Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Olivier Robert

Quelques paires d'exposants par la méthode de Vinogradov

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 14, nº 1 (2002), p. 271-285

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2002__14_1_271_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 271–285

Quelques paires d'exposants par la méthode de Vinogradov

par Olivier ROBERT

RÉSUMÉ. Pour majorer les sommes d'exponentielles de la forme $\sum_{m\sim M} \mathrm{e}(f(m))$ uniquement en fonction de la dérivée k-ième de f, on dispose soit de la méthode de van der Corput pour les petites valeurs de k, soit de celle de Vinogradov pour les grandes valeurs de k. La jonction entre ces deux méthodes, tenant compte des progrès récents de l'une et de l'autre, est obtenue ici en étudiant les cas $k = 9, 10, 11$ par une méthode qui relève essentiellement de celle de Vinogradov. Des calculs difficiles, effectués sur ordinateur, rendent impossible une étude exhaustive.

ABSTRACT. In order to estimate exponential sums of the form $\sum_{m\sim M} \mathrm{e}(f(m))$ under conditions on the k-th derivative of f, one may use either van der Corput's method for small values of k, or Vinogradov's method for large values of k. We give the junction of both methods, according to the latest improvements for each of them, by studying the values $k = 9, 10, 11$; our argument essentially relies on Vinogradov's method. However, the computations involved here are rather intricate, which makes impossible an exhaustive study for larger values of k.

1. Introduction

Soit $k \geq 2$ un entier fixé. Soient M un entier grand et $T > 0$ réel. Étant donnée une fonction $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ de classe C^k vérifiant

$$|f^{(j)}(x)| \asymp \frac{T}{M^j} \; (M \leq x \leq 2M, \; j = 1, \dots, k) \tag{1.1}$$

ainsi que d'autres propriétés qui seront détaillées aux §6 et §7. On considère la somme d'exponentielles

$$S_M = \sum_{M<m\leq 2M} \mathrm{e}(f(m)) \tag{1.2}$$

avec la notation classique $e(x) = e^{2i\pi x}$.

Manuscrit reçu le 21 mai 2001.

La théorie des paires d'exposants (cf [1], §3) a pour but d'obtenir des majorations de la forme

$$S_M \ll \left(\frac{T}{M}\right)^{\mu} M^{\nu} + \frac{M}{T}$$

où (μ, ν) est une paire d'exposants. De telles majorations sont obtenues en combinant plusieurs méthodes selon les tailles respectives de T et M.

Le cas particulier des paires d'exposants de la forme $(\mu_k, 1-(k-1)\mu_k)$ où μ_k est un réel positif donne lieu à des majorations du type

$$S_M \ll_k M\left(\frac{T}{M^k}\right)^{\mu_k} + \frac{M}{T}$$

qui fournissent un résultat non trivial dès que la dérivée k-ième de la phase $f(x)$ est petite, i.e pour des valeurs du paramètre $\alpha = \frac{\log M}{\log T}$ telles que $\alpha > 1/k$.

Par la méthode de van der Corput, les résultats connus sont les suivants : pour $k = 8$, on prend $\mu_8 = \frac{1}{254}$ par la méthode classique [1] qui est amélioré en $\frac{1}{204+\varepsilon}$,pour tout ε, dans [6]. Pour $k = 9$, le résultat classique est $\mu_9 = \frac{1}{510}$ [1], qui est amélioré en $\frac{1}{370}$ dans [6]. Pour $k = 10$, le résultat classique est $\mu_{10} = \frac{1}{1022}$ qui est amélioré en $\frac{1}{716}$ dans [6], puis en $\frac{1}{649}$ dans [5].

Dans le cas de la méthode de Vinogradov, les résultats ne sont écrits que pour les grandes valeurs de k et sous une forme un peu différente (voir par exemple [4]). Prenant en compte des améliorations de Wooley [7] sur les intégrales de Vinogradov et en faisant un découpage minutieux sur les tailles relatives de T et M, nous obtenons les résultats suivants, qui correspondent relativement à $\mu_{10} = \frac{1}{615}$ et $\mu_{11} = \frac{1}{915}$ (à la place de $\mu_{11} = \frac{1}{2046}$ dans [1]).

Théorème 1. *Le couple* $(1/615, 1-9/615)$ *est une paire d'exposants.*

Ce résultat est démontré au paragraphe 6.

Théorème 2. *Le couple* $(1/915, 1-10/915)$ *est une paire d'exposants.*

Le paragraphe 7 est consacré à la démonstration du théorème 2.

Par contre, pour $k = 9$, la même méthode donne moins bien que le résultat $\mu_9 = \frac{1}{370}$ cité plus haut. On peut alors conclure que, d'après les résultats cités plus haut, la méthode de van der Corput domine pour $k \leq 9$ et que pour $k \geq 10$ la méthode de Vinogradov prend le relai.

Application à l'ordre de $\zeta(\sigma + it)$. Soit $\sigma \in [1/2, 1]$. L'ordre de la fonction zêta de Riemann dans la bande critique est caractérisé par la fonction

$$\mu(\sigma) = \inf\left\{\xi > 0 \,\middle|\, \zeta(\sigma+it) \ll_{\sigma,\xi} t^{\xi}\right\}$$

Récemment, à l'aides des paires d'exposants $(1/204, 1-7/204)$ et $(1/370, 1-8/370)$ (cf [6]), Sargos a déduit de nouvelles estimations de $\mu(\sigma)$:

$$\mu(1-8/204) \leq 1/208 \text{ et } \mu(1-9/370) \leq 1/370.$$

De manière analogue, les paires d'exposants obtenues dans les théorèmes 1 et 2 de notre article permettent d'obtenir des majorations de $\mu(\sigma)$ pour $\sigma = \sigma_{10} = 1 - 2/123$ et $\sigma = \sigma_{11} = 1 - 11/915$.

Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au chapitre 21.2 de [3].

Théorème 3. *Avec les notations ci-dessus, on a le résultat suivant :*

$$\mu(1-10/615) \leq 1/615$$
$$\textit{et} \quad \mu(1-11/915) \leq 1/915.$$

Les majorations du Théorème 3 ne peuvent pas être obtenues comme conséquence de la formule (21.2.5) de [3]. En effet, en posant $\gamma = \frac{988481}{64648176}$, on obtient par la formule (21.2.5) de [3] pour $R = 6$ l'inégalité

$$\mu(1-\gamma) \leq 0,00186\ldots$$

En utilisant la convexité de $\mu(\sigma)$ entre les valeurs σ_{10} et σ_{11}, on obtient l'amélioration suivante

$$\mu(1-\gamma) \leq 0,00150\ldots$$

Plus généralement, on obtient de nouvelles majorations de $\mu(\sigma)$ pour $1 - 9/370 \leq \sigma \leq 1 - 11/915$.

Notations. La notation $u \ll v$ ou $u = O(v)$ signifie que u est un nombre complexe, v est un nombre positif, et qu'il existe une constante positive C qui dépend au plus des constantes impliquées lors d'éventuels calculs précédents, telle que $|u| \leq Cv$;

$u \ll_\varepsilon v$ ou $u = O_\varepsilon(v)$ signifie de plus que la majoration est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, la constante C pouvant dépendre de ε.

La notation $u \ll_{p,k,\varepsilon} v$ signifie que la majoration a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, la constante C pouvant dépendre de p, k, ε.

$u \asymp v$ signifie que l'on a à la fois $u \ll v$ et $v \ll u$.

Le symbole $\square$ se place à la fin d'une démonstration, ou bien à la fin d'un énoncé pour signaler que celle-ci est omise.

2. Double grand crible

Soit ℓ et p deux entiers fixés ≥ 2. Pour N entier grand, on considère les intégrales de Vinogradov suivantes :

$$J_{p,\ell}(N) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}(x_1 n + \cdots + x_\ell n^\ell) \right|^{2p} d\mathbf{x} \tag{2.1}$$

Soit $k \geq 3$ un entier fixé. Soit M un entier grand et $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que

$$\left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| \asymp \lambda \tag{2.2}$$

où λ est un réel positif petit. On cherche à majorer la somme suivante

$$S = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}(f(m)) \tag{2.3}$$

sous la condition supplémentaire

$$M \geq \lambda^{-(k-1)/(2k-3)}. \tag{2.4}$$

Dans les deux résultats qui suivent, on pose en outre

$$N := \left[\lambda^{-1/(2k-3)}\right]. \tag{2.5}$$

On a les deux résultats suivants :

Lemme 1. *Avec les notations précédentes, et sous la condition* (2.4)*, on a*

$$S^{2p} \ll_{p,k} M^{2p}\lambda \left(1 + \frac{1}{M\lambda}\right) \left(\frac{J_{p,k-1}(N)}{N^{2p-k(k-1)/2}}\right) \log M \tag{2.6}$$

Lemme 2. *Sous les mêmes conditions que précédemment, on a aussi :*

$$S^{2p} \ll_{p,k} M^{2p}\lambda N^{k-1} \left(\frac{J_{p,k-2}(N)}{N^{2p-(k-2)(k-1)/2}}\right) \log M \tag{2.7}$$

Démonstration des lemmes 1 et 2.

Résultat préliminaire : On commence par établir la majoration suivante :

$$S^{2p} \ll_{p,k} \frac{M^{2p}}{N^{2p}} N^{k(k-1)/2} \mathcal{F}_{p,k}\left(N; \frac{1}{M\lambda}\right) \log M. \tag{2.8}$$

où $\mathcal{F}_{p,k}\left(N; \frac{1}{M\lambda}\right)$ désigne le nombre de solutions du système diophantien suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_j(\underline{n}) - s_j(\underline{n}') = 0, \quad j = 1, \dots, (k-2) \\ |s_{k-1}(\underline{n}) - s_{k-1}(\underline{n}')| \leq 1/(M\lambda) \end{array} \right. \tag{2.9}$$

avec les notations

$$\underline{n} = (n_1, \dots, n_p) \in \{1, \dots, N\}^p \tag{2.10}$$

et

$$s_j(\underline{n}) = \sum_{i=1}^{p} n_i^j. \tag{2.11}$$

Les lemmes 1 et 2 proviennent de deux majorations différentes de $\mathcal{F}_{p,k}\left(N; \frac{1}{M\lambda}\right)$.

On commence par effectuer un décalage de Weyl puis un développement de Taylor de la phase ; on obtient

$$S \ll \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M-N} \left| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}(f'(m)n + \cdots + f^{(k-1)}(m)n^{k-1}/(k-1)! + v_{m,k}(n)) \right|$$

avec

$$v_{m,k}(n) = \int_0^n \frac{(n-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(m+t)dt.$$

En effectuant une sommation d'Abel, on obtient pour un certain entier $N_1 \in [1, N]$ la majoration

$$S \ll \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \mathrm{e}(f'(m)n + \cdots + f^{(k-1)}(m)n^{k-1}/(k-1)!) \right|$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$S^p \ll \frac{M^{p-1}}{N^p} \mathcal{S}_1 \tag{2.12}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \mathrm{e}(f'(m)n + \cdots + f^{(k-1)}(m)n^{k-1}/(k-1)!) \right|^p, \tag{2.13}$$

que l'on peut encore écrire

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{\underline{n}} a(m)b(\underline{n})\mathrm{e}(\{f'(m)\}s_1(\underline{n}) + \cdots + f^{(k-1)}(m)s_{k-1}(\underline{n})/(k-1)!)$$

où les $a(m)$ sont de module 1 et où $b(\underline{n})$ désigne la fonction caractéristique de $\{1, \ldots, N_1\}^p$.

Afin de majorer $\mathcal{S}_1$, nous allons utiliser ici le lemme 7.5 de [1] dont nous donnons un énoncé adapté :

On considère des réels $X_j, X_j > 0$ avec j entier dans $[1, k-1]$ et on considère des vecteurs $\mathbf{x}(m) \in \mathbf{X} = \prod_{j=1}^{k-1}[-X_j, X_j]$ indexés par m entier dans $[1, M]$ et des vecteurs $\mathbf{x}(\underline{n}) \in \mathbf{Y} = \prod_{j=1}^{k-1}[-Y_j, Y_j]$ indexés par $\underline{n} \in$

$[1,N]^{k-1}$.On a alors la majoration suivante :

$$\left|\sum_m\sum_{\underline{n}} a(m)b(\underline{n})\mathrm{e}\big(x_1(m)y_1(\underline{n})+\cdots+x_{k-1}(m)y_{k-1}(\underline{n})\big)\right|^2 \tag{2.14}$$
$$\ll_k \prod_{j=1}^{k-1}(1+X_jY_j)\Bigg(\sum_{\substack{m,m'\\ |x_j(m)-x_j(m')|\le 1/2Y_j\\ j=1,\ldots,k-1}}|a(m)a(m')|\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{\underline{n},\underline{n}'\\ |y_j(\underline{n})-y_j(\underline{n}')|\le 1/2X_j\\ j=1,\ldots,k-1}}|b(\underline{n})b(\underline{n}')|\Bigg)$$

On applique ce résultat à la somme $\mathcal{S}_1$ en considérant les

$$\mathbf{x}(m)=\left(\{f'(m)\},\ldots,\{\frac{f^{(k-2)}(m)}{(k-2)!}\},\frac{f^{(k-1)}(m)-f^{(k-1)}(1)}{(k-1)!}\right), \tag{2.15}$$

où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x, avec $X_j=1$ pour $j\in[1,k-2]$ et $X_{k-1}\asymp Mk\lambda$ et en considérant les

$$\mathbf{y}(\underline{n})=(s_1(\underline{n}),\ldots,s_{k-1}(\underline{n})) \tag{2.16}$$

avec $Y_j=2pN^j$ pour $j\in[1,k-1]$. On obtient en particulier

$$|\mathcal{S}_1|^2\ll_k N^{(k-1)(k-2)/2}(1+M\lambda N^{k-1})\mathcal{B}\mathcal{F}_{p,k}\left(N;\frac{1}{M\lambda}\right) \tag{2.17}$$

où $\mathcal{B}$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble suivant

$$\Big\{(q,m)\in[-M,M]\times[1,M]\ :\ |\Delta_q f^{(k-1)}(m)|\le N^{1-k}$$
$$\text{et }\left|\left\{\frac{f^{(j)}(m+q)}{j!}\right\}-\left\{\frac{f^{(j)}(m)}{j!}\right\}\right|\le N^{-j}\quad (j=1,\ldots,k-2)\Big\}.$$

Pour majorer $\mathcal{B}$ sous la seule hypothèse (2.2), on ne sait pas exploiter toutes les conditions simultanément ; nous conservons seulement les conditions pour $j=k-2$ et $j=k-1$. En outre pour tout j et tout (q,m), on a

$$\left|\{\frac{f^{(j)}(m+q)}{j!}\}-\{\frac{f^{(j)}(m)}{j!}\}\right|\ll\|\frac{1}{j!}\Delta_q f^{(j)}(m)\|,$$

avec la notation $\Delta_q f(m)=f(m+q)-f(m)$ et où $\|x\|$ désigne la distance du réel x à $\mathbb{Z}$.

On se ramène ici à majorer la quantité suivante

$$\mathcal{B}_1=\#\Big\{(q,m)\in[-M,M]\times[1,M]\ :\ \|\Delta_q f^{(k-2)}(m)\|\le N^{2-k}$$
$$\text{et }|\Delta_q f^{(k-1)}(m)|\le N^{1-k}\Big\}$$

Un argument classique permet d'obtenir

$$\mathcal{B}_1 \ll_k M + \frac{M}{\lambda N^{2k-3}} + \frac{\log M}{\lambda N^{k-1}}.$$

En effet, on a la majoration

$$\mathcal{B}_1 \ll M + \sum_{1\leq |q| \leq Q} \#\left\{m \ : \ \|\Delta_q f^{(k-2)}(m)\| \leq N^{2-k}\right\}$$

avec $Q \asymp (\lambda N^{k-2})^{-1}$. On utilise alors le lemme 3.1.2 de [3] pour majorer la quantité

$$\#\left\{m \ : \ \|\Delta_q f^{(k-2)}(m)\| \leq N^{2-k}\right\}$$

pour chaque valeur de q. D'après les choix effectués pour N et M en (2.5) et (2.4), on en déduit que $\mathcal{B} \ll_k M \log M$. En reportant cette estimation dans $\mathcal{S}_1$ puis dans (2.12), on obtient bien (2.8).

Démonstration du lemme 1. Le lien entre les systèmes diophantiens et les moyennes de sommes d'exponentielles s'écrit :

$$\mathcal{F}_{p,k}\left(N; \frac{1}{M\lambda}\right)$$
$$= \sum_{|\nu|\leq 1/(M\lambda)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}(x_1 n + \cdots + x_{k-1}n^{k-1})\right|^{2p} \mathrm{e}(-\nu x_{k-1}) d\mathbf{x}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_{p,k}\left(N; \frac{1}{M\lambda}\right) \ll \left(1 + \frac{1}{M\lambda}\right) J_{p,k-1}(N)$$

□

Démonstration du lemme 2. Il suffit d'abandonner la dernière ligne du système (2.9) et le nombre de solutions du nouveau système diophantien obtenu est par définition $J_{p,k-2}(N)$. □

3. Rappels sur les intégrales de Vinogradov

Soit $\ell \geq 2$ et $p \geq 2$ deux entiers fixés. Le but de cette section est d'obtenir des majorations d'intégrales de Vinogradov de la forme (2.1). De manière heuristique, on s'attend à des résultats du type

$$J_{p,\ell}(N) \ll_{p,l,\varepsilon} N^{p+\varepsilon} + N^{2p-\ell(\ell+1)/2+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Toutefois, de telles estimations ne sont actuellement obtenues que pour des valeurs de p trop grandes par rapport à ℓ (cf Corollaire 1.4 de [7]).

Notre but ici est d'énoncer des résultats intermédiaires, mais pour des plus petites valeurs de p.

3.1. La formule de récurrence de Wooley. Avec la notation (2.1), étant donnée une majoration de la forme

$$J_{p,\ell}(N) \ll_{p,\ell} N^{2p-\ell(\ell+1)/2+\Delta} \tag{3.2}$$

où $\Delta = \Delta(p,\ell) \in [0, \ell(\ell+1)/2]$, les méthodes de type Vinogradov permettent de déduire de (3.2) une estimation de $J_{p+\ell,\ell}(N)$ de la forme

$$J_{p+\ell,\ell}(N) \ll_{p,\ell} N^{2(p+\ell)-\ell(\ell+1)/2+\widetilde{\Delta}}$$

où $\widetilde{\Delta} < \Delta$ dépend de Δ, p et ℓ.

Nous utilisons ici un résultat dû à Wooley(cf Théorème 1.1 de [7]) : On construit la suite $(\phi(m,m'))_{(m,m')\in[1,\ell]^2}$ de la manière suivante :

Pour tout $j = 1, \dots, \ell$, on pose

$$\phi(j,j) = 1/\ell. \tag{3.3}$$

En outre, pour chaque $j = 2, \dots, \ell$ fixé, on définit les termes $\phi(j, J-1)$ pour $J = j, \dots, 2$ à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \phi^*(j, J-1) &= \frac{\ell + (\ell^2 + (J-1)(J-2)/2 - \Delta)\phi(j,J))}{2\ell^2} \\ \phi(j, J-1) &= \min(\phi^*(j, J-1), 1/\ell) \end{aligned} \tag{3.4}$$

On pose enfin

$$\theta = \min_{1\le j\le \ell} \phi(j,1). \tag{3.5}$$

Lemme 3. *Avec les notations* (3.2),(3.3),(3.4) *et* (3.5), *on pose*

$$\delta = (1-\theta)\Delta + \ell(\ell\theta - 1). \tag{3.6}$$

On a alors

$$J_{p+\ell,\ell}(N) \ll_{p,\ell} N^{2(p+\ell)-\ell(\ell+1)/2+\delta}.$$

□

3.2. Un résultat dû à Hua. Par un argument classique sur les polynômes symétriques, on peut aisément obtenir la majoration

$$J_{p,\ell}(N) \ll_{p,\ell} N^p$$

pour tout $1 \le p \le \ell$, ce qui fournit (3.1) dans ce cas. Nous énonçons maintenant un lemme dû à Hua qui en outre établit (3.1) pour $p = \ell + 1$ (cf [2])

Lemme 4. *Avec la notation* (2.1), *on a*

$$J_{\ell+1,\ell}(N) \ll_{\varepsilon,\ell} N^{\ell+1+\varepsilon}. \tag{3.7}$$

□

4. Étude de quelques intégrales de Vinogradov

Dorénavant, pour ℓ, p entiers ≥ 2, on notera $\delta(p,\ell)$ tout réel$\in [0, \ell(\ell+1)/2]$ vérifiant

$$J_{p,\ell}(N) \ll_{p,\ell} N^{2p-\ell(\ell+1)/2+\delta(p,\ell)} \tag{4.1}$$

4.1. Énoncé des résultats.

Lemme 5. *Avec les notations* (2.1) *et* (4.1), *on peut choisir les valeurs suivantes pour* $\delta(p,\ell)$ *:*

$$\begin{aligned} \delta(73,8) &= 4,45 \\ \delta(97,8) &= 2,088 \\ \delta(100,9) &= 4,725 \\ \delta(136,9) &= 1,945. \end{aligned}$$

4.2. Quelques remarques. Le choix des couples (p,ℓ) pour lesquels on cherche des majorations du type (4.1) a été effectué en vue d'une application au §5. En effet, sous les hypothèses et notations du §2 ainsi qu'avec la notation (4.1), les lemmes 1 et 2 fournissent respectivement les majorations

$$S \ll_{p,k} M\lambda^{a(p,k)} \left(1 + \frac{1}{M\lambda}\right)^{1/2p} (\log M)^{1/2p} \tag{4.2}$$

et

$$S \ll_{p,k} M\lambda^{b(p,k)} (\log M)^{1/2p} \tag{4.3}$$

pour tout $p \geq 1$, où l'on a posé

$$a(p,k) = \frac{2k-3-\delta(p,k-1)}{2p(2k-3)} \tag{4.4}$$

et

$$b(p,k) = \frac{k-2-\delta(p,k-2)}{2p(2k-3)}. \tag{4.5}$$

Pour chaque valeur de k, en l'occurrence $k = 9, 10$ ou 11 dans nos applications, on cherche une valeur judicieuse de p qui rende maximale $a(p,k)$, ainsi qu'une valeur de p' qui rende maximale $b(p',k)$.

4.3. Démonstration du Lemme 5. Le principe de la démonstration est le suivant : pour $\ell = 8$ ou 9, en utilisant le lemme 4, on peut choisir

$$\delta(\ell+1,\ell) = \ell(\ell+1)/2 - (\ell+1) + \varepsilon$$

pour chaque $\varepsilon > 0$. En itérant le lemme 3 ν fois, on obtient des valeurs $\delta(\ell+1+\nu\ell,\ell)$ vérifiant (4.1), pour ν entier ≥ 1.

Afin d'effectuer numériquement ces calculs, nous utilisons une version affaiblie du lemme 3. En effet, avec les notations du §3.1, on a toujours $\Delta < \ell^2$, donc

$$\Delta(1-\theta) + \ell(\ell\theta - 1) \leq \Delta(1-\phi(\ell,1)) + \ell(\ell\phi(\ell,1) - 1)$$

ce qui signifie que pour $\Delta = \delta(p,\ell)$ fixé, en considérant la suite $\phi(\ell,j)$ construite en (3.4), on peut choisir

$$\delta(p+\ell,\ell) = \Delta(1-\phi(\ell,1)) + \ell(\ell\phi(\ell,1) - 1) \tag{4.6}$$

C'est cette dernière formule itérative que nous allons utiliser pour réaliser ces calculs.

À titre d'exemple, pour $\ell = 8$, on peut choisir $\delta(9,8) = 27 + \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 = 10^{-10}$. À la huitième itération (4.6), on obtient une valeur $\delta(73,8) = 4,43623744\ldots$ À la onzième itération, on obtient $\delta(97,8) = 2,08790520\ldots$

On procède de manière analogue pour $\ell = 9$ en partant de la valeur numérique $\delta(10,9) = 35 + \varepsilon_0$ avec ε_0. À la dixième et à la quatorzième itération respectivement, on obtient les valeurs $\delta(100,9) = 4,72385013\ldots$ et $\delta(136,9) = 1,94490066\ldots$, ce qui permet de conclure. □

4.4. Programme informatique. Nous donnons ici deux algorithmes rédigés en langage Maple qui permettent d'utiliser de manière numérique la formule itérative (4.6).

À chaque itération, les algorithmes contiennent $\delta(p,\ell)$ dans la variable "`delta`" et les exposants $a(p,\ell+1)$ et $b(p,\ell+2)$ des formules (4.4) et (4.5) respectivement stockés dans les variables "`a`" et "`b`".

Algorithme pour $\ell = 8$.

```
ℓ:=8; delta:=27.0000000001;
for p from 17 by ℓ to 97 do tot:= 1/ℓ;
for i from ℓ by -1 to 1 do
tot:=min((ℓ+(ℓ*ℓ+(i-1)*(i-2)/2-delta)*tot)/(2*ℓ*ℓ),1/ℓ);
od; print(''p='',p); delta:= delta*(1-tot)+ℓ*(ℓ*tot-1);
a:=(2*ℓ-1-delta)/(2*p*(2*ℓ-1));
b:=(ℓ-delta)/(2*p*(2*ℓ+1)); od;
```

Algorithme pour $\ell = 9$.

```
ℓ:=9; delta:=35.0000000001;
for p from 19 by ℓ to 136 do tot:= 1/ℓ;
for i from ℓ by -1 to 1 do
tot:=min((ℓ+(ℓ*ℓ+(i-1)*(i-2)/2-delta)*tot)/(2*ℓ*ℓ),1/ℓ);
od; print(''p='', p); delta:= delta*(1-tot)+ℓ*(ℓ*tot-1);
a:=(2*ℓ-1-delta)/(2*p*(2*ℓ-1));
b:=(ℓ-delta)/(2*p*(2*ℓ+1)); od;
```

5. Application aux sommes d'exponentielles

5.1. Un critère de dérivée neuvième. Soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^9 vérifiant

$$|f^{(9)}(x)| \asymp \lambda_9, \ 1 \leq x \leq M. \tag{5.1}$$

Lemme 6. *Sous la condition* (5.1), *on a*

$$S \ll M\lambda_9^{1/208} \left(1 + \frac{1}{M\lambda_9}\right)^{1/146} \quad \text{pour } M \geq \lambda_9^{-8/15} \tag{5.2}$$

Démonstration. D'après le lemme 1, le lemme 5 et la formule (4.4), on a

$$S \ll M\lambda_9^{a(73,8)} \left(1 + \frac{1}{M\lambda_9}\right)^{1/146} (\log M)^{1/146} \text{ pour } M \geq \lambda_9^{-8/15}$$

avec $a(73, 8) = (15 - \delta(73, 8))/(146.15) = 1/207,5829\ldots.$ On obtient donc bien l'estimation voulue. □

5.2. Deux critères de dérivée dixième. Soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{10} vérifiant

$$|f^{(10)}(x)| \asymp \lambda_{10}, \ 1 \leq x \leq M. \tag{5.3}$$

Lemme 7. *Sous la condition* (5.3), *on a les deux estimations suivantes :*

$$S \ll M\lambda_{10}^{1/277} \left(1 + \frac{1}{M\lambda_{10}}\right)^{1/200} \quad \text{pour } M \geq \lambda_{10}^{-9/17} \tag{5.4}$$

$$S \ll M\lambda_{10}^{1/558} \text{ pour } M \geq \lambda_{10}^{-9/17}. \tag{5.5}$$

Démonstration. 1) D'après le lemme 1, le lemme 5 et la formule (4.4), on a

$$S \ll M\lambda_{10}^{a(100,9)} \left(1 + \frac{1}{M\lambda_{10}}\right)^{1/200} (\log M)^{1/200} \text{ pour } M \geq \lambda_{10}^{-9/17}$$

avec $a(100, 9) = (17 - \delta(100, 9))/(200.17) = 1/276,98574\ldots.$ On obtient donc bien l'estimation voulue pour (5.4) .

2) D'après le lemme 1, le lemme 5 et la formule (4.5), on a

$$S \ll M\lambda_{10}^{b(97,8)} (\log M)^{1/194} \text{ pour } M \geq \lambda_{10}^{-9/17}$$

avec $b(97, 8) = (8 - \delta(97, 8))/(194.17) = 1/557,84844\ldots.$ On obtient donc bien l'estimation voulue pour (5.5). □

5.3. Un critère de dérivée onzième. Soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{11} vérifiant

$$|f^{(11)}(x)| \asymp \lambda_{11}, \ 1 \leq x \leq M. \tag{5.6}$$

Lemme 8. *Sous la condition* (5.6), *on a*

$$S \ll M\lambda_{11}^{1/733} \text{ pour } M \geq \lambda_{11}^{-10/19} \tag{5.7}$$

Démonstration. On procède de même que précédemment. D'après le lemme 1, le lemme 5 et la formule (4.5), on a

$$S \ll M\lambda_{11}^{b(136,9)}(\log M)^{1/272} \text{ pour } M \geq \lambda_{11}^{-10/19}$$

avec $b(136,9) = (9 - \delta(136,9))/(272.19) = 1/732,53012\dots$. On obtient donc bien l'estimation voulue. □

6. Preuve du Théorème 1

Nous commençons par rappeler ce que l'on veut démontrer.

Soit $s < 1$ un réel fixé.

On cherche à montrer qu'il existe un réel positif $\eta = \eta(s) \leq 1/2$ et un entier $\ell = \ell(s) \geq 10$ tels que pour tout $M \geq 10$, pour tout $T > 0$, pour toute fonction *semi-monomiale* $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ que l'on écrit $f(x) = \phi(x) + v(x)$ avec

$$\phi(x) = T\left(\frac{x}{M}\right)^s, \text{ si } s \neq 0, \text{ et } \phi(x) = T\log x \text{ si } s = 0 \tag{6.1}$$

vérifiant

$$|v^{(j)}(x)| \leq \eta|\phi^{(j)}(x)|, \text{ pour } M \leq x \leq 2M \text{ et } 1 \leq j \leq \ell \tag{6.2}$$

et pour tout intervalle $I \subset [M, 2M]$, on a

$$|S_I| = \left|\sum_{m \in I \cap \mathbb{N}} \mathrm{e}(f(m))\right| \leq C\left(\frac{T}{M}\right)^{1/615} M^{1-9/615} + \frac{M}{T}$$

où $C = C(s, \eta, \ell)$ est un réel positif.

Étape 1. Nous utilisons la paire d'exposants $(1/370, 1 - 8/370)$ (voir le dernier paragraphe de [6]). Il existe donc un réel $\eta_1 = \eta_1(s) \leq 1/2$ et un entier $\ell_1 = \ell_1(s)$ assez grand, tel que pour tout $M \geq 10$, pour tout $T > 0$, pour toute fonction *semi-monomiale* $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions (6.1) et (6.2), et pour tout intervalle $I \subset [M, 2M]$ on ait

$$\left|\sum_{m \in I \cap \mathbb{N}} \mathrm{e}(f(m))\right| \leq C_1\left(\frac{T}{M}\right)^{1/370} M^{1-8/370} + \frac{M}{T}$$

avec $C_1 = C_1(s, \eta_1, \ell_1)$. Ce résultat fournit l'estimation attendue

$$|S_I| \leq C_1\left(\frac{T}{M}\right)^{1/615} M^{1-9/615} + \frac{M}{T}$$

dans le cas $T \leq M^{7{,}48}$.

Étape 2. Avec les choix précédents pour η_1 et ℓ_1 on a pour $j = 9, 10$.

$$\frac{T}{M^j} \ll_{s,\eta,\ell} f^{(j)}(x) \ll_{s,\eta,\ell} \frac{T}{M^j}$$

Sous l'hypothèse précédente, le Théorème 3 de [5] fournit pour tout intervalle I l'estimation

$$|S_I| \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^9}\right)^{1/360{,}5} \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^{10}}\right)^{1/615}$$

pour $M^{7{,}2} \leq T \leq M^{7{,}583}$ pour un certain $C_2 = C_2(s, \eta_1, \ell_1) > 0$. (l'exposant $1/360{,}5$ ci-dessus provient de l'exposant $1/360 - \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$) de [5], pour un choix convenable de ε).

Étape 3. Toujours sous l'hypothèse précédente, le lemme 6 fournit

$$|S_I| \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^9}\right)^{1/208} \left(\frac{M^8}{T}\right)^{146} \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^{10}}\right)^{1/615}$$

pour $M^{7{,}576} \leq T \leq M^8$ et

$$|S_I| \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^9}\right)^{1/208} \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^{10}}\right)^{1/615}$$

pour $M^8 \leq T \leq M^{8{,}48}$, pour un certain $C_3 = C_3(s, \eta_1, \ell_1) > 0$.

Étape 4. Enfin, sous l'hypothèse précédente, le lemme 7 fournit

$$|S_I| \leq C_4 M \left(\frac{T}{M^{10}}\right)^{1/615}$$

pour $M^{8{,}12} \leq T \leq M^{10}$.

Pour $T \geq M^{10}$, la majoration triviale fournit l'estimation voulue. Pour conclure la démonstration, il suffit donc de conserver les valeurs η_1 et ℓ_1 obtenues à l'étape 1, et de poser $C = \max(C_1, C_2, C_3, C_4)$ pour obtenir le résultat voulu. □

7. Preuve du Théorème 2

Soit $s < 1$ un réel fixé. De manière analogue à la démonstration précédente, on cherche à montrer qu'il existe un réel positif $\eta{=}\eta(s) \leq 1/2$ et un entier $\ell = \ell(s) \geq 10$ tels que pour tout $M \geq 10$, pour tout $T > 0$, pour toute fonction *semi-monomiale* $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ (vérifiant les hypothèses (6.1) et (6.2)), et pour tout intervalle $I \subset [M, 2M]$, on ait

$$|S_I| = \left| \sum_{m \in I \cap \mathbb{N}} \mathrm{e}(f(m)) \right| \leq C' \left(\frac{T}{M}\right)^{1/915} M^{1-10/915} + \frac{M}{T}$$

où $C' = C'(s, \eta, \ell)$ est un réel positif.

Étape 1. Comme dans la première étape du paragraphe précédent, nous utilisons la paire d'exposants $(1/370, 1-8/370)$. Il existe donc un réel positif $\eta_1 = \eta_1(s) \leq 1/2$ et un entier $\ell_1 = \ell_1(s)$ assez grand, disons $\ell_1 \geq 10$, tel que pour tout $M \geq 10$, pour tout $T > 0$, pour toute fonction *semi-monomiale* $f : [M, 2M] \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions (6.1) et (6.2), et pour tout intervalle $I \subset [M, 2M]$ on ait

$$\left| \sum_{m \in I \cap \mathbb{N}} \mathrm{e}(f(m)) \right| \leq C_1 \left(\frac{T}{M} \right)^{1/370} M^{1-8/370} + \frac{M}{T}$$

avec $C_1 = C_1(s, \eta_1, \ell_1)$. Ce résultat fournit l'estimation attendue

$$|S_I| \leq C_1 \left(\frac{T}{M} \right)^{1/915} M^{1-10/915} + \frac{M}{T}$$

dans le cas $T \leq M^{7{,}64}$.

Étape 2 Avec les choix précédents pour η_1 et ℓ_1, on a pour $j = 9, 10, 11$

$$\frac{T}{M^j} \ll_{s,\eta,\ell} f^{(j)}(x) \ll_{s,\eta,\ell} \frac{T}{M^j}.$$

Sous l'hypothèse précédente, le lemme 6 fournit

$$|S_I| \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^9} \right)^{1/208} \left(\frac{M^8}{T} \right)^{1/146} \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^{11}} \right)^{1/915}$$

pour $M^{7{,}51} \leq T \leq M^8$ et

$$|S_I| \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^9} \right)^{1/208} \leq C_2 M \left(\frac{T}{M^{11}} \right)^{1/915}$$

pour $M^8 \leq T \leq M^{8{,}41}$ pour un certain $C_2 = C_2(s, \eta_1, \ell_1) > 0$.

Étape 3 Toujours sous l'hypothèse précédente, le lemme 7 fournit

$$|S_I| \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^{10}} \right)^{1/558} \leq C_3 M \left(\frac{T}{M^{11}} \right)^{1/915}$$

pour $M^{8{,}12} \leq T \leq M^{8{,}436}$ pour un certain $C_3 = C_3(s, \eta_1, \ell_1) > 0$.

Étape 4 Toujours sous l'hypothèse précédente, le lemme 7 fournit l'estimation

$$|S_I| \leq C_4 M \left(\frac{T}{M^{10}} \right)^{1/277} \left(\frac{M^9}{T} \right)^{1/200} \leq C_4 M \left(\frac{T}{M^{11}} \right)^{1/915}$$

pour $M^{8{,}427} \leq T \leq M^9$, et

$$|S_I| \leq C_4 M \left(\frac{T}{M^{10}} \right)^{1/277} \leq C_4 M \left(\frac{T}{M^{11}} \right)^{1/915}$$

pour $M^9 \leq T \leq M^{9{,}56}$, pour un certain $C_4 = C_4(s, \eta_1, \ell_1) > 0$.