

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Caroline DESREUMAUX

Construction de formes automorphes réfléchives sur un espace de dimension 4

Tome 18, n° 1 (2006), p. 89-111.

http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2006__18_1_89_0

© Université Bordeaux 1, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Construction de formes automorphes réfectives sur un espace de dimension 4

par CAROLINE DESREUMAUX

RÉSUMÉ. Dans la lignée des travaux de V. Gritsenko et V. Nikulin, par des méthodes reliées aux formes de Jacobi définies relativement au réseau de racines A_2 , on construit six formes automorphes réfectives qui seront associées à des algèbres de Kac–Moody hyperboliques de type de Borchers, pour la signature $(1, 3)$, et, pour quatre d’entre elles, on précisera une identité du type “formule du dénominateur”, déterminant entièrement l’algèbre en question.

ABSTRACT. Following V. Gritsenko and V. Nikulin’s works, using methods related to Jacobi forms for the root lattice A_2 , we can define six automorphic reflectiv forms, that will be associated to hyperbolic Kac Moody algebras of Borchers type, for the signature $(1, 3)$. For four of them a denominator formula will be given. Such a formula enables to describe the algebra totally.

1. Introduction

Les algèbres de Lie de type fini et les algèbres de Lie affines sont bien connues et leurs classifications sont établies. Il reste un troisième type d’algèbres de Lie à étudier : celles dites hyperboliques de type de Borchers.

L’une des étapes de la construction et de la classification de ces algèbres consiste en la construction de certaines formes automorphes qui leur sont associées, dites *réfectives*, c’est à dire dont les diviseurs sont déterminés par des réflexions par rapport à des racines hyperboliques (voir [GN3]). On en rappellera la définition au cours du premier paragraphe. C’est à cette étape que l’on s’intéresse ici, dans le cas précis des algèbres de Kac–Moody hyperboliques de type de Borchers pour la signature $(1, 3)$.

Ces formes automorphes réfectives seront obtenues par relèvement de formes de Jacobi relatives au réseau de racines A_2 , décrites dans le deuxième paragraphe.

Au troisième paragraphe, on exploitera un premier type de relèvement, dit “relèvement exponentiel”, qui est une variante du produit de Borchers ([Bo1], [Bo2]), établie par V. Gritsenko et V. Nikulin ([GN1], [GN2]). Ce relèvement permet, à partir de formes de Jacobi de poids 0, à coefficients

de Fourier entiers, relatives, dans le cas présent, au réseau de racines A_2 , d'obtenir des formes automorphes, définies en l'occurrence sur un espace vectoriel de dimension 4, muni d'une forme quadratique de signature $(1, 3)$. Il est ensuite possible d'étudier les diviseurs de ce relèvement. On obtiendra ainsi 6 formes automorphes réfléchives, associées chacune à une algèbre de Kac–Moody de type de Borchers pour la signature $(1, 3)$.

Dans un dernier paragraphe, on utilisera cette fois un relèvement de type de Maass (voir [GN2], [G]), qui permet, à partir de formes de Jacobi cuspidales, voire dans certains cas holomorphes, d'obtenir aussi des formes automorphes. On obtiendra alors 4 telles formes qui coïncideront avec certaines formes obtenues au paragraphe précédent, ce qui fournira ainsi 4 formules du type “formule du dénominateur”, utiles à la description des algèbres de Kac–Moody de type de Borchers associées.

2. Préliminaires

2.1. Description d'un domaine de type IV construit à partir du réseau A_2 . Décrivons d'abord le réseau de racines A_2 et les propriétés qui nous seront nécessaires.

Dans tout ce qui suit, on se référera à la réalisation de N.Bourbaki, [B].

On considère le sous-espace vectoriel $U_{\mathbb{R}}$ de dimension 2 de l'espace \mathbb{R}^3 défini par :

$$U_{\mathbb{R}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \sum_{j=1}^3 x_j = 0\}.$$

On notera $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique et \langle, \rangle le produit scalaire euclidien usuel de \mathbb{R}^3 .

$R = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 / \sum_{j=1}^3 n_j = 0\}$ est un réseau de $U_{\mathbb{R}}$ et constitue une réalisation du réseau de racines A_2 . On notera désormais A_2 le réseau R .

Ce réseau admet pour \mathbb{Z} -base (α_1, α_2) où $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$.

La matrice de \langle, \rangle dans cette base s'écrit : $S_0 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = S_{A_2}$.

Un élément de l'espace vectoriel complexe $U = U_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ sera écrit $z = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$, avec (z_1, z_2) dans \mathbb{C}^2 ou encore $z = z'_1\epsilon_1 + z'_2\epsilon_2 + z'_3\epsilon_3$, avec (z'_1, z'_2, z'_3) dans \mathbb{C}^3 et $\sum_{j=1}^3 z'_j = 0$.

On a alors :

$$z'_1 = z_1, \quad z'_2 = z_2 - z_1, \quad z'_3 = -z_2$$

$$\langle z, z \rangle = 2(z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2) = z_1'^2 + z_2'^2 + z_3'^2.$$

Le réseau dual \widetilde{A}_2 , qui est par définition le réseau constitué par l'ensemble $\widetilde{A}_2 = \{y \in U_{\mathbb{R}} / \forall x \in A_2 < y, x > \in \mathbb{Z}\}$, admet pour \mathbb{Z} -base le système des poids fondamentaux notés λ_j , où $\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)$.

Cette base vérifie la propriété suivante :

$$\langle \lambda_j, \alpha_i \rangle = \delta_{ij}, \text{ pour } i, j \text{ appartenant à } \{1, 2\}.$$

Le groupe de Weyl du réseau A_2 , noté $W(A_2)$, est par définition le groupe engendré par les 2 réflexions σ_{α_1} et σ_{α_2} définies sur U par :

$$\sigma_{\alpha_i}(z) = z - \langle \alpha_i, z \rangle_{A_2} \alpha_i.$$

Il s'identifie au groupe des permutations \mathcal{S}_3 et agit sur un élément z par permutations de ses coordonnées (z'_1, z'_2, z'_3) :

$$\sigma_{\alpha_1}(z) = (z'_2, z'_1, z'_3), \quad \sigma_{\alpha_2}(z) = (z'_1, z'_3, z'_2).$$

Tout élément du groupe de Weyl préserve le produit scalaire \langle, \rangle_{A_2} .

Tout élément σ du groupe de Weyl préserve aussi le réseau A_2 .

On notera $\zeta_1 := e^{2i\pi \langle z, \lambda_1 \rangle}$, $\zeta_2 := e^{2i\pi \langle z, \lambda_2 \rangle}$ et P_1, P_2 les polynômes exponentiels fondamentaux $W(A_2)$ -invariants :

$$P_1 := \zeta_1^{-1} + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2^{-1}$$

$$P_2 := \zeta_2^{-1} + \zeta_1 + \zeta_1^{-1} \zeta_2.$$

Tout polynôme exponentiel $W(A_2)$ -invariant appartient à $\mathbb{C}[P_1, P_2]$.

On peut maintenant en venir à la description du domaine de type *IV* associé à notre réseau A_2 .

Suivant les notations de V.Gritsenko et V.Nikulin (voir l'article [GN2], paragraphe 2.1), pour t entier naturel non nul, on note $L_t = 2H \oplus A_2(-t)$ le réseau entier pair de signature $(2, 4)$, où H est un plan isotrope unimodulaire, et $A_2(-t)$ le réseau de rang 2 muni de la forme quadratique $-tS_{A_2} = -t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On désignera par $(,)_{L_t}$ la forme quadratique relative à L_t .

On désigne par $\widehat{SO}^+(L_t)$ le sous-groupe du groupe orthogonal $O(L_t)$, constitué des éléments g de déterminant 1, de norme spinorielle 1, et tels que, pour tout l appartenant au réseau dual de L_t noté \widetilde{L}_t , et égal au réseau $H^2 \oplus \frac{1}{t}\widetilde{A}_2$, le vecteur $g.l - l$ appartienne à L_t .

Pour l appartenant à \widetilde{L}_t , on note $\Delta(l)$ le nombre défini par $\Delta(l) := 3t(l, l)_{L_t}$. Ce nombre est un entier relatif appelé *discriminant* de l .

On notera $V_{\mathbb{C}} := L_t \otimes \mathbb{C}$ et \mathcal{D}^+ ou encore $\Omega(L_t)$ l'une des deux composantes connexes de l'espace projectif $\{ Z \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}), (Z, Z)_{L_t} = 0, (Z, \bar{Z})_{L_t} > 0 \}$. (On considèrera l'action du groupe $\widehat{SO}^+(L_t)$ sur ce domaine.)

Ce domaine homogène admet dans \mathbb{C}^4 la réalisation suivante (qui n'est autre que le demi-plan hermitien), associée au langage "symplectique" (analogue de \mathbb{H}_2 , [GN2]) :

$$\mathcal{H}_4 := \{ Z = (\omega, z, \tau) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{H} / \frac{1}{2}S_1[ImZ] > 0 \},$$

$$\text{où } S_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -tS_{A_2} & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

On notera V_t l'involution suivante :

$$V_t : \begin{cases} \mathcal{H}_4 & \longrightarrow \mathcal{H}_4 \\ (\omega, z, \tau) & \longmapsto (\frac{\tau}{t}, z, t\omega) \end{cases}$$

On peut également utiliser le langage "orthogonal", en considérant la réalisation $\mathcal{H}_4^{(t)}$ suivante, sur laquelle opère le sous-groupe orthogonal $O^+(L_t)$ des éléments préservant la composante \mathcal{D}^+ (c'est à dire le sous-groupe des éléments de norme spinorielle 1) :

$$\mathcal{H}_4^{(t)} := \{ Z = (t\omega, z, \tau) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{H} / \frac{1}{2}S_1[ImZ] > 0 \}.$$

On notera ψ_t l'isomorphisme suivant :

$$\psi_t : \begin{cases} \mathcal{H}_4 & \longrightarrow \mathcal{H}_4^{(t)} \\ (\omega, z, \tau) & \longmapsto (t\omega, z, \tau) \end{cases}$$

L'involution correspondant à l'involution V_t est alors l'involution notée V , dont l'action se traduit par :

$$V : \begin{cases} \mathcal{H}_4^{(t)} & \longrightarrow \mathcal{H}_4^{(t)} \\ (t\omega, z, \tau) & \longmapsto (\tau, z, t\omega) \end{cases}$$

La transformation V admet dans le groupe orthogonal $O(L_t)$ la description suivante :

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette description permet de constater que l'involution V agit sur \widetilde{L}_t/L_t par multiplication par -1 et est de déterminant -1 . Elle préserve la composante \mathcal{D}^+ .

2.2. Formes automorphes réflexives définie sur ce domaine. Soit l non nul appartenant au réseau \widetilde{L}_t .

On appelle *diviseur rationnel quadratique orthogonal au vecteur l* dans \mathcal{D}^+ , l'ensemble noté \mathcal{H}_l suivant :

$$\mathcal{H}_l = \{ Z \in \mathcal{D}^+ / (l, Z)_{L_t} = 0 \}$$

(Voir [GH] lemme 3.1)

Si \mathcal{H}_l est non vide, alors $(l, l)_{L_t} < 0$.

On appelle *racine* d'un réseau R muni d'une forme quadratique $(,)$, tout élément α de R tel que :

(i) $(\alpha, \alpha) < 0$

(ii) $s_\alpha : \begin{cases} V_{\mathbb{C}} = R \otimes \mathbb{C} & \rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ x & \mapsto x - 2 \frac{(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \end{cases}$ est une réflexion préservant R

On notera $\Delta(R)$ l'ensemble des racines du réseau R .

Définition 2.1. Une forme automorphe Φ définie sur le domaine \mathcal{H}_4 est dite réflexive si son diviseur est une réunion de diviseurs quadratiques rationnels orthogonaux à des racines de \widetilde{L}_t .

Autrement dit, le diviseur $\text{div}(\Phi)$ de la forme Φ s'écrit :

$$\text{div}(\Phi) = \sum_{\alpha \in \Delta(\widetilde{L}_t)} k_\alpha \mathcal{H}_\alpha,$$

où les k_α sont des nombres entiers, appelés multiplicité du diviseur \mathcal{H}_α .

A partir des diviseurs rationnels quadratiques, on peut définir un analogue de la surface de Humbert (voir [GH] et [GN2]) : le diviseur de Heegner.

On considère l'espace quotient $\mathcal{A}_t = \mathcal{H}_4^{(t)} / \widehat{SO}^+(L_t)$ (respectivement $\mathcal{A}_t^+ = \mathcal{H}_4^{(t)} / (\widehat{SO}^+(L_t) \cup V.\widehat{SO}^+(L_t))$) et $\pi_t : \mathcal{H}_4^{(t)} \rightarrow \mathcal{A}_t$ la projection naturelle.

Pour l appartenant à \widetilde{L}_t , on définit le diviseur de Heegner associé à l et noté H_l dans \mathcal{A}_t (respectivement \mathcal{A}_t^+) par :

$$H_l := \pi_t \left(\bigcup_{g \in \widehat{SO}^+(L_t)} \mathcal{H}_{g.l} \right)$$

(respectivement :

$$H_l := \pi_t \left(\bigcup_{g \in \widehat{SO}^+(L_t) \cup V.\widehat{SO}^+(L_t)} \mathcal{H}_{g.l} \right))$$

On peut énoncer les propriétés suivantes :

(1) Si deux vecteurs l_1 et l_2 de \widetilde{L}_t ont même norme et sont égaux modulo L_t , alors les diviseurs modulaires de Heegner H_{l_1} et H_{l_2} dans \mathcal{A}_t coïncident (voir [GH] lemme 3.2).

(2) Tout diviseur de Heegner dans \mathcal{A}_t^+ peut être représenté sous la forme H_l où l est un vecteur primitif de \widetilde{L}_t (c'est à dire tel que pour tout entier d supérieur ou égal à 2 le vecteur $\frac{l}{d}$ n'appartient pas à \widetilde{L}_t) écrit $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$, avec a entier relatif et \vec{b} appartenant à \widetilde{A}_2 . (Voir [GN2] page 236).

Remarques :

- On vérifie facilement que si $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$, avec a entier relatif et \vec{b} appartenant à \widetilde{A}_2 , alors le vecteur l est une racine du réseau \widetilde{L}_t si et seulement si son discriminant $\Delta(l)$ vérifie les trois conditions suivantes :

$$(1) \quad \Delta(l) < 0$$

$$(2) \quad \frac{6t}{\Delta(l)} \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \frac{6\vec{b}}{\Delta(l)} \in A_2$$

- On peut également constater que le discriminant du vecteur $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$ s'écrit $\Delta(l) = 3N_t(a, \vec{b})$, où $N_t(a, \vec{b}) = 2at - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{A_2}$ n'est autre que la norme hyperbolique pour l'indice t du couple (a, \vec{b}) .

L'objectif de cet article est la construction de formes automorphes réfléchies pour le groupe orthogonal $\widetilde{SO}^+(L_t)$, qui seront associées à des algèbres hyperboliques de Kac-Moody de type de Borcherds (voir [GN3]).

Cette construction sera réalisée par des relèvements de formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2 , dont la définition est rappelée au paragraphe suivant.

3. Formes de Jacobi relatives au réseau A_2

3.1. Définition des formes de Jacobi relatives au réseau de racines A_2 . Dans ce paragraphe, la notation \langle, \rangle désignera la forme quadratique S_{A_2} .

Définition 3.1. (Voir [EZ], [KP], [W], [G].) Soient k, m deux entiers relatifs. Une fonction $\Phi(\tau, z)$ définie et holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$, où \mathbb{H} désigne le demi-plan supérieur complexe, à valeurs dans \mathbb{C} , est appelée forme de Jacobi faible de poids k , d'indice m , définie relativement au réseau A_2 , si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

$$1) \quad \Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{i\pi m \frac{c\langle z, z \rangle}{c\tau+d}} \Phi(\tau, z), \text{ pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.

$$2) \quad \Phi(\tau, z + \beta\tau + \alpha) = e^{-i\pi m(2\langle \beta, z \rangle + \tau \langle \beta, \beta \rangle)} \Phi(\tau, z), \text{ pour tout couple } (\alpha, \beta)$$

d'éléments de A_2

3) Φ admet un développement de Fourier du type :

$$\Phi(\tau, z) = \sum_{\substack{l \in \widetilde{A}_2 \\ n \geq 0}} f(n, l) e^{2\pi i(n\tau + \langle l, z \rangle)}.$$

On notera, pour n entier naturel, $[\Phi]_{q^n}$ le coefficient de q^n dans le développement de Fourier de Φ , c'est à dire :

$$[\Phi]_{q^n} = \sum_{l \in \widetilde{A}_2} f(n, l) e^{2\pi i \langle l, z \rangle}.$$

Les coefficients $f(n, l)$ sont appelés coefficients de Fourier de la forme Φ .

Les équations fonctionnelles vérifiées par une forme de Jacobi faible, définie relativement au réseau A_2 , de poids k , d'indice m , permettent d'établir les propriétés suivantes concernant ses coefficients de Fourier $f(n, l)$:

(i) $f(n, -l) = (-1)^k f(n, l)$

(ii) $f(n, l)$ ne dépend que de la classe de l dans \widetilde{A}_2 modulo mA_2 , et de la norme hyperbolique $N_m(n, l) = 2nm - \langle l, l \rangle_{A_2}$.

Définition 3.2.

(1) Soit Φ une forme de Jacobi faible d'indice m .

- Si les seuls coefficients $f(n, l)$ non nuls sont ceux dont la norme hyperbolique est supérieure ou égale à 0, alors la forme Φ est appelée forme de Jacobi holomorphe.

- Si les seuls coefficients de Fourier qui sont non nuls sont ceux dont la norme hyperbolique est strictement positive, alors la forme est dite cuspidale.

(2) On dira qu'une fonction $\Phi(\tau, z)$ holomorphe sur $\mathbb{H} \times U$ est une forme de Jacobi presque holomorphe s'il existe un entier n_0 tel que la forme $\Delta(\tau)^{n_0} \phi(\tau, z)$ soit une forme de Jacobi holomorphe, où $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}$ est la première forme modulaire cuspidale pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

On notera $J_{k,m}^{f,A_2}$, respectivement $J_{k,m}^{hol,A_2}$, respectivement $J_{k,m}^{cusp,A_2}$, respectivement $J_{k,m}^{n.h.,A_2}$, l'espace vectoriel des formes de Jacobi faibles, respectivement holomorphes, respectivement cuspidales, respectivement presque holomorphes, de poids k , d'indice m définies relativement au réseau A_2 .

Une forme de Jacobi Φ , définie relativement au réseau A_2 sera dite $W(A_2)$ -invariante, respectivement $W(A_2)$ -anti-invariante, si pour tout σ de $W(A_2)$ elle vérifie $\Phi(\sigma(\tau, z)) = \Phi(\tau, z)$, respectivement si pour tout σ de $W(A_2)$, $\Phi(\sigma(\tau, z)) = \text{sgn}(\sigma)\Phi(\tau, z)$, où $\text{sgn}(\sigma)$ désigne la signature de σ .

On notera $J_{k,m}^{W(A_2),f}$, respectivement $J_{k,m}^{AW(A_2),f}$, l'espace vectoriel des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$ -invariantes, respectivement anti-invariantes de poids k , d'indice m , et on emploiera des notations analogues pour les

formes holomorphes, pour les formes cuspidales et pour les formes presque holomorphes.

On peut remarquer que si ϕ est une forme de Jacobi $W(A_2)$ -invariante, alors chacun de ses coefficients de Fourier $f(n, l)$ vérifie $f(n, \sigma.l) = f(n, l)$ pour tout σ appartenant à $W(A_2)$, ce qui fait de chaque coefficient $[\phi]_{q^n}$ un polynôme exponentiel $W(A_2)$ -invariant, c'est à dire un élément de $\mathbb{C}[P_1, P_2]$.

3.2. Premières formes de Jacobi pour le réseau A_2 . Pour davantage de détails concernant la construction et la démonstration des propriétés des formes de Jacobi décrites ci-dessous, voir [D], chapitres 2, 3 et 4.

Proposition-Définition 3.1. *On pose, comme le fait K. Wirthmüller [W] :*

$$a_{-3,1}(\tau, z'_1, z'_2, z'_3) = \omega(\tau, z'_1) \times \omega(\tau, z'_2) \times \omega(\tau, z'_3),$$

où $\omega(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)}{i\eta(\tau)^3}$ appartient à $J_{-1, \frac{1}{2}}^{A_1, f}$, et admet pour seuls zéros les points du type (τ, z) où z appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, la fonction ϑ étant la fonction thêta bien connue désignée sous la notation ϑ_{11} par D. Mumford ([Mu]) et définie par :

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau, z) &= iq^{\frac{1}{8}}(\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}) \prod_{m=1}^{+\infty} (1 - q^m)(1 - q^m\zeta^{-1})(1 - q^m\zeta) \\ &= -iq^{\frac{1}{8}}\zeta^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{n-1}\zeta)(1 - q^n\zeta^{-1})(1 - q^n), \end{aligned}$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$ et $\zeta = e^{2\pi iz}$.

Elle s'écrit aussi :

$$\vartheta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(\pi i(n + \frac{1}{2})^2\tau + 2\pi i(n + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})).$$

La forme $a_{-3,1}$ obtenue est une forme de Jacobi faible, $W(A_2)$ -invariante, de poids -3 , d'indice 1, et admet pour seuls zéros les points du type (τ, z'_1, z'_2, z'_3) où l'un au moins des z'_j appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

On définit sur $\mathbb{H} \times U$ la fonction suivante :

$$s_1(\tau, \vec{z}) := \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta} \right) (\tau, z'_j), \quad \text{où } \vartheta_z(\tau, z) = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(\tau, z).$$

La fonction s_1 vérifie les équations fonctionnelles des formes de Jacobi de poids 1 et d'indice 0, elle admet un développement dans lequel n'apparaissent que des puissances positives de q , elle est méromorphe et ses pôles éventuels sont les points (τ, z) où l'un des z'_j appartient à $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, ils sont d'ordre au plus 1.

On démontre ce résultat en utilisant le fait que le système de coordonnées dans U utilisé ici vérifie $z'_1 + z'_2 + z'_3 = 0$, et les propriétés de la fonction ϑ suivantes :

- (i) pour n et n' entiers, $\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau, z + n + n'\tau) = -2\pi in' + \left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau, z)$.
- (ii) $\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = 2\pi icz + (c\tau+d)\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau, z)$, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.

On obtient alors les équations fonctionnelles :

- (i) $s_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)s_1(\tau, z)$, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $SL_2(\mathbb{Z})$.
- (ii) $s_1(\tau, z + \beta\tau + \alpha) = s_1(\tau, z)$, pour tout (α, β) appartenant à $A_2 \times A_2$.

En utilisant la forme produit de la fonction ϑ , on constate également qu'il n'apparaît que des puissances positives de q dans le développement de Fourier de $\left(\frac{\vartheta_z}{\vartheta}\right)(\tau, z)$, donc aussi dans celui de $s_1(\tau, z)$. Enfin, la forme des zéros de la fonction ϑ permet de déduire celle des pôles éventuels de s_1 .

Proposition-Définition 3.2. *On pose :*

$$a_{-2,1}(\tau, z'_1, z'_2, z'_3) := \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\vartheta_z}{\vartheta}(\tau, z'_j) \right) \times \prod_{k=1}^3 \frac{\vartheta(\tau, z'_k)}{\eta(\tau)^3}.$$

La forme $a_{-2,1}$, qui n'est autre que la forme $-\frac{i}{2\pi}s_1 \times a_{-3,1}$, appartient à $J_{-2,1}^{A_2,f}$, d'après les résultats précédents.

Proposition-Définition 3.3. *On pose :*

$$a_{0,1} := -\frac{1}{4\pi^2} \Delta_{-2,1} a_{-2,1},$$

où $\Delta_{-2,1}$ est l'opérateur différentiel agissant sur $J_{-2,1}^{A_2,f}$ défini par :

$$\Delta_{-2,1} f := 2i\pi \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2} S_0^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \right] + 24\pi^2 G_2(\tau) f.$$

De façon plus explicite, on a aussi :

$$\begin{aligned} a_{0,1}(\tau, z_1, z_2) = & -\frac{1}{4\pi^2} \times \left[2i\pi \frac{\partial a_{-2,1}}{\partial \tau}(\tau, z) \right. \\ & - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) (a_{-2,1})(\tau, z_1, z_2) \\ & \left. + 24\pi^2 G_2(\tau) a_{-2,1}(\tau, z_1, z_2) \right]. \end{aligned}$$

Les propriétés de l'opérateur différentiel $\Delta_{-2,1}$ permettent d'affirmer que la forme $a_{0,1}$ appartient à l'espace $J_{0,1}^{W(A_2),f}$.

On peut, à l'aide des expressions de la fonction ϑ , décrire les coefficients de Fourier des formes $a_{-3,1}$, $a_{-2,1}$ et $a_{0,1}$.

On constate alors que les multiples $a_{-3,1}$, $2a_{-2,1}$ et $24a_{0,1}$ de ces formes sont à coefficients de Fourier entiers et que leurs développements de Fourier respectifs possèdent les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} [24a_{0,1}]_{q^0} &= 18 + P_1 + P_2 \\ [2a_{-2,1}]_{q^0} &= 6 - P_1 - P_2 \\ [a_{-3,1}]_{q^0} &= P_2 - P_1. \end{aligned}$$

L'étude des coefficients de Fourier de ces formes permet également de démontrer les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^9 a_{-3,1} &\in J_{3/2,1}^{A_2, \text{cusp}}(v_\eta^9) \\ \eta(\tau)^9 a_{-2,1}(\tau, z) &\in J_{5/2,1}^{A_2, \text{cusp}}(v_\eta^9) \\ \eta(\tau)^9 a_{0,1}(\tau, z) &\in J_{9/2,1}^{A_2, \text{cusp}}(v_\eta^9) \end{aligned}$$

où la fonction η est la fonction η de Dedekind définie par :

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n).$$

Remarque. Les trois formes introduites ci-dessus sont précisément les trois formes algébriquement indépendantes sur M_\star (M_\star désignant l'ensemble des formes modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, définies sur \mathbb{H}) dont K. Wirthmüller ([W]) a prouvé l'existence, et qui permettent de décrire la structure de l'algèbre bigraduée $J_{\star, \star}^{W(A_2), f}$:

$$J_{\star, \star}^{W(A_2), f, \mathbb{C}} = M_\star[a_{0,1}, a_{-2,1}, a_{-3,1}].$$

3.3. Formes de Jacobi de poids 0 à coefficients de Fourier entiers.

Proposition-Définition 3.4. *On pose :*

$$\psi_{0,1}^{(1)} := 24a_{0,1}.$$

Alors $\psi_{0,1}^{(1)}$ est une forme de Jacobi faible, $W(A_2)$ -invariante, de poids 0, d'indice 1, à coefficients de Fourier entiers, et vérifiant :

$$[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2.$$

Proposition-Définition 3.5. *On pose :*

$$\begin{aligned} \psi_{0,2}^{(1)} &:= \frac{1}{48} ((24a_{0,1})^2 - E_4(2a_{-2,1})^2) \\ \psi_{0,2}^{(11)} &:= \frac{1}{16} ((24a_{0,1})^2 + 3E_4(2a_{-2,1})^2 - 4E_6(a_{-3,1})^2). \end{aligned}$$

Ces deux formes sont des formes de Jacobi faibles $W(A_2)$ -invariantes, de poids 0, d'indice 2, à coefficients de Fourier entiers, et vérifient :

$$\begin{aligned} [\psi_{0,2}^{(1)}]_{q^0} &= 6 + P_1 + P_2 \\ [\psi_{0,2}^{(11)}]_{q^0} &= 27 + P_1P_2. \end{aligned}$$

Proposition-Définition 3.6. *On pose :*

$$\begin{aligned} \psi_{0,3}^{(1)} &:= \frac{1}{2633} \left((24a_{0,1})^3 - 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 2E_6(2a_{-2,1})^3 \right) \\ \psi_{0,3}^{(11)} &:= \frac{1}{2632} \left((24a_{0,1})^3 + 3E_4(24a_{0,1})(2a_{-2,1})^2 - 6E_6(24a_{0,1})(a_{-3,1})^2 \right. \\ &\quad \left. + 4E_6(2a_{-2,1})^3 - 6E_8(2a_{-2,1})(a_{-3,1})^2 \right). \end{aligned}$$

Ces formes appartiennent à $J_{0,3}^{W(A_2),f}$, sont à coefficients de Fourier entiers, et vérifient :

$$[\psi_{0,3}^{(1)}]_{q^0} = 2 + P_1 + P_2, \quad [\psi_{0,3}^{(11)}]_{q^0} = 15 + P_1P_2$$

Pour démontrer que toutes ces formes sont à coefficients de Fourier entiers, on croise diverses informations données par d'autres descriptions de ces fonctions, qui peuvent s'écrire comme sommes de séries thêta, ou également à l'aide de produits infinis. (On utilise notamment l'introduction de caractéristiques et la forme dénominateur associée au réseau A_2 .) On exploite aussi des relations de congruence établies entre les coefficients de Fourier. (Pour plus de détails, voir [D].)

Proposition-Définition 3.7. *On considère la forme de Jacobi notée Φ_1 et définie par :*

$$\Phi_1(\tau, z) := \frac{E_8(\tau) E_{4,1}^{(A_2)}(\tau, z)}{\Delta(\tau)} - 27 \psi_{0,1}^{(1)}(\tau, z),$$

où $E_{4,1}^{(A_2)}(\tau, z) = E_4(\tau)a_{0,1}(\tau, z) + \frac{1}{12}E_6(\tau)a_{-2,1}(\tau, z)$ est une forme du type "série d'Eisenstein".

La forme Φ_1 est une forme de Jacobi presque holomorphe, de poids 0, d'indice 1, à coefficients de Fourier entiers (car les formes $E_{4,1}^{(A_2)}$ et $\psi_{0,1}^{(1)}$ sont à coefficients de Fourier entiers), et le début de son développement de Fourier (que l'on peut vérifier grâce au logiciel pari-gp) s'écrit :

$$\Phi_1(\tau, z) = q^{-1} + 90 + (\zeta_1\zeta_2)^{\pm 1} + (\zeta_1\zeta_2^{-2})^{\pm 1} + (\zeta_1^2\zeta_2^{-1})^{\pm 1} + q(\dots).$$

3.4. Formes de Jacobi holomorphes ou cuspidales. Toujours en étudiant les coefficients de Fourier des formes concernées, on obtient les résultats :

$$\begin{aligned}\eta(\tau)^8 a_{-3,1} &\in J_{1,1}^{W(A_2),hol}(v_\eta^8) \\ \eta(\tau)^{12} a_{-3,1} &\in J_{3,1}^{W(A_2),cusp}(v_\eta^{12}) \\ \Delta(\tau) a_{-3,1} &\in J_{9,1}^{W(A_2),cusp}.\end{aligned}$$

On peut préciser que la forme dénominateur associée au réseau de racines A_2 , notée \mathcal{A} , mentionnée ci-dessus, est définie par la somme de séries thêta suivantes : $\mathcal{A} = \theta_{\alpha_1+\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_2,3} - \theta_{\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_1,3} + \theta_{-\alpha_2,3} - \theta_{-\alpha_1-\alpha_2,3}$.

La forme \mathcal{A} est une forme de Jacobi holomorphe (même singulière), $W(A_2)$ -anti-invariante, de poids 1, d'indice 3, de caractère v_η^8 . Par conséquent, la forme $\eta(\tau)^{16} \mathcal{A}$ appartient à l'espace $J_{9,3}^{AW(A_2),cusp}$.

4. Relèvement exponentiel de formes de Jacobi de poids 0 à coefficients de Fourier entiers, et formes automorphes réfléchives

4.1. Description du relèvement exponentiel. Ce paragraphe précise la méthode de relèvement exponentiel, variante du produit de Borcherds réalisée par V. Gritsenko et V. Nikulin ([GN2]), qui permet, à partir de certaines formes de Jacobi définies relativement au réseau A_2 , d'obtenir des formes automorphes pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_t)$, définies sur \mathcal{D}^+ . (Voir les notations introduites plus haut.)

On se réfère en particulier au théorème 2.1. [GN2], rappelé ci-dessous.

Proposition-Définition 4.1. *Soit Φ une forme de Jacobi presque holomorphe, de poids 0 et à coefficients de Fourier entiers (notés $f(n, l)$), définie ici relativement au réseau A_2 , d'indice noté t .*

On considère la variante du produit de Borcherds suivante :

$$B(\Phi)(\omega, z, \tau) := q^A s^C e^{2i\pi \langle z, B \rangle} \prod_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ l \in \widetilde{A}_2 \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n e^{2i\pi \langle z, l \rangle} s^{tm})^{f(nm, l)},$$

où $A = \frac{1}{24} \sum_l f(0, l)$, $B = \frac{1}{2} \sum_{l>0} l f(0, l)$, $C = \frac{1}{4} \sum_l \langle l, l \rangle f(0, l)$, $q = e^{2i\pi\tau}$, $s = e^{2i\pi\omega}$, et où $(n, l, m) > 0$ signifie $(m > 0)$ ou $(m = 0$ et $n > 0)$ ou $(n = m = 0$ et $l < 0$, pour un ordre à préciser sur \widetilde{A}_2).

La fonction $B(\Phi)$ définie sur une réalisation du domaine \mathcal{D}^+ , est une forme modulaire méromorphe pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_t) \cup V \cdot \widehat{SO}^+(L_t)$, de poids

$\frac{f(0,0)}{2}$, avec un système multiplicateur $v_\eta^{24A} \times \chi_C$, où χ_C est trivial dès que C est entier.

Les diviseurs de $B(\Phi)$ sur $\mathcal{A}_t^+ = \mathcal{H}_4^{(t)} / (\widehat{SO(L_t)^+} \cup V.\widehat{SO(L_t)^+})$ sont des diviseurs modulaires de Heegner (voir la remarque 2 ci-dessous).

De plus, en notant $D := \sum_{\substack{n < 0 \\ l \in \widetilde{A}_2}} \sigma_1(-n)f(n, l)$, on a :

$$B(\Phi)(V.(\omega, z, \tau)) = (-1)^D B(\Phi)(\omega, z, \tau).$$

Remarque 1. On peut écrire (voir [GN2]) la fonction $B(\Phi)$ sous la forme :

$$B(\Phi)(\omega, z, \tau) = \eta(\tau)^{f(0,0)} \prod_{l>0} \left(\frac{-i\vartheta(\tau, \langle z, l \rangle) e^{\pi i \omega \langle l, l \rangle}}{\eta(\tau)} \right)^{f(0,l)} \\ \times \exp \left(- \sum_{m \geq 1} m^{-1} \widetilde{\Phi}|_{T_-(m)}(\omega, z, \tau) \right),$$

où $\widetilde{\Phi}|_{T_-(m)}$ désigne l'action de l'opérateur de Hecke $T_-(m)$ sur la fonction $e^{2i\pi t \omega} \Phi(\tau, z)$, action définie par :

$$(e^{2i\pi t \omega} \Phi(\tau, z))|_{T_-(m)}(\omega, z, \tau) = \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N}, \\ ad = m \\ b \pmod d}} \Phi\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right) e^{2i\pi t m \omega}.$$

Cette écriture permet de déterminer le système multiplicatif de la forme $B(\Phi)$.

Remarque 2 : diviseur de la forme $B(\Phi)$.

On reprend les notations de la proposition-définition précédente, Φ appartient à $J_{0,t}^{A_2, n, h, \mathbb{Z}}$.

Le diviseur de la forme $B(\Phi)$ dans l'espace \mathcal{A}_t^+ s'écrit : $\sum_l k_l H_l$, où

$l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$ (avec a entier relatif, \vec{b} appartenant à \widetilde{A}_2) est un vecteur de \widetilde{L}_t , de discriminant $\Delta(l) = 3t(l, l)_{L_t} = 3N_t(a, \vec{b})$ strictement négatif ($N_t(a, \vec{b}) = 2at - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{A_2}$), et avec $k_l = \sum_{n>0} f(n^2 a, n\vec{b})$.

En effet, d'après les remarques du premier paragraphe, il suffit de considérer les diviseurs rationnels quadratiques associés aux vecteurs du type $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$, de norme $(l, l)_{L_t} = \frac{1}{t} N_t(a, \vec{b})$ strictement négative.

La forme $B(\Phi)$ admet un zéro ou un pôle sur le diviseur $\mathcal{H}_l = \{ Z \in \mathcal{D}^+ / (l, Z)_{L_t} = 0 \} = \{ Z = (t\omega, z, \tau) \in \mathcal{H}_4^{(t)} / t\omega + a\tau + \langle \vec{b}, z \rangle_{A_2} = 0 \}$ si un terme du type $1 - e^{2\pi i n(t\omega + a\tau + \langle \vec{b}, z \rangle_{A_2})}$ apparaît dans l'expression de

$B(\Phi)$, c'est à dire, d'après la définition de $B(\Phi)$, s'il existe $n > 0$ tel que $f(n^2a, n\vec{b})$ soit non nul.

La forme $B(\Phi)$ admet ainsi pour diviseurs dans l'espace $\mathcal{A}_t^+ = \mathcal{H}_4^{(t)}/(\widehat{SO}^+(L_t) \cup V.\widehat{SO}^+(L_t))$ les diviseurs de Heegner H_l , $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$, avec les multiplicités $k_l = \sum_{n>0} f(n^2a, n\vec{b})$.

Par conséquent, on peut énoncer le résultat suivant :

Corollaire 4.1. *La forme automorphe $B(\Phi)$ est réfective si les coefficients de Fourier de la forme de Jacobi Φ satisfont la condition suivante :*

“ pour tout $l = (0, a, \frac{\vec{b}}{t}, 1, 0)$, appartenant à \widetilde{L}_t , avec a entier relatif, \vec{b} appartenant à \widetilde{A}_2 , vérifiant $N_t(a, \vec{b}) = 2at - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_{A_2} < 0$, tel que $k_l = \sum_{n>0} f(n^2a, n\vec{b})$ soit non nul, $\Delta(l)$ divise $6t$ dans \mathbb{Z} et divise $6\vec{b}$ dans A_2 ”.

Pour étudier le diviseur de la forme $B(\Phi)$, on s'intéressera donc aux coefficients de Fourier $f(n', l')$ de norme hyperbolique $2n't - \langle l', l' \rangle_{A_2}$ négative, de la forme de Jacobi Φ .

4.2. Etude préliminaire des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative d'une forme de Jacobi faible.

Lemme 4.1. *Système de représentants de $G_m(A_2)$.*

Cas où $m = 1$.

$\mathcal{S}_1 := \{ 0, \lambda_2, -\lambda_2 \}$ est un système de représentants de \widetilde{A}_2/A_2 .

Le tableau suivant donne la norme de ses éléments.

l	0	λ_2	$-\lambda_2$
$\langle l, l \rangle$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Cas où $m = 2$.

$\mathcal{S}_2 := \{ 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \pm\lambda_1, \pm(\lambda_1 - \alpha_1), \pm(\lambda_1 - \alpha_2), \pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)) \}$ est un système de représentants de $\widetilde{A}_2/2A_2$.

Le tableau suivant donne la norme de ses éléments.

l	0	$\pm\lambda_1$	$\pm(\lambda_1 - \alpha_1)$	$\pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2))$
$\langle l, l \rangle$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

l	α_1	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	$\pm(\lambda_1 - \alpha_2)$
$\langle l, l \rangle$	2	2	2	$\frac{8}{3}$

Cas où $m = 3$.

$\mathcal{S}_3 := \{ 0, \pm\lambda_2, \pm(\alpha_2 - \lambda_2), \pm(\alpha_2 - 2\lambda_2), \pm\alpha_2, \pm(\alpha_2 - 3\lambda_2), \pm(3\lambda_2 - 2\alpha_2), \pm 2\lambda_2, \pm(2\lambda_2 - 2\alpha_2), \pm(4\lambda_2 - 2\alpha_2), \pm(\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \lambda_2), \pm(\alpha_2 - 4\lambda_2), \pm 3\lambda_2 \}$ est un système de représentants de $\widetilde{A}_2/3A_2$.

l	0	$\pm\lambda_2$	$\pm(\alpha_2 - \lambda_2)$	$\pm(\alpha_2 - 2\lambda_2)$	$\pm\alpha_2$	$\pm(\alpha_2 - 3\lambda_2)$
$\langle l, l \rangle$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	2

l	$\pm(-2\alpha_2 + 3\lambda_2)$	$\pm 2\lambda_2$	$\pm(2\lambda_2 - 2\alpha_2)$	$\pm(4\lambda_2 - 2\alpha_2)$
$\langle l, l \rangle$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$

l	$\pm(\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)$	$\pm(\alpha_2 + \lambda_2)$	$\pm(\alpha_2 - 4\lambda_2)$	$\pm 3\lambda_2$
$\langle l, l \rangle$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	6

Proposition 4.1. *Coefficients de Fourier dont la norme hyperbolique est négative.*

Soient m un entier naturel et Φ appartenant à $J_{*,m}^{A_2,f}$. On note $f(n, l)$ les coefficients de Fourier de la forme Φ . Supposons $f(n, l) \neq 0$ et $N_m(n, l) = 2nm - \langle l, l \rangle_{A_2} < 0$. On a alors les résultats suivants.

Si $m = 1$:

$$f(n, l) = f(0, h), \text{ avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm\lambda_2 \}, \text{ et } N_m(n, l) = -\frac{2}{3}$$

Si $m = 2$:

$$f(n, l) = \begin{cases} f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm\lambda_1, \pm(\lambda_1 - \alpha_1), \\ & \pm(\lambda_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)) \}, \text{ et } N_m(n, l) = -\frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \}, \\ & \text{et } N_m(n, l) = -2 \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm(\lambda_1 - \alpha_2) \}, \\ & \text{et } N_m(n, l) = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Si $m = 3$:

$$f(n, l) = \begin{cases} f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm\lambda_2, \pm(\lambda_2 - \alpha_2), \\ & \pm(2\lambda_2 - \alpha_2) \}, \text{ et } N_m(n, l) = -\frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm\alpha_2, \pm(\alpha_2 - 3\lambda_2), \\ & \pm(3\lambda_2 - 2\alpha_2) \}, \text{ et } N_m(n, l) = -2 \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm(2\lambda_2), \pm(2\lambda_2 - 2\alpha_2), \\ & \pm(4\lambda_2 - 2\alpha_2) \}, \text{ et } N_m(n, l) = -\frac{8}{3} \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm(\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2), \\ & \pm(\alpha_2 + \lambda_2), \pm(\alpha_2 - 4\lambda_2) \}, \text{ et } N_m(n, l) = -\frac{14}{3} \\ \text{ou} \\ f(0, h), & \text{avec } h \text{ appartenant à } \{ \pm 3\lambda_2 \}, \\ & \text{et } N_m(n, l) = -6 \end{cases}$$

En effet, notons \mathcal{S}_m le système de représentants de $G_m(A_2) = \widetilde{A}_2/mA_2$ utilisé. Alors, d'après les propriétés des coefficients de Fourier des formes de Jacobi (voir le paragraphe précédent), pour n, l donnés, $f(n, l) = f(n', h)$,

où n' est un entier, h appartient à \mathcal{S}_m , $N_m(n, l) = N_m(n', h)$, et $l \equiv h \pmod{mA_2}$.

Si $f(n, l)$ est non nul et $N_m(n, l) < 0$, alors $f(n', h)$ est non nul, d'où $n' \geq 0$, car Φ est une forme faible, et $N_m(n', h) = 2n'm - \langle h, h \rangle < 0$.

On déduit des valeurs prises par $\langle h, h \rangle$ précisées dans le lemme 4.1, les différentes possibilités pour $f(n, l)$ décrites par cette proposition, selon la valeur de m .

4.3. Application du relèvement exponentiel afin d'obtenir des formes automorphes réfléchives. Le résultat de la proposition-définition 4.1, joint à l'étude des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative des premières formes de Jacobi relatives au réseau A_2 , de poids 0, à coefficients de Fourier entiers, introduites au paragraphe précédent, permet de donner les exemples suivants.

Proposition 4.2. *La forme $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ est une forme modulaire holomorphe de poids 9, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$, de système multiplicateur trivial. Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_1^+ le diviseur de Heegner $H_{(0,0,\lambda_2,1,0)}$, avec la multiplicité 1. La forme $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ est ainsi une forme automorphe réfléchive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.*

La fonction $B(\Phi_1)$ est une forme modulaire holomorphe de poids 45, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$, de système multiplicateur trivial. Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_1^+ le diviseur de Heegner $H_{(0,-1,\bar{0},1,0)}$, avec la multiplicité 1. La forme $B(\Phi_1)$ est ainsi une forme automorphe réfléchive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.

La forme $B(\psi_{0,2}^{(1)})$ est une forme modulaire holomorphe de poids 3, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_2)$, de système multiplicateur v_η^{12} . Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_2^+ la somme des diviseurs de Heegner $H_{(0,0,\frac{\lambda_1}{2},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\lambda_2}{2},1,0)}$. La forme $B(\psi_{0,2}^{(1)})$ est ainsi une forme automorphe réfléchive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.

La forme $B(\psi_{0,2}^{(11)})$ est une forme modulaire holomorphe de poids 15, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_2)$, de système multiplicateur v_η^{12} . Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_2^+ la somme des diviseurs de Heegner $H_{(0,0,\frac{\alpha_1}{2},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\alpha_2}{2},1,0)}$. La forme $B(\psi_{0,2}^{(11)})$ est ainsi une forme automorphe réfléchive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.

La forme $B(\psi_{0,3}^{(1)})$ est une forme modulaire holomorphe de poids 1, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_3)$, de système multiplicateur v_η^8 . Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_3^+ la somme des diviseurs de Heegner $H_{(0,0,\frac{\lambda_1}{3},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{3},1,0)}$

+ $H_{(0,0,\frac{\lambda_2}{3},1,0)}$. La forme $B(\psi_{0,3}^{(1)})$ est ainsi une forme automorphe réflexive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.

La forme $B(\psi_{0,3}^{(11)})$ est une forme modulaire holomorphe de poids 9, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_3)$, de système multiplicateur trivial. Elle a pour diviseur dans l'espace \mathcal{A}_3^+ la somme des diviseurs de Heegner $H_{(0,0,\frac{\alpha_1}{3},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{3},1,0)} + H_{(0,0,\frac{\alpha_2}{3},1,0)}$. La forme $B(\psi_{0,3}^{(11)})$ est ainsi une forme automorphe réflexive, dont les diviseurs sont de multiplicité 1.

Preuve. On obtient ces résultats d'après la proposition-définition 4.1, le corollaire 4.1, en exploitant le coefficient connu $[\]_{q^0}$ des fonctions $\psi_{0,m}^{(ij)}$ et Φ_1 , et l'étude pour les différents indices m des coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative éventuellement non nuls.

On rappelle que le diviseur de Heegner H_l dans \mathcal{A}_t , a fortiori le diviseur de Heegner H_l dans \mathcal{A}_t^+ , ne dépend que de $(l, l)_{L_t}$ et de l modulo L_t .

Les relations

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) & \alpha_1 &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) & \alpha_2 &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

permettent les changements de représentants modulo L_t effectués.

Détaillons par exemple l'étude du diviseur du relèvement exponentiel de la forme de Jacobi $\psi_{0,1}^{(1)}$.

D'après le cas $m = 1$ de la proposition 4.1 (qui concerne les formes de Jacobi faibles), si $f(n', l')$ est un coefficient de Fourier non nul de la forme de Jacobi $\psi_{0,1}^{(1)}$, de norme hyperbolique $2n' - \langle l', l' \rangle_{A_2} < 0$, alors $f(n', l') = f(0, h)$, où h , appartenant à $\{\lambda_2, -\lambda_2\}$, est congru à l modulo A_2 .

Ainsi, les éventuels diviseurs de Heegner de la fonction $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ dans \mathcal{A}_1^+ , qui sont associés aux coefficients $f(n', l')$ (c'est à dire les diviseurs du type $H_{(0,n',l',1,0)}$ avec $2n' - \langle l', l' \rangle_{A_2} < 0$, coïncident avec ceux associés aux $f(0, h)$, (c'est à dire $H_{(0,0,h,1,0)}$ avec h appartenant à l'ensemble $\{\lambda_2, -\lambda_2\}$ (puisque un diviseur de Heegner H_l dans \mathcal{A}_t , a fortiori dans \mathcal{A}_1^+ , avec $l = (0, a, \vec{b}, 1, 0)$, ne dépend que de la norme $(l, l)_{L_t} = \frac{1}{t}N_t(a, \vec{b})$ et de l modulo L_t).

De plus, les vecteurs $(0, 0, \lambda_2, 1, 0)$ et $(0, 0, -\lambda_2, 1, 0)$ de \widetilde{L}_1 sont dans la même orbite sous l'action du groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$, (il suffit de considérer l'action de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$), donc les diviseurs de Heegner $H_{(0,0,\lambda_2,1,0)}$ et $H_{(0,0,-\lambda_2,1,0)}$ coïncident dans \mathcal{A}_1^+ .

La multiplicité de cet unique diviseur éventuel de la fonction est donnée par la formule :

$$k_{(0,0,\lambda_2,1,0)} = \sum_{n>0} f(0, n\lambda_2) = f(0, \lambda_2) = 1,$$

d'après l'égalité $[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2$.

Finalement, la fonction $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ admet effectivement pour unique diviseur de Heegner dans \mathcal{A}_1^+ , le diviseur $H_{(0,0,\lambda_2,1,0)}$, et ceci avec la multiplicité 1.

De plus, le fait que le coefficient $f(0, \lambda_2)$ soit positif assure le caractère holomorphe de cette fonction.

Enfin, le discriminant $\Delta(l) = 3tN_t(a, \vec{b})$ du vecteur $(0, 0, \lambda_2, 1, 0)$ vaut -2 , et divise donc $6t = 6$ dans \mathbb{Z} et $6\vec{b} = 6\lambda_2$ dans A_2 , donc la forme $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ est une forme automorphe réfective, d'après le corollaire 4.1.

Les autres exemples cités dans la proposition, construits à partir de formes de Jacobi faibles, se traitent de la même façon.

Considérons le cas de la fonction $B(\Phi_1)$.

Par un raisonnement analogue, et d'après la forme du développement de Fourier de la forme de Jacobi presque holomorphe Φ_1 (voir la proposition-définition 3.7) :

$$\Phi_1(\tau, z) = q^{-1} + 90 + (\zeta_1\zeta_2)^{\pm 1} + (\zeta_1\zeta_2^{-2})^{\pm 1} + (\zeta_1^2\zeta_2^{-1})^{\pm 1} + q(\dots)$$

les seuls diviseurs éventuels de cette fonction dans l'espace \mathcal{A}_1^+ sont $H_{(0,0,\lambda_2,1,0)}$ et $H_{(0,-1,\vec{0},1,0)}$, puisque, si $f(n', l')$ est un coefficient de Fourier de norme hyperbolique négative, alors $f(n', l') = f(n'', h)$ avec h appartenant à $\{\lambda_2, -\lambda_2\}$, et $2n' - \langle l', l' \rangle_{A_2} = 2n'' - \langle h, h \rangle_{A_2} = 2n'' - \frac{2}{3} < 0$.

D'après la formule donnant les nombres k_l , on a :

$$k_{(0,0,\lambda_2,1,0)} = \sum_{n>0} f(0, n\lambda_2) = 0$$

et

$$k_{(0,-1,\vec{0},1,0)} = \sum_{n>0} f(-n^2, \vec{0}) = f(-1, \vec{0}) = 1.$$

La fonction $B(\Phi_1)$ admet donc dans \mathcal{A}_1^+ pour unique diviseur le diviseur $H_{(0,-1,\vec{0},1,0)}$, avec la multiplicité 1. Le discriminant associé vaut -6 et divise bien $6t = 6$ et $6\vec{b} = \vec{0}$ dans A_2 , donc la forme $B(\Phi_1)$ est réfective.

Enfin, il s'agit bien d'une forme holomorphe, puisque $f(-1, \vec{0})$ est positif.
Remarque. Les diviseurs des formes réfectives $B(\psi_{0,1}^{(1)})$, $B(\psi_{0,2}^{(1)})$, $B(\psi_{0,2}^{(11)})$, $B(\psi_{0,3}^{(1)})$, $B(\psi_{0,3}^{(11)})$, et $B(\Phi_1)$ sont tous de multiplicité 1.

Ces fonctions seront donc associées à des algèbres de Kac–Moody hyperboliques de type de Borcherds, pour la signature $(1, 3)$ (voir [GN3]).

Les générateurs de ces algèbres de Kac–Moody hyperboliques de type de Borcherds, et les relations existant entre eux, sont déterminés par les coefficients de Fourier des fonctions $B(\Phi)$.

Malheureusement, il est impossible de calculer directement les coefficients de Fourier de ces produits de Borcherds $B(\Phi)$. On fait alors appel, et c’est ce qui fait l’objet du paragraphe suivant, à une autre construction de ces fonctions. Plus précisément, on fait intervenir un autre type de relèvement de formes de Jacobi, et on constate, après étude des diviseurs, que certaines formes obtenues coïncident avec certains de nos produits de Borcherds $B(\Phi)$. Cette nouvelle écriture permettra de calculer les coefficients de Fourier des produits de Borcherds $B(\Phi)$ qui nous intéressent.

5. Relèvement de formes de Jacobi cuspidales ou holomorphes, et formules du dénominateur

5.1. Description du relèvement. On utilisera ici une méthode de relèvement arithmétique de formes de Jacobi ([G], [GN3]).

Un premier théorème ([G] théorème 3.1, écrit ci-dessous dans le cas du réseau A_2), s’applique aux formes de Jacobi d’indice 1, à système multiplicateur trivial.

Proposition 5.1. *Relèvement arithmétique (1).*

Soient k un entier fixé et φ un élément de $J_{k,1}^{A_2,hol}$. On note

$$\varphi(\tau, z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}, l \in \widetilde{A}_2, 2n - \langle l, l \rangle_{A_2} \geq 0} f(n, l) e^{2i\pi(n\tau + lS_0z)}.$$

Si $f(0, 0)$ est non nul, on suppose de plus k supérieur ou égal à 4. Alors, la fonction F_φ définie sur \mathcal{D}^+ par :

$$F_\varphi(\omega, z, \tau) := f(0, 0)E_k(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} (m^{-1}\varphi|_{k,1}T_-(m))(\tau, z) e^{2i\pi m\omega},$$

où l’action de l’opérateur $T_-(m)$ est donnée par :

$$(\varphi|_{k,1}T_-(m))(\tau, z) = \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N}, \\ ad \equiv m \\ b \pmod{d}}} a^k \varphi\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right),$$

est une forme modulaire de poids k pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$.

De plus, comme le réseau $L_1 = 2H \oplus A_2$ est maximal (c’est à dire qu’il n’existe aucun réseau entier pair qui le contienne et dans lequel il soit d’indice fini), si φ est une forme de Jacobi cuspidale, F_φ est une forme modulaire cuspidale.

Un deuxième théorème ([GN2], théorème 1.12) décrit un relèvement arithmétique de formes de Jacobi classiques à une variable, d'indice quelconque, possédant éventuellement un système multiplicateur non trivial, et peut s'écrire dans le cadre plus général des formes de Jacobi à plusieurs variables (et en particulier relatives au réseau A_2) de la façon suivante :

Proposition 5.2. *Relèvement arithmétique (2).*

Soient k un entier relatif, m un entier naturel et D un entier naturel divisant 24 . On note $Q := 24/D$. Soit φ une forme de Jacobi définie relativement au réseau A_2 , cuspidale, de poids k , d'indice t , admettant le système multiplicateur (d'ordre Q) v_η^D (on écrira que φ appartient à $J_{k,t}^{A_2, \text{cusp}}(v_\eta^D)$). Alors la fonction $Lift_1(\varphi)$ définie sur \mathcal{D}^+ par :

$$Lift_1(\varphi)(\omega, z, \tau) = \sum_{\substack{m \equiv 1 \pmod{Q} \\ m > 0}} m^{2-k} \left(\tilde{\varphi}|_k T_-^{(Q)}(m) \right)(\omega, z, \tau),$$

où l'action de l'opérateur $T_-^{(Q)}(m)$ est donnée par :

$$\left(\tilde{\varphi}|_k T_-^{(Q)}(m) \right)(\omega, z, \tau) = m^{2k-3} \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N}, \\ ad = m \\ b \pmod{d}}} d^{-k} v_\eta^D(\sigma_a) \varphi\left(\frac{a\tau + bQ}{d}, az\right) e^{2\pi i m t \omega},$$

où σ_a est un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $\sigma_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{Q}$, est une forme modulaire de poids k pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_{Qt})$, de système multiplicateur induit par v_η^D .

Remarques :

- (i) Si la forme φ est non nulle, la fonction $Lift_1(\varphi)$ obtenue est non nulle.
- (ii) Il existe une variante de ce théorème pour les formes de Jacobi holomorphes non cuspidales, faisant intervenir une condition supplémentaire sur le poids et le système multiplicateur, afin de conserver la convergence.

En appliquant ces relèvements aux formes de Jacobi holomorphes ou cuspidales construites plus haut, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 5.1.

La forme $F_{\Delta(\tau)_{a-3,1}}$ est une forme modulaire cuspidale, de poids 9, de système multiplicateur trivial, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$.

La forme $Lift_1(\eta(\tau)^8_{a-3,1})$ est une forme modulaire, de poids 1, dont le système multiplicateur (d'ordre 3) est induit par v_η^8 , pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_3)$.

La forme $Lift_1(\eta(\tau)^{12}_{a-3,1})$ est une forme modulaire, de poids 3, dont le système multiplicateur (d'ordre 2) est induit par v_η^{12} , pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_2)$.

La forme $Lift_1(\eta(\tau)^{16}\mathcal{A}(\tau, z))$ est une forme modulaire, de poids 9, de système multiplicateur trivial, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_3)$.

5.2. Quatre identités du type “formule du dénominateur”. Comme annoncé ci-dessus, on peut établir certaines égalités entre des relèvements exponentiels de type produits de Borcherds (notés $B(\Phi)$) et des formes automorphes construites par relèvement de type de Maass. La proposition suivante résume ces résultats.

Proposition 5.3.

$$\begin{aligned} B(\psi_{0,1}^{(1)}) &= F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}} \in \mathcal{M}_9(\widehat{SO}^+(L_1)) \\ B(\psi_{0,2}^{(1)}) &= Lift_1(\eta(\tau)^{12}a_{-3,1}) \in \mathcal{M}_3(\widehat{SO}^+(L_2), v_\eta^{12}) \\ B(\psi_{0,3}^{(1)}) &= Lift_1(\eta(\tau)^8a_{-3,1}) \in \mathcal{M}_1(\widehat{SO}^+(L_3), v_\eta^8) \\ B(\psi_{0,3}^{(11)}) &= Lift_1(\eta(\tau)^{16}\mathcal{A}(\tau, z)) \in \mathcal{M}_9(\widehat{SO}^+(L_3)). \end{aligned}$$

Preuve. D’après la proposition 4.2, la forme $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ est une forme modulaire, de poids 9, pour le groupe $\widehat{SO}^+(L_1)$, et admet pour diviseur, dans l’espace \mathcal{A}_1^+ , le diviseur de Heegner $H_{(0,0,\lambda_2,1,0)}$, avec la multiplicité 1.

Montrons que cette forme coïncide avec la forme $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$, définie ci-dessus, elle aussi modulaire de poids 9 pour ce groupe.

D’après la deuxième écriture de la forme $B(\Phi)$ donnée en remarque, et l’égalité $[\psi_{0,1}^{(1)}]_{q^0} = 18 + P_1 + P_2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B(\psi_{0,1}^{(1)})(\omega, z, \tau) &= \eta(\tau)^{18} (-i)^3 e^{2\pi i \omega} \frac{\vartheta(\tau, z_1)}{\eta(\tau)} \frac{\vartheta(\tau, z_1 - z_2)}{\eta(\tau)} \frac{\vartheta(\tau, z_2)}{\eta(\tau)} \\ &\quad \times \exp \left(- \sum_{t \geq 1} t^{-1} \widetilde{\psi_{0,1}^{(1)}}|_{T_-(t)}(\tau, z, \omega) \right), \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} B(\psi_{0,1}^{(1)})(\omega, z, \tau) &= \Delta(\tau) e^{2\pi i \omega} a_{-3,1}(\tau, z) \\ &\quad \times \exp \left(- \sum_{t \geq 1} t^{-1} \widetilde{\psi_{0,1}^{(1)}}|_{T_-(t)}(\omega, z, \tau) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d’après la proposition 5.1, la forme $F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}$ s’écrit :

$$F_{\Delta(\tau)a_{-3,1}}(\omega, z, \tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} (m^{-1}\Delta(\tau)a_{-3,1}|_{9,1}T_-(m))(\tau, z)e^{2i\pi m\omega},$$

avec :

$$(\Delta(\tau)_{a-3,1|9,1}T_-(m))(\tau, z) = \sum_{\substack{a, d \in \mathbb{N}, \\ ad = m \\ b \pmod{d}}} a^9 \Delta\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)_{a-3,1}\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right),$$

ce qui permet de constater que cette forme s'annule sur l'ensemble des zéros de la fonction $B(\psi_{0,1}^{(1)})$.

En effet, on peut rappeler que la fonction $a_{-3,1}$ s'annule uniquement sur les hyperplans d'équation $z'_j = 0$ modulo $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. (On utilise ici les coordonnées $(z'_1 = z_1, z'_2 = z_2 - z_1, z'_3 = -z_2)$.) On peut ensuite vérifier par exemple que, si z'_1 appartient à $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, alors, pour $a, b, d \neq 0$, trois entiers naturels quelconques, az'_1 appartient à $\mathbb{Z} + \frac{a\tau+b}{d}\mathbb{Z}$, ce qui permet de conclure que la forme $F_{\Delta(\tau)_{a-3,1}}$ est nulle sur l'hyperplan d'équation $z'_1 = 0$ modulo $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, puisque, pour tout entier m , $(m^{-1}\Delta(\tau)_{a-3,1|9,1}T_-(m))(\tau, z)$ est nulle sur cet hyperplan.

On peut alors considérer le quotient $\frac{F_{\Delta(\tau)_{a-3,1}}}{B(\psi_{0,1}^{(1)})}$ qui est une fonction modulaire, holomorphe, de poids 0 et qui, d'après le principe de Koecher, ne peut donc être qu'une constante.

Ainsi, les formes $F_{\Delta(\tau)_{a-3,1}}$ et $B(\psi_{0,1}^{(1)})$ sont égales à une constante multiplicative près. D'après le premier coefficient de Fourier–Jacobi de chacune des deux fonctions, cette constante ne peut valoir que 1. Cela termine la démonstration.

On établit les autres identités par un raisonnement analogue.

Remarque : formules du dénominateur.

On peut ainsi écrire, à partir par exemple de l'identité

$$B(\psi_{0,1}^{(1)}) = F_{\Delta(\tau)_{a-3,1}},$$

en revenant aux définitions de ces formes (voir la proposition 5.1 et la proposition-définition 4.1), et en notant $f(n, l)$ les coefficients de Fourier de la forme $\psi_{0,1}^{(1)}$, une formule du type “formule du dénominateur” (c'est à dire une égalité entre un produit infini et une somme infinie) pour l'algèbre de Kac–Moody associée à la forme $B(\psi_{0,1}^{(1)})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{+\infty} (m^{-1}\Delta(\tau)_{a-3,1|9,1}T_-(m))(\tau, z) e^{2i\pi m\omega} \\ &= e^{2\pi i\tau} e^{2\pi i\omega} e^{2i\pi\langle z, \lambda_1 \rangle} \prod_{\substack{n, m \in \mathbb{Z} \\ l \in \widetilde{A_2} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - e^{2\pi i n\tau} e^{2i\pi\langle z, l \rangle} e^{2\pi i m\omega}) f(nm, l). \end{aligned}$$

Cette formule permettra (après le calcul des coefficients de Fourier) de déterminer entièrement l’algèbre de Kac–Moody associée, par ses générateurs et les relations qui existent entre eux.

Des écritures similaires, susceptibles de fournir les “formules du dénominateur” des algèbres de Kac–Moody de type de Borcherds associées aux formes de Jacobi $\psi_{0,2}^{(1)}$, $\psi_{0,3}^{(1)}$ et $\psi_{0,3}^{(11)}$, sont obtenues à partir des 3 autres identités.

Références

- [Bo1] R. BORCHERDS, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}$ and infinite products*. Invent. Math. Vol. **120** (1995), 161–213.
- [Bo2] R. BORCHERDS, *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*. Invent. Math. **132** (1998), 491–562.
- [B] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*. Chapitres 4, 5, 6.
- [D] C. DESREUMAUX, *Formes de Jacobi relatives au réseau de racines A_2 et applications*. Thèse numéro **3295**, Université de Lille 1, juin 2003.
- [EZ] M. EICHLER, D. ZAGIER, *The theory of Jacobi forms*. Progress in Math. **55**, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985.
- [G] V. GRITSENKO, *Modular forms and moduli spaces of abelian and K3 surfaces*. St. Petersburg Math. J., Vol. **6** (1995), No.6, 1179–1208.
- [GH] V. GRITSENKO, K. HULEK, *Minimal Siegel modular threefolds*. Mathem. Proc. Cambridge Phil. Soc. **123** (1998), 461–485.
- [GN1] V. GRITSENKO, V. NIKULIN, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac–Moody Algebras. Part I*. Int. J. of Math., Vol. **9** (1998), No. 2, 153–199.
- [GN2] V. GRITSENKO, V. NIKULIN, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac–Moody Algebras. Part II*. Int. J. of Math., Vol. **9** (1998), No. 2, 201–275.
- [GN3] V. GRITSENKO, V. NIKULIN, *On classification of Lorentzian Kac–Moody Algebras*. Russian Math. Survey, Vol. **57** (2002), 79–139.
- [KP] V.G. KAC, D.H. PETERSON, *Infinite dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms*. Advances in Mathematics **53** (1984), 125–264.
- [Mu] D. MUMFORD, *Tata Lectures on Theta I*. Progress in Mathematics, vol. **28**, Birkhäuser, 1983.
- [W] K. WIRTHMÜLLER, *Root systems and Jacobi forms*. Compositio Mathematica **82** (1992), 293–354.

Caroline DESREUMAUX
 Résidence La Minoterie
 213, rue A.Lamendin
 62400 Béthune, France
E-mail: cadesreumaux@wanadoo.fr