

JEAN-FRANÇOIS JAULENT

**Corrigendum à « Classes logarithmiques signées
des corps de nombres »**

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 14, n° 1 (2002),
p. 345-349

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2002__14_1_345_0

© Université Bordeaux 1, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Corrigendum à “Classes logarithmiques signées des corps de nombres”

par JEAN-FRANÇOIS JAULENT

RÉSUMÉ. Nous corrigeons une erreur contenue dans un article précédent où sont données deux définitions prétendument équivalentes du 2-groupe des classes logarithmiques signées d'un corps de nombres.

ABSTRACT. We correct the inequivalent definitions of signed logarithmic 2-class group for number fields which was given in a previous article.

Introduction

La notion de classes logarithmiques signées pour les corps de nombres a été introduite dans [J2] par analogie avec celle de classes d'idéaux prises au sens restreint et en cohérence avec une construction semblable pour les corps de fonctions (cf. [AJ]). Dans le cas des idéaux, les classes au sens restreint peuvent s'appréhender de deux façons :

- en considérant le sous-groupe Pr_K^+ du groupe des idéaux Id_K formé des idéaux principaux engendrés par les éléments totalement positifs ; puis en définissant le groupe des classes au sens restreint par : $Cl_K^{res} = Id_K / Pr_K^+$;

- en considérant le groupe des diviseurs $D_K \simeq Id_K \oplus Sg_K$ (où $Sg_K \simeq \mathbb{F}_2$ est le groupe des signatures de K) et en quotientant par le sous-groupe principal P_K ; ce qui redonne : $Cl_K^{res} = D_K / P_K$.

Dans le cadre logarithmique, en revanche, les deux procédés ne sont pas toujours équivalents (contrairement à ce qui est affirmé implicitement dans [J2]) et conduisent parfois à des groupes distincts (ils diffèrent en fait d'un indice 1 ou 2). Pour remédier à cette discordance, il suffit cependant de restreindre dans la première description le numérateur aux seuls diviseurs *globalement positifs*, ce qui suppose naturellement d'avoir préalablement bien défini cette notion.

Le but de la présente note est ainsi de rectifier la présentation inexacte de [J2] (la Définition-Proposition 9), qui repose sur une définition ambiguë (la Définition 7) et un lemme erroné (le Lemme 8) conduisant à des erreurs ou

des confusions. Cela ne remet pas substantiellement en cause les résultats de [J2], qui restent essentiellement valides, en particulier la formule des classes centrales qui n'utilise que la seconde description, mais implique de corriger d'un facteur égal à 1 ou 2 la formule des classes ambiges qui repose sur la première approche.

1. Rappel des principales notations

Nous reprenons ici les notations de [J2], à l'exception de $\tilde{\mathcal{J}}_K^+$, raccourci malheureux pour $\tilde{\mathcal{J}}_K^{*+}$ qui est à l'origine des confusions évoquées.

Rappelons qu'à chaque place finie \mathfrak{p} d'un corps de nombres K est associée une valeur absolue 2-adique $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ définie sur le compactifié $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times 2^n}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^{\times} \simeq \{\pm 1\}(1 + 4\mathbb{Z}_2)$; ce qui permet, en considérant séparément les deux composantes $\{\pm 1\}$ et $1 + 4\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$, de définir une fonction signe $\text{sg}_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ et une valuation logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ à valeurs dans \mathbb{Z}_2 . Le noyau $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+$ de $\text{sg}_{\mathfrak{p}}$ est ainsi le sous-groupe *positif* de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$; celui $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ de $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ est le groupe des *unités logarithmiques* et l'intersection $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+$ est le groupe des *unités logarithmiques positives*. Aux places à l'infini, on a $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = 1$ si \mathfrak{p} est complexe ; $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} = \{\pm 1\}$ si \mathfrak{p} est réelle et, bien sr, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+ = 1$.

Lorsque le quotient $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^+$ est d'ordre 2, on dit que la place \mathfrak{p} est *signée* ; quand le quotient $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}/\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+$ est d'ordre 2, elle est dite *logarithmiquement signée*. Cette dernière éventualité se produit exclusivement aux places réelles et à certaines places 2-adiques. En particulier, lorsque le groupe $Sgl_K = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}/\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}^+$ des signatures logarithmiques n'est pas trivial, le corps K lui-même est dit *logarithmiquement signé*.

La Définition 7 et le Lemme 8 de [J2] doivent alors être rectifiés comme suit :

Définition 7. Dans un corps logarithmiquement signé K , nous disons qu'un idèle de degré nul $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathcal{J}}_K$ est :

(i) *globalement positif*, lorsqu'il satisfait la formule du produit pour les fonctions signes $\text{sg}_{\mathfrak{p}}$. Le groupe des idèles globalement positifs est ainsi :

$$\tilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathcal{J}}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} \text{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = +1\} = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathcal{J}}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\tilde{\mathcal{U}}_K^* = \tilde{\mathcal{U}}_K \cap \tilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(u_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathcal{U}}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} \text{sg}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = +1\}.$$

(ii) *logarithmiquement positif*, lorsqu'il est d'image triviale dans le groupe des signatures Sgl_K . Le groupe des idèles logarithmiquement positifs est ainsi :

$$\tilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathcal{J}}_K \mid \text{sg}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = +1 \quad \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\tilde{U}_K^+ = \tilde{U}_K \cap \tilde{J}_K^+ = \{(u_p)_p \in \tilde{U}_K \mid \text{sg}_p(u_p) = +1 \quad \forall p \in PLS_K\}.$$

(iii) *totale*ment positif, lorsqu'il l'est globalement et logarithmiquement. Le sous-groupe des idéles totalement positifs est ainsi :

$$\tilde{J}_K^{*+} = \tilde{J}_K^* \cap \tilde{J}_K^+ = \{(x_p)_p \in \tilde{J}_K^* \mid \text{sg}_p(x_p) = +1 \quad \forall p \in PLS_K\}.$$

En particulier, le groupe des éléments globaux totalement positifs est le noyau $\mathcal{R}_K^+ = \mathcal{R}_K \cap \tilde{J}_K^+$ dans \mathcal{R}_K du morphisme signature sgl_K à valeurs dans Sgl_K .

Remarque. On a bien $\tilde{U}_K^+ \subset \tilde{U}_K^*$ et $\mathcal{R}_K \subset \tilde{J}_K^*$ mais non $\tilde{J}_K^+ \subset \tilde{J}_K^*$, le quotient $\tilde{J}_K^+/\tilde{J}_K^{*+} \simeq \tilde{J}_K/\tilde{J}_K^* \simeq \text{Gal}(K^c[i]/K^c)$ étant d'ordre 1 ou 2.

Nota. Dans la correspondance du corps de classes, \tilde{J}_K est le groupe de normes attaché à la \mathbb{Z}_2 -extension cyclotomique globale K^c ; tandis que son sous-groupe $\tilde{U}_K \mathcal{R}_K$ correspond à la 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} . De façon semblable, \tilde{J}_K^* correspond à la 2-extension cyclotomique $K^c[i]$ et le sous-groupe $\tilde{U}_K^* \mathcal{R}_K = \tilde{U}_K \mathcal{R}_K \cap \tilde{J}_K^*$ à l'extension composée $K^{lc}[i]$.

Lemme 8. On a l'identité $\tilde{J}_K^* = \tilde{J}_K^{*+} \mathcal{R}_K$, d'où l'isomorphisme entre quotients :

$$\tilde{J}_K^*/\tilde{U}_K^+ \mathcal{R}_K \simeq \tilde{J}_K^{*+}/\tilde{U}_K^+ \mathcal{R}_K^+.$$

2. Définition des 2-groupes de classes

Revenons maintenant sur la définition des groupes de classes signées :

Définition & Proposition 9. Soit K un corps de nombres quelconque.

(i) Nous appelons 2-groupe des classes logarithmiques signées le quotient $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K = \tilde{J}_K^*/\tilde{U}_K^+ \mathcal{R}_K \simeq \tilde{J}_K^{*+}/\tilde{U}_K^+ \mathcal{R}_K^+$.

(ii) En termes de diviseurs, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K$ s'identifie d'une part au quotient $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K \simeq \widetilde{\mathcal{D}ls}_K/\widetilde{\mathcal{P}ls}_K$ du 2-groupe des diviseurs logarithmiques signés de degré nul $\widetilde{\mathcal{D}ls}_K = \tilde{J}_K^*/\tilde{U}_K^+$ par son sous-groupe principal $\widetilde{\mathcal{P}ls}_K = \mathcal{R}_K \tilde{U}_K^+/\tilde{U}_K^+$; et d'autre part au quotient $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K \simeq \widetilde{\mathcal{D}l}_K^*/\widetilde{\mathcal{P}l}_K^+$ du 2-groupe des diviseurs logarithmiques globalement positifs $\widetilde{\mathcal{D}l}_K^* = \tilde{J}_K^{*+}/\tilde{U}_K^+$ de degré nul par son sous-groupe principal totalement positif $\widetilde{\mathcal{P}l}_K^+ = \mathcal{R}_K^+ \tilde{U}_K^+/\tilde{U}_K^+$.

(iii) Et la théorie 2-adique du corps de classes interprète le groupe de classes logarithmiques signées comme groupe de Galois relatif

$$\widetilde{\mathcal{C}ls}_K \simeq \text{Gal}(K^{lcs}/K^{cs})$$

de la plus grande pro-2-extension abélienne K^{lcs} du corps K qui est complètement décomposée sur $K^{cs} = K^c[i]$ en chacune de ses places.

Preuve. Les isomorphismes énoncés résultent directement du Lemme 8. Cela étant, comme expliqué dans [J2], le groupe $\tilde{\mathcal{J}}_K^*$ fixe K^{cs} ; et le sous-groupe $\tilde{\mathcal{U}}_K^+ \mathcal{R}_K$ fixe K^{lcs} . D'où les interprétations annoncées.

Remarques. Contrairement à [J2], nous n'avons pas fait d'hypothèse sur la signature logarithmique du corps K ; plus précisément :

(i) Pour $i \in K^c$, on a banalement $\tilde{\mathcal{J}}_K^* = \tilde{\mathcal{J}}_K$ et $\tilde{\mathcal{U}}_K^+ = \tilde{\mathcal{U}}_K$, d'où l'identité :

$$\widetilde{\mathcal{C}ls}_K = \widetilde{\mathcal{C}l}_K ;$$

et la notion de signe n'apporte rien par rapport à la construction de [J1].

(ii) Pour $i \in K^{lc} \setminus K^c$, en revanche, on a $(\tilde{\mathcal{J}}_K : \tilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ et $\tilde{\mathcal{U}}_K^+ = \tilde{\mathcal{U}}_K$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K$ est alors d'indice 2 dans $\widetilde{\mathcal{C}l}_K$, lequel est donc non trivial ici.

(iii) Pour $i \notin K^{lc}$, enfin (c'est à dire pour K logarithmiquement signé), on a $(\tilde{\mathcal{J}}_K : \tilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ mais $\tilde{\mathcal{U}}_K^+ \neq \tilde{\mathcal{U}}_K$ donc $\tilde{\mathcal{J}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K^* \tilde{\mathcal{U}}_K$; d'où la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sgl}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}ls}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}l}_K \longrightarrow 1,$$

conformément au Corollaire 10 de [J2].

En fin de compte, la correction apportée concerne exclusivement la description de $\widetilde{\mathcal{C}ls}_K$ comme groupe des classes de diviseurs logarithmiques modulo le sous-groupe principal $\widetilde{\mathcal{P}l}_K^+$ construit sur les éléments totalement positifs, description dans laquelle le numérateur doit être restreint au sous-groupe $\widetilde{\mathcal{D}l}_K^*$ d'indice 1 ou 2 dans $\widetilde{\mathcal{D}l}_K$ formé des diviseurs de degré nul globalement positifs.

3. Correction des énoncés de [J2]

Ceci concerne exclusivement la section 3 de [J2] où est établie une formule de points fixes pour les 2-groupes de classes logarithmiques signées dans une extension cyclique L/K , qui prend appui sur leur description comme groupe de classes de diviseurs globalement positifs. Sous l'hypothèse de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}l}_L^*) = 0$, son point de départ est maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}l}_K^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}l}_K^* & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}ls}_K \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \widetilde{p}_{L/K}^+ & & \downarrow \widetilde{d}_{L/K}^* & & \downarrow \widetilde{c}_{L/K}^s \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}l}_L^{+G} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}l}_L^{*G} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}ls}_L^G \longrightarrow H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}l}_L^+) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Il faut donc remplacer l'indice $(\widetilde{\mathcal{D}l}_L^G : \widetilde{\mathcal{D}l}_K)$ du Lemme 12 par le nouvel indice $(\widetilde{\mathcal{D}l}_L^{*G} : \widetilde{\mathcal{D}l}_K^*)$. Il vient ainsi :

Lemme 12. *Sous la condition de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}}_L^*) = 0$, on a*

$$(\widetilde{\mathcal{D}}_L^{*G} : \widetilde{\mathcal{D}}_K^*) = \left(\prod_{\mathfrak{p}} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K) \right) / [L^{cs} : K^{cs}],$$

où $\tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)$ désigne l'indice de ramification logarithmique de \mathfrak{p} dans L/K .

D'autre part, puisqu'il existe des idéles principaux de toutes signatures logarithmiques, le Lemme 15 doit être corrigé comme suit :

Lemme 15. *On a l'égalité :*

$$\frac{|H^1(G, \mathcal{R}_L^+)|}{(\mathcal{R}_L^{+G} : \mathcal{R}_K^+)} = \frac{|Sgl_L^G|}{|Sgl_K|} = 2^{-|PLD_{L/K}^2|},$$

où $PLD_{L/K}^2$ désigne l'ensemble des places 2-adiques de K qui se dessignent (i.e. qui perdent leur signe logarithmique) dans l'extension L/K .

En fin de compte, le théorème fondamental de cette section s'écrit :

Théorème 17. *Dans une 2-extension cyclique L/K de corps de nombres logarithmiquement signés, le nombre de 2-classes logarithmiques signées invariantes par $G = \text{Gal}(L/K)$ est donné, sous la condition de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}}_L^*) = 0$, par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{C}}s_L^G| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}}s_K|}{2^{|PLD_{L/K}^2|}} \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^{cs} : K^{cs}] (\tilde{\mathcal{E}}_K^+ : \tilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+))}.$$

On retrouve donc par là l'expression du nombre de genres logarithmiques signés obtenue plus loin en toute généralité (Corollaire 21). Et la condition de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}}_L^*) = 0$, qui s'écrit encore $(\mathcal{D}_L^{IG} : \widetilde{\mathcal{D}}_L^{IG}) = 1$, contient bien la condition de primitivité (faible) $(\mathcal{D}_L^{IG} : \overline{\mathcal{D}}_L^{IG}) = 1$ introduite dans [J1].

Bibliographie

- [AJ] B. ANGLÈS, J.-F. JAULENT, *Théorie des genres des corps globaux*. Manuscripta Math. **101** (2000), 513–532.
- [J1] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*. J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [J2] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques signées des corps de nombres*. J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 455–474.

Jean-François JAULENT
 Institut de Mathématiques
 Université Bordeaux I
 351, cours de la Libération
 33405 Talence Cedex, France
 E-mail : jaulent@math.u-bordeaux.fr