_F$ est un $\mathcal{O}_K[\Gamma]$-module projectif (de type fini) si et seulement si l'extension $F/K$ est modérément ramifiée. Dans ce cas, on peut étudier la classe de $\mathcal{O}_F$ dans le groupe des classes localement libres $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K[\Gamma])$ (ce dernier, que l'on note également $\tilde{\mathrm{K}}_0(\mathcal{O}_K[\Gamma])$, est par

Manuscrit reçu le 20 juillet 2006.

définition le noyau du morphisme $\mathrm{K}_0(\mathcal{O}_K[\Gamma]) \to \mathbb{Z}$ qui à la classe d'un module associe son rang local). La conjecture de Fröhlich, montrée par Taylor [20], est le point culminant de cette théorie.

Par contre, lorsque l'extension est sauvagement ramifiée, la situation est moins claire (voir [7, Appendix, C]). Une approche alternative au problème initial consiste à remplacer $\mathcal{O}_K[\Gamma]$ par une certaine algèbre de Hopf.

On suppose à présent que $\Gamma$ est commutatif. Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de $K$-algèbres galoisiennes de groupe $\Gamma$ forme un groupe, qui n'est autre que le groupe de cohomologie (galoisienne, étale ou fppf, selon les préférences du lecteur) $H^1(K, \Gamma)$.

Soit $\mathcal{H}$ un $\mathcal{O}_K$-ordre de Hopf dans $K[\Gamma]$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ est une $\mathcal{O}_K$-algèbre de Hopf, projective de type fini en tant que $\mathcal{O}_K$-module, telle que $\mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \simeq K[\Gamma]$. Comme précédemment, l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathcal{H}$-extensions galoisiennes forme un groupe, qui s'identifie au groupe de cohomologie fppf $H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K), \mathrm{Spec}(\mathcal{H}^*))$, où $\mathcal{H}^*$ est l'algèbre de Hopf duale de $\mathcal{H}$. En outre, la flèche naturelle de restriction à la fibre générique

$$\mathrm{res}_K : H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K), \mathrm{Spec}(\mathcal{H}^*)) \longrightarrow H^1(K, \Gamma)$$

est injective. Ainsi, si l'on choisit $\mathcal{H}$ de telle sorte que la classe de $F$ soit dans l'image de $\mathrm{res}_K$, on obtient un unique $\mathcal{O}_K$-ordre $\mathcal{N}$ dans $F$ qui est muni d'une structure de $\mathcal{H}$-extension galoisienne. En particulier, $\mathcal{N}$ est muni d'une action de $\mathcal{H}$. On constate que $\mathcal{N}$ est $\mathcal{H}$-localement libre de rang 1, donc définit une classe $(\mathcal{N})$ dans le groupe $\mathrm{Cl}(\mathcal{H})$. On montre alors que l'application

$$\begin{aligned} \pi_0 : H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K), \mathrm{Spec}(\mathcal{H}^*)) &\longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{H}) \\ \mathcal{N} &\longmapsto (\mathcal{N})(\mathcal{H}^*)^{-1} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. On dit que $\mathcal{N}$ admet une base normale si $\pi_0(\mathcal{N}) = 0$, ce qui revient à dire que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{H}^*$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{H}$-modules.

**1.1. Structure galoisienne des torseurs.** Soit $S$ un schéma nœthérien, et soit $G$ un $S$-schéma en groupes commutatif, fini et plat. Nous noterons $G^D$ le dual de Cartier de $G$.

Waterhouse a défini dans [22, Theorem 5] un morphisme de groupes

$$\pi : H^1(S, G) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)$$

qui généralise l'homomorphisme $\pi_0$ défini ci-dessus, le groupe de classes $\mathrm{Cl}(\mathcal{H})$ pouvant être identifié au groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\mathcal{H}))$ (ceci est dû au fait que la dimension de Krull de $\mathcal{O}_K$, donc de $\mathcal{H}$, est égale à 1, voir [4, Cor. 3.5]). Nous dirons que $\pi$ mesure la structure galoisienne des $G$-torseurs. Ainsi un $G$-torseur a une structure galoisienne triviale, ou, de façon équivalente, admet une base normale, si son image par $\pi$ est nulle.

Une façon conceptuelle de définir $\pi$ est la suivante. On déduit de la suite spectrale « locale-globale » pour les Ext [14, exposé V, proposition 6.3, 3)] la suite exacte

$$0 \to H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \to \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})(S) \to \cdots$$

où $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ désigne le groupe multiplicatif sur $S$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est représentable par $G$, et le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est nul d'après [15, exposé VIII, 3.3.1]. Par suite, on dispose d'un isomorphisme

$$H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}). \tag{1.1}$$

On définit alors $\pi$ comme étant égal au composé de cet isomorphisme avec le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(G^D)$.

**1.2. Problème central.** Considérons une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_2 \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

où $F_1$ et $F_2$ sont deux faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur $S$, tels que le faisceau noyau $N(f)$ soit représenté par un $S$-schéma en groupes fini et plat. Grâce au foncteur des sections globales, on en déduit un morphisme cobord

$$\delta : F_2(S) \longrightarrow H^1(S, N(f))$$

et l'on souhaite étudier la structure galoisienne des torseurs ainsi obtenus.

Plus formellement, on définit un homomorphisme $\psi_f$ comme étant obtenu par composition du cobord $\delta$ et de l'homomorphisme $\pi$

$$\psi_f : F_2(S) \xrightarrow{\delta} H^1(S, N(f)) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(N(f)^D).$$

On dit, pour reprendre l'appellation usuelle, que $\psi_f$ est l'homomorphisme de classes associé à la suite exacte (1.2).

**1.3. Présentation des résultats.** Dans la section 2 de cet article, nous énonçons quelques propriétés fonctorielles (comportement par changement de base, par produit, etc.) de $\pi$ et de $\psi_f$. Ces propriétés, bien qu'élémentaires, ne semblent pas être apparues pour l'instant dans la littérature, c'est pourquoi nous les avons incluses ici.

Ces préliminaires nous permettent, dans la section 3, d'étudier le noyau de l'homomorphisme de classes associé à la suite exacte de Kummer (multiplication par un entier $n > 0$) dans une extension d'un schéma abélien par un tore.

Les notations introduites ici seront en vigueur tout au long de cet article.

Nous fixons, comme précédemment, un schéma nœthérien $S$. Nous notons $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe multiplicatif sur $S$. De plus, pour tout entier naturel $n$, nous notons $\mu_n$ le schéma en groupes des racines $n$-ièmes de l'unité sur $S$.

Dans toute la suite, nous adoptons la convention suivante : un revêtement est un morphisme fini localement libre de rang constant. Si $S' \to S$ est un revêtement, nous noterons $[S' : S]$ son rang.

Par définition, un $S$-tore est un $S$-schéma en groupes qui est localement isomorphe, pour la topologie étale sur $S$, à une puissance de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. On dit qu'un tore est déployé s'il est isomorphe à une puissance de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$.

Si $X$ est une extension d'un $S$-schéma abélien par un $S$-tore, alors pour tout entier $n > 0$ la multiplication par $n$ dans $X$ est un épimorphisme fppf, et son noyau est un $S$-schéma en groupes fini et plat. Nous noterons $\psi_n^X$ l'homomorphisme de classes associé.

Nous commençons par étudier l'homomorphisme de classes associé à un $S$-tore. Nous montrons dans le paragraphe 3.1 le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Soit $T$ un $S$-tore.*

(*i*) *Si $T$ est déployé, alors $\psi_n^T$ est nul pour tout entier $n$.*

(*ii*) *Supposons que $S$ soit connexe normal, et soit $S' \to S$ un revêtement (étale) sur lequel $T$ se déploye. Alors $\psi_n^T$ est nul pour tout entier $n$ premier à $[S' : S]$.*

Clarifions la situation considérée dans (*ii*) : si $S$ est normal, alors $T$ est isotrivial d'après [13, exposé X, théorème 5.16], c'est-à-dire qu'il existe un morphisme étale fini $S' \to S$ qui déploye $T$. Si en outre $S$ est connexe, alors $S' \to S$ est de rang constant, et par conséquent est un revêtement dans notre terminologie.

**Remarque.** Dans le paragraphe 3.2, nous expliquons comment construire des suites exactes de la forme (1.2) où $F_1$ et $F_2$ sont des tores, et telles que $\psi_f$ ne soit pas nul. L'hypothèse sur $n$ dans le cas (*ii*) ci-dessus semble donc être nécessaire.

Puis nous étudions l'homomorphisme de classes associé à un $S$-schéma abélien. On sait que, si $E$ est une $S$-courbe elliptique et si $n$ est premier à 6, alors $\psi_n^E$ s'annule sur les points de torsion. Ce résultat, conjecturé par Taylor dans [21], a été montré en premier par Taylor et Srivastav dans [19], puis généralisé par Agboola dans [2], et enfin par Pappas dans [18]. Pour une interprétation arithmétique (resp. géométrique) de ce problème, on pourra consulter [6] (resp. [1]). Dans le paragraphe 3.3, nous étendons ce résultat de la façon suivante.

**Théorème 1.2.** *Soit $A$ un $S$-schéma abélien. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(*i*) *Il existe une isogénie $\nu : A \to C$ de degré $N$, telle que $C$ soit un produit de $S$-courbes elliptiques.*

(*ii*) *Il existe un revêtement $S' \to S$ de rang $N$ tel que $A_{S'}$ soit isomorphe à un produit de $S'$-courbes elliptiques.*

*Alors les points de torsion de $A(S)$ sont dans le noyau de $\psi_n^A$ pour tout entier $n$ premier à $6N$.*

**Remarque.** Signalons ici que, dans le cas de figure $(ii)$, la conclusion du théorème n'est plus vraie si l'on supprime l'hypothèse que $n$ est premier à $6N$. Plus précisément, on exhibe dans [10, exemple 4.10] un schéma abélien $A$ de dimension 5, muni d'un point de 5-torsion qui n'appartient pas au noyau de $\psi_5^A$. De plus, $A$ est obtenu comme restriction de Weil d'une courbe elliptique, et en tant que tel devient isomorphe à un produit de courbes elliptiques après changement de base par un revêtement de rang 5.

Enfin, dans le paragraphe 3.4, nous considérons une extension d'un $S$-schéma abélien par le groupe multiplicatif.

**Théorème 1.3.** *Soient $A$ un $S$-schéma abélien, et $V$ une extension de $A$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, dont nous noterons $f : V \to A$ la projection naturelle. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

$(i)$ *L'entier $n$ est premier à $|\operatorname{Pic}(S)|$ et $V[n]^D(S)$ est de cardinal égal à son ordre.*

$(ii)$ *La classe de $V$ dans le groupe $\operatorname{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est un élément d'ordre fini premier à $n$.*

*Alors $f^{-1}(\ker(\psi_n^A)) = \ker(\psi_n^V)$.*

La deuxième assertion de ce théorème se révèle particulièrement utile pour construire de nouveaux exemples d'annulation de l'homomorphisme de classes à partir d'une courbe elliptique, comme nous le montrons dans l'exemple qui suit.

**Exemple.** Soit $E$ une $S$-courbe elliptique, et soit $t \in E(S)$ un point de torsion d'ordre $N$. Alors $t$ détermine, en vertu de l'isomorphisme d'autodualité $E(S) \simeq \operatorname{Ext}^1(E, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, une extension $V_t$ de $E$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, dont nous noterons $f_t : V_t \to E$ la projection naturelle. Soit $n$ un entier premier à $6N$, on considère l'homomorphisme de classes

$$\psi_n : V_t(S) \longrightarrow \operatorname{Pic}(V_t[n]^D).$$

En combinant le théorème 3.3 et le $(ii)$ du théorème 1.3, on obtient le résultat suivant :

$$f_t^{-1}(E(S)_{\mathrm{Tors}}) \subseteq \ker(\psi_n).$$

Le cas le plus intéressant est quand on part d'un point de torsion $x \in E(S)$ d'ordre premier à $N$. Alors l'image réciproque de $x$ par $f_t$ est non vide (plus exactement est en bijection avec $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$), et fournit une nouvelle famille de torseurs dont la structure galoisienne est triviale.

## 2. Propriétés fonctorielles

Dans toute cette section, $G$ désigne un $S$-schéma en groupes commutatif, fini et plat, et $G^D$ désigne son dual de Cartier. Nous noterons $\mathrm{ord}(G)$ l'ordre de $G$, c'est-à-dire le rang du morphisme fini localement libre $G \to S$.

**2.1. Comportement par changement de base.** Soit $h : S' \to S$ un revêtement de rang $[S' : S]$. Si $H'$ est un $S'$-schéma en groupes affine, le faisceau $h_*H'$ est représentable par un $S$-schéma en groupes également affine, que l'on appelle la restriction de Weil de $H'$, et que l'on note $\Re_{S'/S}(H')$. Pour les détails, voir [5, §7.6].

Soit à présent $H$ un $S$-schéma en groupes affine commutatif. Soit

$$N_{S'/S} : \Re_{S'/S}(H_{S'}) \to H$$

le morphisme « trace » [14, exposé XVII, 6.3.13]. Rappelons que la composée

$$H \longrightarrow \Re_{S'/S}(H_{S'}) \xrightarrow{N_{S'/S}} H$$

est la multiplication par $[S' : S]$ dans le groupe $H$ [14, exposé XVII, 6.3.15]. Supposons que $H$ soit lisse sur $S$, on dispose alors d'un isomorphisme

$$H^1(S, \Re_{S'/S}(H_{S'})) \simeq H^1(S', H_{S'}). \tag{2.1}$$

En effet, les groupes $H_{S'}$ et $\Re_{S'/S}(H_{S'})$ étant lisses, les deux $H^1$ sont les mêmes pour la topologie étale ou la topologie fppf. On se sert alors du fait que $R^1h_*(H_{S'}) = 0$ en topologie étale, le morphisme $h$ étant fini (voir [14, exposé VIII, 5.5 et 5.3]).

Dans le cas où $H = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, le morphisme « trace » $\Re_{S'/S}(\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ donne ainsi naissance à un morphisme

$$\mathbf{N}_{S'/S} : \mathrm{Pic}(S') \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$$

que nous appellerons morphisme « norme ». Par abus de notation, pour tout $S$-schéma $X$ nous désignerons également par $\mathbf{N}_{S'/S} : \mathrm{Pic}(X_{S'}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ le morphisme norme associé au revêtement $X_{S'} \to X$. Pour une autre définition du morphisme norme, on pourra consulter [12, §6.5].

Par fonctorialité du morphisme $\pi$, on constate la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(S', G_{S'}) \arrow[r, "\pi'"] & \mathrm{Pic}(G^D_{S'}) \\ H^1(S, G) \arrow[u] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Pic}(G^D) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

où les flèches verticales sont obtenues par changement de base.

Signalons le résultat suivant, dont nous ne nous servirons pas dans la suite, mais qui présente un intérêt en lui-même.

**Lemme 2.1.** *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de $G$. Alors la flèche de changement de base*

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

*est injective. En d'autres termes, aucun $G$-torseur n'est trivialisé par un revêtement de rang premier à l'ordre de $G$.*

*Démonstration.* Nous avons une suite spectrale

$$H^p(S, R^q h_*(G_{S'})) \Longrightarrow H^{p+q}(S', G_{S'})$$

dont on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(S, \Re_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S', G_{S'}) \longrightarrow H^0(S, R^1 h_*(G_{S'})).$$

D'autre part, nous avons une flèche $H^1(S, G) \to H^1(S, \Re_{S'/S}(G_{S'}))$ induite par l'application canonique $G \to \Re_{S'/S}(G_{S'})$. Cette flèche est injective. En effet, la composée

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S, \Re_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S, G)$$

est égale à la multiplication par $[S' : S]$ dans $H^1(S, G)$, laquelle est un automorphisme de $H^1(S, G)$, puisque $[S' : S]$ est premier à l'ordre de $G$.

Au final, le morphisme de changement de base $H^1(S, G) \to H^1(S', G_{S'})$, qui s'écrit comme la composée des flèches

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S, \Re_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

est injectif. Ce qu'on voulait. □

**Proposition 2.2.** *Soient $Z \in H^1(S, G)$ un $G$-torseur, et $Z_{S'} \in H^1(S', G_{S'})$ le torseur obtenu par changement de base.*

(*i*) *La relation $\pi'(Z_{S'}) = 0$ implique $\pi(Z)^{[S':S]} = 0$.*

(*ii*) *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de $G$. Alors $\pi(Z)$ est nul si et seulement si $\pi'(Z_{S'})$ l'est.*

*Démonstration.* (*i*) Considérons le morphisme « norme »

$$\mathbf{N}_{S'/S} : \mathrm{Pic}(G^D_{S'}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)$$

et rappelons que, pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(G^D)$, nous avons $\mathbf{N}_{S'/S}(\mathcal{L}_{S'}) = \mathcal{L}^{[S':S]}$. Supposons à présent que $Z$ satisfasse $\pi'(Z_{S'}) = 0$. Alors, par commutativité du diagramme (2.2), nous avons $\pi(Z)_{S'} = 0$. Par suite, $\mathbf{N}_{S'/S}(\pi(Z)_{S'}) = \pi(Z)^{[S':S]} = 0$, ce qu'on voulait.

(*ii*) La condition est nécessaire par commutativité du diagramme (2.2). Etablissons à présent la suffisance. Le groupe $H^1(S, G)$ étant tué par l'entier $\mathrm{ord}(G)$, nous avons $\pi(Z)^{\mathrm{ord}(G)} = 0$. De plus, on sait que $\pi(Z)^{[S':S]} = 0$ d'après le point (*i*). Les entiers $[S' : S]$ et $\mathrm{ord}(G)$ étant premiers entre eux, il en résulte que $\pi(Z) = 0$, ce qu'on voulait. □

Soit à présent une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_2 \longrightarrow 0$$

dans laquelle $F_1$ et $F_2$ sont des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur $S$. Comme convenu dans le paragraphe 1.2, nous notons $\psi_f : F_2(S) \to \mathrm{Pic}(G^D)$ l'homomorphisme de classes associé à cette suite.

D'autre part, le foncteur $h^*$ est exact (considéré en tant que foncteur de la catégorie des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur $S$ dans la catégorie analogue sur $S'$). On déduit donc de la suite précédente une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_{S'} \longrightarrow h^*F_1 \xrightarrow{h^*f} h^*F_2 \longrightarrow 0$$

et l'on note $\psi_{h^*f} : F_2(S') \to \mathrm{Pic}(G^D_{S'})$ l'homomorphisme associé à cette suite.

**Proposition 2.3.** *Soit $x \in F_2(S)$, et soit $x' \in F_2(S')$ la $S'$-section associée.*

(*i*) *La relation $\psi_{h^*f}(x') = 0$ implique $\psi_f(x)^{[S':S]} = 0$.*

(*ii*) *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de $G$. Alors $\psi_f(x)$ est nul si et seulement si $\psi_{h^*f}(x')$ l'est.*

*Démonstration.* Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_2(S') & \xrightarrow{\delta'} & H^1(S', G_{S'}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F_2(S) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, G) \end{array}$$

où $\delta$ (resp. $\delta'$) désigne le cobord associé à la suite exacte de départ (resp. à la suite exacte obtenue par changement de base), et où les flèches verticales sont obtenues par changement de base. La proposition 2.2 permet d'en déduire le résultat. □

**2.2. Comportement fonctoriel.** Considérons un diagramme commutatif à lignes exactes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N(f) & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle\nu_1}\downarrow & & {\scriptstyle\nu_2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N(g) & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow{g} & H_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $F_1$, $F_2$, $H_1$ et $H_2$ sont des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur $S$. Alors la flèche $\nu_1$ induit une flèche $\nu_0 : N(f) \to N(g)$. Supposons que $N(f)$ et $N(g)$ soient représentés par des schémas en groupes finis et plats sur $S$. On peut alors énoncer la proposition suivante.

**Proposition 2.4.** *Soit $\nu_0^D : N(g)^D \to N(f)^D$ la flèche déduite de $\nu_0$ par dualité de Cartier. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F_2(S) & \xrightarrow{\psi_f} & \mathrm{Pic}(N(f)^D) \\ {\scriptstyle \nu_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0^D)^*} \\ H_2(S) & \xrightarrow{\psi_g} & \mathrm{Pic}(N(g)^D) \end{array}$$

*est commutatif.*

*Démonstration.* Tout d'abord, le diagramme suivant (obtenu par passage à la cohomologie dans les deux suites exactes de départ)

$$\begin{array}{cccccccc} \longrightarrow & F_1(S) & \xrightarrow{f} & F_2(S) & \xrightarrow{\delta_f} & H^1(S, N(f)) & \longrightarrow & \cdots \\ & {\scriptstyle \nu_1}\downarrow & & {\scriptstyle \nu_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0)_*} & & \\ \longrightarrow & H_1(S) & \xrightarrow{g} & H_2(S) & \xrightarrow{\delta_g} & H^1(S, N(g)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

est commutatif. De plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^1(S, N(f)) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(N(f)^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \xrightarrow{\pi_f} & \mathrm{Pic}(N(f)^D) \\ \downarrow{\scriptstyle (\nu_0)_*} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0^D)^*} \\ H^1(S, N(g)) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(N(g)^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \xrightarrow{\pi_g} & \mathrm{Pic}(N(g)^D) \end{array}$$

est également commutatif. D'où le résultat. □

**Proposition 2.5.** *Supposons que $\nu_0 : N(f) \to N(g)$ soit un isomorphisme. Alors*

$$\ker(\psi_f) = \nu_2^{-1}(\ker(\psi_g)).$$

*Démonstration.* Soit $x \in F_2(S)$. Nous allons montrer que $\psi_g(\nu_2(x))$ est nul si et seulement si $\psi_f(x)$ l'est. D'après la proposition 2.4, la condition $\psi_g(\nu_2(x)) = 0$ équivaut à la condition $\nu_0^*(\psi_f(x)) = 0$. Le morphisme $\nu_0$ étant un isomorphisme, on en déduit que $\nu_0^*$ en est également un, donc la condition précédente se récrit $\psi_f(x) = 0$, ce qu'on voulait. □

**2.3. Comportement par produit.** Considérons deux suites exactes

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_2 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N(g) \longrightarrow H_1 \xrightarrow{g} H_2 \longrightarrow 0$$

où $F_1$, $F_2$, $H_1$ et $H_2$ sont des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur $S$. On suppose que $N(f)$ et $N(g)$ sont représentés par des schémas en groupes finis et plats sur $S$.

Soit $\psi_f$ (resp. $\psi_g$) l'homomorphisme associé à la première (resp. deuxième) suite, et soit $\psi_{f\times g}$ l'homomorphisme associé à la suite produit

$$0 \longrightarrow N(f)\times_S N(g) \longrightarrow F_1\times_S H_1 \xrightarrow{f\times g} F_2\times_S H_2 \longrightarrow 0.$$

Nous avons alors la propriété suivante :

**Proposition 2.6.** *Avec les notations précédentes, on a l'égalité*

$$\ker\psi_{f\times g} = \ker\psi_f \times \ker\psi_g.$$

*Démonstration.* Considérons le diagramme (commutatif) suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(S,N(f))\times H^1(S,N(g)) & \xrightarrow{\pi_f\times\pi_g} & \mathrm{Pic}(N(f)^D)\times\mathrm{Pic}(N(g)^D) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^1(S,N(f)\times_S N(g)) & \xrightarrow{\pi_{f\times g}} & \mathrm{Pic}(N(f)^D\times_S N(g)^D) \end{array}$$

dans lequel la flèche de gauche est un isomorphisme, que l'on obtient en composant les isomorphismes qui suivent

$$\begin{aligned} H^1(S,N(f))\times H^1(S,N(g)) &\simeq \mathrm{Ext}^1(N(f)^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})\times\mathrm{Ext}^1(N(g)^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^1(N(f)^D\times_S N(g)^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \\ &\simeq H^1(S,N(f)\times_S N(g)). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que, sous cet isomorphisme, $\ker\pi_f\times\ker\pi_g$ s'identifie à $\ker\pi_{f\times g}$. L'inclusion $\ker\pi_f\times\ker\pi_g\subseteq\ker\pi_{f\times g}$ est immédiate au vu du diagramme qui précède. D'autre part, la flèche de droite dans le susdit diagramme se décrit explicitement de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(N(f)^D)\times\mathrm{Pic}(N(g)^D) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(N(f)^D\times_S N(g)^D) \\ (\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) &\longmapsto pr_1^*(\mathcal{L}_1)+pr_2^*(\mathcal{L}_2) \end{aligned}$$

où $pr_1$ et $pr_2$ sont les projections canoniques du produit $N(f)^D\times_S N(g)^D$ sur ses deux facteurs. Mais $N(f)^D$ et $N(g)^D$ sont des $S$-schémas en groupes ; grâce à leurs sections neutres on obtient respectivement des sections $s_1$ et $s_2$ de $pr_1$ et $pr_2$. Il est alors clair que l'application $(s_1^*,s_2^*)$ constitue une section du morphisme ci-dessus, lequel est donc injectif. On en déduit aisément l'inclusion $\ker\pi_{f\times g}\subseteq\ker\pi_f\times\ker\pi_g$, d'où le résultat. $\square$

**2.4. Comportement sur certaines suites exactes.** Si $G$ est un $S$-schéma en groupes fini et plat, nous notons $\mathrm{RPic}(G^D)$ l'image de l'homomorphisme de Waterhouse ; on dispose d'une suite exacte

$$0\to\mathrm{Ext}^1_P(G^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow H^1(S,G) \xrightarrow{\pi} \mathrm{RPic}(G^D)\to 0 \tag{2.3}$$

où $\mathrm{Ext}^1_P(G^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est le groupe des extensions de $G^D$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ dans la catégorie des préfaisceaux sur $S$. On appelle usuellement $\mathrm{RPic}(G^D)$ le groupe des classes réalisables. Nous renvoyons à Agboola [3] pour de plus amples détails sur cette suite exacte.

On considère à présent une suite exacte de $S$-schémas en groupes fini et plats pour la topologie fppf sur $S$

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

et l'on note respectivement $\pi_0$, $\pi_1$ et $\pi_2$ les homomorphismes de Waterhouse associés aux groupes $G_0$, $G_1$ et $G_2$.

**Lemme 2.7.** *Supposons que la suite (obtenue à partir de (2.4) par dualité de Cartier)*

$$0 \longrightarrow G_2^D \longrightarrow G_1^D \longrightarrow G_0^D \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

*soit une suite exacte dans la catégorie des préfaisceaux sur $S$. Alors on dispose d'une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{RPic}(G_0^D) \longrightarrow \mathrm{RPic}(G_1^D) \longrightarrow \mathrm{RPic}(G_2^D)$$

*dans la catégorie des groupes abéliens*

*Démonstration.* La suite (2.3) est fonctorielle en $G$, de sorte que nous pouvons déduire de la suite exacte (2.4) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}(G_2^D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\sim} & G_2(S) & \longrightarrow & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_P(G_0^D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \longrightarrow & H^1(S, G_0) & \xrightarrow{\pi_0} & \mathrm{RPic}(G_0^D) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_P(G_1^D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \longrightarrow & H^1(S, G_1) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathrm{RPic}(G_1^D) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_P(G_2^D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \longrightarrow & H^1(S, G_2) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathrm{RPic}(G_2^D) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

dans lequel les trois dernières lignes sont des suites exactes déduites de (2.3). La colonne du milieu est exacte, par passage à la cohomologie dans la suite (2.4). De plus, l'exactitude de la suite (2.5) dans la catégorie des préfaisceaux implique l'exactitude de la colonne de gauche.

Nous modifions à présent ce diagramme en supprimant la première ligne et en remplaçant respectivement dans la deuxième ligne les deux premiers termes par les conoyaux des flèches $\mathrm{Hom}(G_2^D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \mathrm{Ext}^1_P(G_0^D, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ et $G_2(S) \to H^1(S, G_0)$. Dans le diagramme ainsi obtenu, les lignes, ainsi que les deux premières colonnes, sont exactes. D'après le lemme des neuf appliqué à ce nouveau diagramme, la troisième colonne, qui n'a pas été altérée par les modifications effectuées, est une suite exacte. Ce qu'on voulait. $\square$

**Remarque.** Si les facteurs de composition des fibres de $G$ au-dessus des points de $S$ de caractéristique résiduelle 2 ne contiennent pas de facteur $\alpha_2$, alors d'après [3, Theorem 1.2] nous avons

$$\mathrm{RPic}(G^D) = \mathrm{Hom}(G^D, H^1(-, \mathbf{G}_\mathrm{m})),$$

égalité dans laquelle $H^1(-, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ est considéré en tant que foncteur en groupes abéliens, ou préfaisceau. Si l'on suppose que $G_0$, $G_1$ et $G_2$ satisfont aux susdites hypothèses, alors notre lemme découle de ce résultat en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(-, H^1(-, \mathbf{G}_\mathrm{m}))$ à la suite exacte (2.5) dans la catégorie des préfaisceaux.

D'autre part, le préfaisceau $H^1(-, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ n'est pas un faisceau pour la topologie fppf. Il n'y a donc aucune raison pour que RPic soit exact à gauche en général.

## 3. Applications à l'étude du noyau

**3.1. Tores : groupe multiplicatif et conséquences.** Soit $n > 0$ un entier naturel fixé. Nous avons une suite exacte de faisceaux abéliens (pour la topologie fppf sur $S$)

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_\mathrm{m} \longrightarrow 0.$$

Soit $d$ le cobord associé. On obtient, par application du foncteur des sections globales, une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m}(S) \xrightarrow{d} H^1(S, \mu_n) \xrightarrow{s} H^1(S, \mathbf{G}_\mathrm{m})[n] \longrightarrow 0.$$

On montre aisément le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *Soit $\pi$ le morphisme de Waterhouse pour le groupe $\mu_n$. Alors, avec les notations précédentes,* $\mathrm{Im}\, d = \ker \pi$.

*Démonstration.* On peut donner une description explicite de $H^1(S, \mu_n)$ (voir [17, page 125]). Plus précisément, $H^1(S, \mu_n)$ s'identifie à l'ensemble des (classes d'isomorphie de) couples $(\mathcal{L}, \sigma)$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur sur $S$, et $\sigma : \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{O}_S$ est un isomorphisme.

Avec cette description, $d$ est l'application qui à un élément $\alpha \in \mathbf{G}_\mathrm{m}(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ associe le couple $(\mathcal{O}_S, \sigma)$, où $\sigma : \mathcal{O}_S^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$ est la multiplication par $\alpha$. De plus, $s$ est l'application qui au couple $(\mathcal{L}, \sigma)$ associe $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$.

Soit $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ la $\mathcal{O}_S$-algèbre dont le spectre est le $\mu_n$-torseur correspondant au couple $(\mathcal{L}, \sigma)$. En tant que $\mathcal{O}_S$-module, on peut décrire $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ de la façon suivante

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma) = \oplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes k}$$

où l'on a posé $\mathcal{L}^{\otimes 0} = \mathcal{O}_S$ par convention. La loi de multiplication de $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ est induite par le produit tensoriel et par l'application $\sigma$.

Soit à présent $C_n$ un groupe (abstrait) cyclique d'ordre $n$, de générateur $g$ et d'élément neutre $e$. Alors $\mu_n$ est le spectre de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}_S[C_n]$. L'action de $\mu_n$ sur le torseur $(\mathcal{L}, \sigma)$ correspond à une coaction de $\mathcal{O}_S[C_n]$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$, que l'on peut décrire explicitement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \oplus_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}^{\otimes k} &\longrightarrow \mathcal{O}_S[C_n] \otimes_{\mathcal{O}_S} (\oplus_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}^{\otimes k}) \\ (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) &\longmapsto (e \otimes s_0, g \otimes s_1, \ldots, g^{n-1} \otimes s_{n-1}). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{O}_S[C_n]^*$ l'algèbre duale de $\mathcal{O}_S[C_n]$, dont le spectre est le $S$-schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Alors l'action de $\mathcal{O}_S[C_n]^*$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ induite par la coaction qui précède est tout simplement la multiplication composante par composante. En d'autres termes, pour tout $f \in \mathcal{O}_S[C_n]^*$ et pour tout $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$,

$$f \cdot (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = (f(e)s_0, f(g)s_1, \ldots, f(g^{n-1})s_{n-1}).$$

On peut en déduire que le morphisme de Waterhouse

$$\pi : H^1(S, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) \simeq \mathrm{Pic}(S)^n$$

est l'application qui à $(\mathcal{L}, \sigma)$ associe le $n$-uplet $(\mathcal{O}_S, \mathcal{L}, \mathcal{L}^{\otimes 2}, \ldots, \mathcal{L}^{\otimes (n-1)})$ dans le groupe $\mathrm{Pic}(S)^n$. Il est donc clair que $\pi((\mathcal{L}, \sigma)) = 0$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est nul dans $\mathrm{Pic}(S)$, d'où le résultat. $\square$

**Remarque.** Les morphismes $\pi$ et $s$ ayant même noyau (à savoir $\mathrm{Im}\, d$), leurs images $\mathrm{RPic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S)$ et $\mathrm{Pic}(S)[n]$ sont isomorphes.

*Démonstration du théorème 1.1.* (*i*) La proposition 3.1 implique que l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par $n$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ est nul. Le même résultat est donc également valable pour n'importe quelle puissance de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, en vertu de la proposition 2.6. (*ii*) Il suffit de combiner le (*i*) et la proposition 2.3. $\square$

**Remarque.** Supposons que $n$ soit inversible sur $S$, et que $\mathcal{O}_S(S)$ contienne une racine primitive $n$-ième de l'unité. Alors $\mu_n$ est isomorphe, en tant que $S$-schéma en groupes, au schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Ainsi la proposition 6.5 de [11, chap. 0] découle de notre proposition 3.1.

**3.2. Tores : contre-exemples en dimension supérieure.** Nous donnons à présent un procédé de construction de suites exactes de la forme (1.2) où $F_1$ et $F_2$ sont des tores, et telles que $\psi_f$ soit non nul. Ce processus a été adapté au cas des variétés abéliennes dans [10].

Soient $K$ un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de $K$. Dans ce paragraphe, notre schéma de base sera $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

**Proposition 3.2.** *Soit $n > 0$ un entier. Alors il existe un $S$-tore $T$ et une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow T \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

*tels que le cobord qui s'en déduit*

$$\delta : Q(S) \longrightarrow H^1(S, \mu_n)$$

*soit surjectif. Par suite, l'image de l'homomorphisme de classes* $\psi_f$ *correspondant est le groupe* $\mathrm{RPic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) = \mathrm{Pic}(S)[n]$ *tout entier.*

**Remarque.** Ce résultat implique que l'homomorphisme de classes associé à une isogénie entre tores n'est pas nul en général. Il suffit en effet de choisir $K$ et $n$ de telle manière que $n$ divise l'ordre de $\mathrm{Pic}(S)$.

*Démonstration.* Soit $K'$ une extension finie de $K$, non ramifiée en toutes les places finies de $K$, et soit $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$ le spectre de l'anneau des entiers de $K'$. On suppose en outre que l'application naturelle induite par le changement de base $h : S' \to S$

$$h_n^* : \mathrm{Pic}(S)[n] \longrightarrow \mathrm{Pic}(S')[n]$$

est nulle. Une telle extension $K'$ existe d'après la théorie du corps de classes (tout idéal de $K$ se principalise dans le corps de classes de Hilbert de $K$, qui est une extension non ramifiée de $K$).

Soit à présent le schéma $T := \Re_{S'/S}(\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'})$. Alors $T$ est un $S$-tore car $T$ est trivialisé par le revêtement étale $S' \to S$. D'autre part, nous avons un morphisme canonique

$$c_1 : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow T$$

qui est une immersion fermée d'après [5, §7.6, p. 197], le groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ étant affine, donc séparé sur $S$. Ainsi, $\mu_n$ est un sous-schéma en groupes de $T$. Soit $Q$ le quotient (pour la topologie fppf) de $T$ par $\mu_n$ ($Q$ est également représentable par un $S$-tore), de sorte que nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow T \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0.$$

Considérons à présent le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r, "{[n]}"] \arrow[d, "c_1"'] & \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r] \arrow[d, "c_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & T \arrow[r, "f"] & Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel l'application $c_2$ est déduite de $c_1$ par passage au quotient. Par passage à la cohomologie, et en se servant du fait que le groupe $H^1(S, \mu_n)$ est tué par $n$, nous obtenons un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(S) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "c_2"'] & H^1(S, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(S, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})[n] \arrow[d] \\
Q(S) \arrow[r, "\delta"] & H^1(S, \mu_n) \arrow[r] & H^1(S, T)[n].
\end{tikzcd}$$

D'autre part, le groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ étant lisse sur $S$, nous avons, grâce à l'isomorphisme (2.1) du paragraphe 2.1, une suite d'identifications

$$H^1(S,T) = H^1(S, \Re_{S'/S}(\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'})) \simeq H^1(S', \mathbf{G}_{\mathrm{m},S'}) = \mathrm{Pic}(S'),$$

de sorte que le diagramme précédent se traduit par le diagramme suivant (à lignes exactes, comme son prédécesseur)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(S) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "c_2"'] & H^1(S,\mu_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(S)[n] \arrow[d, "h_n^*"] \\
Q(S) \arrow[r, "\delta"] & H^1(S,\mu_n) \arrow[r, "q"] & \mathrm{Pic}(S')[n]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche de droite n'est autre que l'application $h_n^*$ déduite du changement de base $S' \to S$. Or, par hypothèse, cette application est nulle. On en déduit aussitôt, par commutativité du carré droit du diagramme, que la flèche $q$ est nulle, donc que le morphisme $\delta$ est surjectif, ce qu'on voulait. $\square$

**3.3. Variétés abéliennes : courbes elliptiques et conséquences.** Nous renvoyons le lecteur à l'article de Pappas [18] pour une démonstration du résultat suivant.

**Théorème 3.3.** *Supposons que $E$ soit une $S$-courbe elliptique et que $n$ soit un entier premier à 6. Alors les points de torsion de $E(S)$ sont dans le noyau de $\psi_n^E$.*

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, le théorème 1.2 est une conséquence immédiate de ce résultat.

*Démonstration du théorème 1.2.* ($i$) Soit $\psi_n^C$ l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par $n$ dans $C$. Sachant que $C$ est un produit de courbes elliptiques et que $n$ est premier à 6, on déduit aisément du théorème 3.3, avec l'aide de la proposition 2.6, que $\psi_n^C$ s'annule sur les points de torsion de $C(S)$, autrement dit $C(S)_{\mathrm{Tors}} \subseteq \ker(\psi_n^C)$. Comme l'image par $\nu$ d'un point de torsion est un point de torsion, on en déduit que

$$\nu(A(S)_{\mathrm{Tors}}) \subseteq \ker(\psi_n^C).$$

D'autre part, $n$ étant premier à $N$, l'homomorphisme $\nu_0 : A[n] \to C[n]$ obtenu par restriction de $\nu$ est un isomorphisme. D'après la proposition 2.5, nous avons donc

$$\ker(\psi_n^A) = \nu^{-1}(\ker(\psi_n^C))$$

ce qui, combiné à l'inclusion précédente, permet de conclure.
($ii$) Il suffit d'appliquer la proposition 2.3, combinée au théorème 3.3. $\square$

**3.4. Extensions de variétés abéliennes par le groupe multiplicatif.** Soient $A$ un $S$-schéma abélien et $n > 0$ un entier naturel. Considérons une extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow V \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

de $A$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Par des arguments standards on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow V[n] \longrightarrow A[n] \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Nous noterons $\psi_n^V$ (resp. $\psi_n^A$) l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par $n$ dans $V$ (resp. $A$). En vertu de la proposition 2.4, nous obtenons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V(S) & \xrightarrow{\psi_n^V} & \mathrm{RPic}(V[n]^D) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ A(S) & \xrightarrow{\psi_n^A} & \mathrm{RPic}(A[n]^D). \end{array} \tag{3.3}$$

Une question naturelle se pose alors : quelles relations peut-on donner entre le noyau de $\psi_n^V$ et celui de $\psi_n^A$ ? Le théorème 1.3 constitue un premier résultat dans cette direction.

**Lemme 3.4.** *On suppose que $V[n]^D(S)$ est de cardinal égal à l'ordre de $V[n]^D$. Alors la suite (déduite de* (3.2) *par dualité de Cartier)*

$$0 \longrightarrow A[n]^D \longrightarrow V[n]^D \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

*est exacte dans la catégorie des préfaisceaux abéliens sur $S$.*

*Démonstration.* Pour montrer cela, il faut montrer que $V[n]^D$ est trivial en tant que $A[n]^D$-torseur sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ est isomorphe (en tant que schéma) à la réunion disjointe de $n$ copies de $S$, $V[n]^D$ est égal à la réunion disjointe de $n$ $A[n]^D$-torseurs sur $S$. De plus, chacun de ces torseurs admet une section sur $S$ (car $V[n]^D$ admet autant de sections sur $S$ que son ordre). Donc chacun de ces torseurs est trivial, d'où le résultat. $\square$

*Démonstration du théorème 1.3.* ($i$) D'après le lemme 3.4, la suite (3.4) est exacte dans la catégorie des préfaisceaux abéliens sur $S$. D'après le lemme 2.7 on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{RPic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) \longrightarrow \mathrm{RPic}(V[n]^D) \longrightarrow \mathrm{RPic}(A[n]^D).$$

Or on sait que le premier terme de cette suite est isomorphe à $\mathrm{Pic}(S)[n]$, donc est nul d'après les hypothèses. Autrement dit, la flèche de droite dans le diagramme (3.3) est injective. Le résultat en découle aisément.

($ii$) Soit $N$ l'ordre de la classe de $V$ dans $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. On sait que la multiplication par $N$ dans le groupe $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est induite par la multiplication par $N$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Donc, si l'on note $NV$ l'extension représentée par la suite du bas,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle [N]}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \big\| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & NV & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

laquelle est obtenue par push-out de la suite du haut, alors la classe de $NV$ est isomorphe à la classe triviale, en particulier $NV \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \times_S A$ en tant que faisceaux. Soit $\psi_n^{NV}$ l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par $n$ dans $NV$. La proposition 2.6 et le théorème 1.1 permettent alors d'en déduire que $\ker(\psi_n^{NV}) = g^{-1}(\ker(\psi_n^A))$.

Nous obtenons d'autre part, en appliquant le lemme du serpent au diagramme précédent, une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_N \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} NV \longrightarrow 0.$$

De plus, les entiers $n$ et $N$ étant premiers entre eux, le morphisme $\phi$ induit un isomorphisme $\phi_0 : V[n] \to NV[n]$. La proposition 2.5 affirme alors que

$$\ker(\psi_n^V) = \phi^{-1}(\ker(\psi_n^{NV}))$$

donc, en vertu de ce qui précède,

$$\ker(\psi_n^V) = \phi^{-1}(g^{-1}(\ker(\psi_n^A))) = f^{-1}(\ker(\psi_n^A))$$

ce qu'on voulait démontrer. □

## Références


[1] A. Agboola, *A geometric description of the class invariant homomorphism*. J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 273–280.

[2] A. Agboola, *Torsion points on elliptic curves and Galois module structure*. Invent. Math. **123** (1996), 105–122.

[3] A. Agboola, *On primitive and realisable classes*. Compositio Math. **126** (2001), 113–122.

[4] H. Bass and M. P. Murthy, *Grothendieck groups and Picard groups of abelian group rings*. Annals of Math. **86** (1967), 16–73.

[5] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[6] P. Cassou-Noguès et M. J. Taylor, *Structures galoisiennes et courbes elliptiques*. J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 307–331.

[7] A. Fröhlich, *Galois module structure of algebraic integers*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 1. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[8] J. Gillibert, *Invariants de classes : le cas semi-stable*. Compositio Math. **141** (2005), 887–901.

[9] J. Gillibert, *Variétés abéliennes et invariants arithmétiques*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 277–297.

[10] J. Gillibert, *Invariants de classes : exemples de non-annulation en dimension supérieure*. Math. Annalen **338** (2007), 475–495.

[11] C. Greither, *Cyclic Galois extensions of commutative rings*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1534. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[12] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique, chapitre II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **8** (1961).

[13] A. GROTHENDIECK et M. DEMAZURE, *Schémas en groupes*. Lecture Notes in Mathematics, vols. 151, 152, 153. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[14] A. GROTHENDIECK, M. ARTIN et J. L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Lecture Notes in Mathematics, vols. 269, 270. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[15] A. GROTHENDIECK, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 288. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[16] D. HILBERT, *Die Theorie der Algebraischen Zalhkörper*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **4** (1897), 175–546.

[17] J. S. MILNE, *Étale Cohomology*. Princeton Math. Ser., vol. 33. Princeton University Press, 1980.

[18] G. PAPPAS, *On torsion line bundles and torsion points on abelian varieties*. Duke Math. J. **91** (1998), 215–224.

[19] A. SRIVASTAV and M. J. TAYLOR, *Elliptic curves with complex multiplication and Galois module structure*. Invent. Math. **99** (1990), 165–184.

[20] M. J. TAYLOR, *On Fröhlich's conjecture for rings of integers of tame extensions*. Invent. Math. **63** (1981), 41–79.

[21] M. J. TAYLOR, *Mordell-Weil groups and the Galois module structure of rings of integers*. Illinois J. Math. **32** (1988), 428–452.

[22] W. C. WATERHOUSE, *Principal homogeneous spaces and group scheme extensions*. Trans. Am. Math. Soc. **153** (1971), 181–189.

Jean GILLIBERT
The University of Manchester
Alan Turing Building
Oxford Road
Manchester M13 9PL, Royaume-Uni
*E-mail*: jean.gillibert@manchester.ac.uk