

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Éric SAIAS

Étude du graphe divisoriel 5

Tome 36, n° 1 (2024), p. 175-214.

<https://doi.org/10.5802/jtnb.1276>

© Les auteurs, 2024.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 4.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/fr/>



*Le Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux est membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*

<http://www.centre-mersenne.org/>

e-ISSN : 2118-8572

Étude du graphe divisoriel 5

par ÉRIC SAIAS

Pour Michel Balazard, à l'occasion de son 2⁶ème anniversaire

RÉSUMÉ. Le graphe divisoriel est le graphe non orienté dont les sommets sont les entiers strictement positifs et deux entiers sont reliés par une arête quand le petit divise le grand. On appelle chaîne de longueur ℓ toute suite finie d'entiers strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_ℓ deux à deux distincts tels que pour tout i vérifiant $1 \leq i < \ell$, a_i et a_{i+1} sont reliés par une arête du graphe divisoriel.

Notons $f(x)$ la longueur maximum d'une chaîne de la restriction du graphe divisoriel aux entiers inférieurs ou égaux à x . Tenenbaum a donné un procédé constructif, directement transposable sous forme d'algorithme, qui établit l'existence d'une chaîne d'entiers $\leq x$ dont on sait maintenant qu'il fournit la minoration $f(x) \geq (c + o(1))x / \log x$ avec $c = 0,07$ quand $x \rightarrow +\infty$. On donne ici une variante de son procédé constructif qui permet d'obtenir $c = 0,37$ pour la même minoration. On profite de l'occasion pour faire une large part aux mathématiques expérimentales.

Par ailleurs, on donne également une minoration d'une variante de la fonction $f(x)$, qui permettra de répondre à une question d'Erdős dans un travail ultérieur.

ABSTRACT. The divisor graph is the non oriented graph whose vertices are the positive integers, two vertices being connected by an edge when the smallest one divides the largest one. We call chain of length ℓ any finite sequence of pairwise distinct positive integers a_1, a_2, \dots, a_ℓ , such that, for $1 \leq i < \ell$, a_i and a_{i+1} are connected by an edge in the divisor graph.

Let $f(x)$ denote the maximum length of the restriction of the divisor graph to the integers smaller than or equal to x . Tenenbaum has given a constructive procedure, directly transposable in form of an algorithm, which establishes the existence of a chain of integers $\leq x$, from which the lower bound $f(x) \geq (c + o(1))x / \log x$ is now known to follow, with $c = 0,07$ when $x \rightarrow +\infty$. We give here a variant of his constructive procedure that allows to get a similar lower bound with $c = 0,37$. We take advantage of the opportunity to make a large part to experimental mathematics.

Moreover, we also give a lower bound of a variant of the function $f(x)$, which will enable us to answer a question of Erdős in a forthcoming paper.

1. Introduction générale

(a). Définition de $f(x)$ et historique de l'étude de son comportement asymptotique. On appelle graphe divisoriel le graphe non orienté dont les sommets sont les entiers strictement positifs et deux entiers sont reliés par une arête quand le petit divise le grand. On appelle chaîne de longueur ℓ toute suite finie d'entiers strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_ℓ deux à deux distincts tels que a_i est un diviseur ou un multiple de a_{i+1} pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq \ell - 1$. On note $f(x)$ la longueur maximum d'une chaîne de la restriction du graphe divisoriel aux entiers $\leq x$.

C'est en lien avec le travail [4] d'Erdős, Freud et Hegyvári que Pomerance [10] introduit la fonction $f(x)$ et résout une conjecture de Hegyvári en montrant que $f(x) = o(x)$. Avec la minoration de Pollington [9], on sait en 1983 qui est l'année de parution des trois articles [4, 9, 10] que

$$\frac{x}{\exp\{(2 + o(1))\sqrt{\log x \log \log x}\}} \leq f(x) = o(x), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Les travaux de Tenenbaum [22] et moi-même [14, 16, 17] ont permis d'établir dix ans plus tard qu'il existe deux réels a et b avec $b > a > 0$ tels que pour tout $x \geq 2$

$$(1.1) \quad a \frac{x}{\log x} \leq f(x) \leq b \frac{x}{\log x}.$$

Des considérations théoriques et des calculs numériques amènent à la

Conjecture E. *Il existe un réel c vérifiant $7 < c < 13$ tel que*

$$f(x) \sim c \frac{x}{\log x}, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Nous allons nous focaliser ici sur la minoration effective de

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/(x/\log x))$$

que l'on peut à présent aborder grâce au travail numérique de Weingartner et ses coauteurs sur les entiers à diviseurs denses.

(b). Mathématiques expérimentales et mathématiques théoriques.

Ce que l'on appelle ici mathématiques expérimentales consiste pour l'essentiel à faire des observations sur une chaîne particulière notée $\mathcal{C}(100)$, d'entiers ≤ 100 et de longueur maximum $f(100) = 77$. Nous verrons en particulier qu'elle a une forme d'autosimilarité.

Nous montrerons ensuite que certaines des propriétés de $\mathcal{C}(100)$ que l'on aura observées, sont en lien avec les chaînes que l'on va construire pour minorer $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Comme en physique, on passe donc en quelque sorte, des mathématiques expérimentales aux mathématiques théoriques.

Par ailleurs notre minoration de $f(x)$ s'obtient par un algorithme récursif assez court, que l'on peut donc facilement programmer.

Enfin on va donner également une preuve, assez longue cette fois, d'une minoration d'une variante de $f(x)$ en construisant une longue chaîne qui a pour l'essentiel encore la même structure que $\mathcal{C}(100)$.

2. Observation d'une chaîne particulière d'entiers ≤ 100 de longueur maximum $f(100) = 77$

Chadozeau [2] a montré que $f(100) = 77$, par un calcul à la main qui est loin d'être immédiat. Donnons un exemple de chaîne (que l'on notera $\mathcal{C}(100)$) d'entiers ≤ 100 formée de 77 entiers

$$(2.1) \quad \begin{aligned} &62-31-93-1-87-29-58-2-92-46-23-69-3-57 \\ &\quad -19-38-76-4-68-34-17-85-5-65-13-52-26 \\ &\quad -78-6-24-48-96-12-72-36-18-54-27-81-9 \\ &\quad -63-21-42-84-28-56-14-98-49-7-35-70-10 \\ &\quad -60-30-90-45-15-75-25-50-100-20-40-80 \\ &\quad -16-32-64-8-88-44-22-66-33-99-11-77 \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, donnons certaines des notations que nous utiliserons au long de ce présent travail. On désigne par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs, par \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers, et par \mathbb{R}^{+*} l'ensemble des réels strictement positifs.

On utilisera la lettre n pour désigner un élément générique de \mathbb{N}^* , les lettres p ou q pour désigner un élément générique de \mathbb{P} et la lettre x pour désigner un élément générique de \mathbb{R}^{+*} . On utilise la lettre y pour désigner un élément générique de $\mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$, et la lettre z pour désigner un élément générique de $\{1\} \sqcup \mathbb{P}$.

On note $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier $n \geq 2$ avec la convention $P(1) = 1$. On note

$$\mathcal{S}(x, y) = \{n \leq x : P(n) \leq y\} \text{ et } \Psi(x, y) = |\mathcal{S}(x, y)|.$$

On désigne également par $\mathcal{C}(x, y)$ une chaîne générique d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$.

Avant de donner nos différentes observations sur cette chaîne, signalons qu'elles sont spécifiques à cet exemple (2.1) de chaîne d'entier ≤ 100 de longueur maximum $f(100) = 77$. Nous ne prétendons pas que toutes les chaînes d'entiers ≤ 100 de longueur 77 partagent les mêmes propriétés que (2.1). C'est même le contraire : nous avons choisi $\mathcal{C}(100)$ car, entre toutes ces chaînes, c'est l'exemple qui nous a paru avoir le plus de propriétés remarquables.

Notre première observation sur cette chaîne consiste à constater que les entiers ayant le même plus grand facteur premier ont tendance à être regroupés en « sous-chaînes ». Cela signifie qu'ils forment un ensemble d'entiers consécutifs dans la chaîne. Par exemple ceux dont le plus grand facteur

premier est 7 sont regroupés à la quatrième ligne. Pour faire apparaître cette structure, on récrit cette quatrième ligne sous la forme

$$(2.2) \quad 7(9-3-6-12-4-8-2-14-7-1-5-10)$$

On a donc mis en facteur ce plus grand facteur premier commun qu'est ce nombre 7. En divisant par 7 toute la chaîne (2.2) on obtient la chaîne

$$(2.3) \quad 9-3-6-12-4-8-2-14-7-1-5-10$$

qui est naturellement une chaîne $\mathcal{C}(100/7, 7)$ d'entiers de $\mathcal{S}(100/7, 7)$. En effectuant ce changement d'écriture pour toutes les sous-chaînes « à $P(n)$ constant », on récrit la chaîne $\mathcal{C}(100)$ sous la forme

$$(2.4) \quad \begin{array}{cccccccc} 31(2-1-3) & 29(3-1-2) & 23(4-2-1-3) & 19(3-1-2-4) & 17(4-2-1-5) & 13(5-1-4-2-6) & & \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\ \dots & 3(2-8-16-32-4-24-12-6-18-9-27-3) & 7(9-3-6-12-4-8-2-14-7-1-5-10) & & & & & \\ & -5(2-12-6-18-9-3-15-5-10-20-4-8-16) & -2(8-16-32-4) & -11(8-4-2-6-3-9-1-7) & & & & \end{array}$$

Sous cette forme (2.4), on appellera « première ligne » la sous-chaîne formée des entiers allant de $62 = 31 \times 2$ jusqu'à $78 = 13 \times 6$. On appellera « étage du haut » de cette première ligne la suite des entiers

$$31 \times 2, 31 \times 1, 31 \times 3, 29 \times 3, 29 \times 1, 29 \times 2, 23 \times 4, 23 \times 2, \dots, 13 \times 6.$$

Et dans l'étage du bas de cette première ligne, on a les cinq entiers 1, 2, 3, 4 et 5. On appellera alors naturellement deuxième ligne la sous-chaîne formée des entiers de $6 = 3 \times 2$ à $70 = 7 \times 10$ et troisième ligne la sous-chaîne formée des entiers de $10 = 5 \times 2$ à $77 = 11 \times 7$.

En regardant (2.4), on voit que l'on peut préciser notre première observation. En effet c'est pour tout nombre premier p de l'intervalle $[7, 31]$ que l'ensemble des entiers n de la chaîne $\mathcal{C}(100)$ vérifiant $P(n) = p$, forme une sous-chaîne de $\mathcal{C}(100)$ que l'on écrira $p\mathcal{C}(100/p, p)$.

Pour $p \in \{2, 3, 5\}$, c'est un peu différent. Cette fois c'est uniquement « presque tous » les entiers de $\mathcal{C}(100)$ qui appartiennent à $p\mathcal{S}(x/p, p)$ qui peuvent être regroupés en une chaîne de la forme $p\mathcal{C}(100/p, p)$. Les entiers de $\mathcal{C}(100) \cap (\bigcup_{p=2}^5 p\mathcal{S}(x/p, p))$ qui n'appartiennent pas aux chaînes $p\mathcal{C}(100/p, p)$ sont les petits entiers 2, 3, 4 et 5 qui apparaissent à l'étage du bas de la première ligne.

Quand $y \geq x$, on a $\mathcal{S}(x, y) = \{n \leq x\}$. Cela nous amène à parfois utiliser la notation $\mathcal{C}(100/p)$ à la place de $\mathcal{C}(100/p, p)$ quand $p > 10$.

On observe que dans la première ligne de (2.4), les sous-chaînes $p\mathcal{C}(100/p)$ de l'étage du haut sont « connectées » entre elles par les petits entiers 1, 2, 3, 4 et 5 de l'étage du bas. Comme ces petits entiers n'appartiennent pas aux $p\mathcal{C}(x/p)$, on les appellera « connecteurs extérieurs ».

Notons au passage que l'on est obligé de séparer ainsi deux sous-chaînes $p\mathcal{C}(100/p)$ et $p'\mathcal{C}(100/p')$ avec $p' > p > 10 = \sqrt{100}$. En effet si elles étaient directement accolées, cela obligerait l'entier extrémité de $p'\mathcal{C}(100/p')$ voisin

de la sous-chaîne $p\mathcal{C}(100/p)$ d'être un multiple de $p'p$. Or c'est impossible car $p'p > 100$.

Au contraire, dans les deuxième et troisième lignes de la chaîne $\mathcal{C}(100)$, les sous-chaînes voisines $p\mathcal{C}(100/p, p)$ et $p'\mathcal{C}(100/p', p')$ avec $p < p'$ sont directement accolées, sans connecteur extérieur. Plus précisément elles sont reliées entre elles par l'extrémité pa (avec $P(a) \leq p$) de la sous-chaîne $p\mathcal{C}(100/p, p)$, qui divise l'extrémité voisine de $\mathcal{C}(x/p', p')$. On appellera « connecteur intérieur » cet entier pa . (Si on veut être plus précis, pa est le connecteur de $p\mathcal{C}(100/p, p)$ et $p'\mathcal{C}(100/p', p')$, intérieur à $p\mathcal{C}(100/p, p)$). Dans le cas de notre chaîne $\mathcal{C}(100)$, les connecteurs intérieurs sont 6, 9, 10, 16 et 8.

Tout cela nous amène à appeler « composante extérieure » de $\mathcal{C}(100)$ la sous-chaîne de $\mathcal{C}(100)$ allant de $62 = 31 \times 2$ à $78 = 13 \times 6$, et « composante intérieure » la sous-chaîne complémentaire qui va de $6 = 3 \times 2$ à $77 = 11 \times 7$.

Résumons-nous. La chaîne $\mathcal{C}(100)$ est de la forme

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{ext}}(100) - \mathcal{C}_{\text{int}}(100)$$

avec

$$\mathcal{C}_{\text{ext}}(100) = \begin{array}{ccccccc} p_6\mathcal{C}\left(\frac{100}{p_6}\right) & p_5\mathcal{C}\left(\frac{100}{p_5}\right) & \dots & p_1\mathcal{C}\left(\frac{100}{p_1}\right) \\ & \diagdown \quad \diagup & & \diagdown \quad \diagup \\ & 1 & & 2 & & & 5 \end{array}$$

et

$$\mathcal{C}_{\text{int}}(100) = p'_1\mathcal{C}\left(\frac{100}{p'_1}, p'_1\right) - p'_2\mathcal{C}\left(\frac{100}{p'_2}, p'_2\right) - \dots - p'_5\mathcal{C}\left(\frac{100}{p'_5}, p'_5\right)$$

où les p_j et p'_h sont deux à deux distincts avec

$$\begin{aligned} \{p_1, p_2, \dots, p_6\} &= \{p : 13 \leq p \leq 31\} \\ \{p'_1, p'_2, \dots, p'_5\} &= \{p : 2 \leq p \leq 11\}, \end{aligned}$$

Portons maintenant notre attention sur la chaîne $\mathcal{C}(14, 7) := \mathcal{C}(100/7, 7)$ qui apparaît dans $\mathcal{C}(100)$ (voir (2.3)). Elle possède la même structure que la chaîne $\mathcal{C}(100)$; les entiers ayant le même plus grand facteur premier forment des sous-chaînes. De plus, $\mathcal{C}(14, 7)$ est aussi partitionnée en composante intérieure et composante extérieure.

$$(2.5) \quad \mathcal{C}(14, 7) : \underbrace{3(3-1-2-4) - 2(2-4-1) - 7(2-1)}_{\text{composante intérieure}} \quad \underbrace{5(1-2)}_{\text{composante extérieure}}$$

Cette structure induite apparaît aussi dans une certaine mesure pour les autres sous-chaînes $\mathcal{C}(x/p, p)$ de $\mathcal{C}(100)$. Cette chaîne vérifie donc, au moins de manière approximative, une forme d'autosimilarité.

Autre observation : les deux ordres de l'arithmétique, l'ordre usuel \leq et l'ordre divisoriel, sont simultanément présents dans la chaîne (2.4). En effet les connecteurs extérieurs sont les entiers ≤ 5 , qui apparaissent par ordre croissant. Aussi toujours dans la composante extérieure, les nombres p des sous-chaînes $p\mathcal{C}(x/p)$ apparaissent cette fois par ordre décroissant. L'ordre divisoriel est lui présent dans le fait déjà observé que les entiers ayant le même plus grand facteur premier (à l'exception des entiers qui servent de connecteur extérieur dans la composante extérieure) sont regroupés en une seule sous-chaîne.

Signalons que Mazet a montré en 2008 ([5, théorème 3.0.2]) que pour tout y nombre premier fixé, dès que x est suffisamment grand relativement à y , la restriction du graphe divisoriel à $\mathcal{S}(x, y)$ est un graphe Hamiltonien. En désignant par $f(x, y)$ la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$, je pense que l'on a la forme effective suivante du résultat de Mazet.

Conjecture P. *Pour tout $x \geq 4$ et tout y premier tels que $2 \leq y \leq \log x$, on a*

$$f(x, y) = \Psi(x, y).$$

C'est le moment de comparer certaines de nos observations avec le travail [4] d'Erdős, Freud et Hegyvári. Dans leur théorème 1, ils introduisent la fonction $L(x)$ qui représente le minimum sur toutes les permutations σ de $\{1, 2, \dots, [x]\}$ de la quantité $\max_{1 \leq h < N} \text{ppcm}(\sigma(h), \sigma(h+1))$, et ils montrent que $L(x) \sim x^2/4 \log x$. Décrivons une partie de la permutation qu'ils construisent pour établir leur majoration.

D'abord, ils regroupent les entiers n tels que $P(n) > 4 \log x$ en « blocs » à $p := P(n)$ constant. Ils disposent leurs blocs de gauche à droite de telle sorte que la suite des nombres premiers p qui leur est associée est décroissante.

Quand $P(n) > x/4\sqrt{\log x}$, ils séparent deux blocs voisins par un « séparateur ». La suite des séparateurs est croissante. L'ensemble de ces séparateurs est un intervalle de nombres entiers de la forme $[1, (1 + o(1)) x / \log x]$. Leurs blocs sont nos sous-chaînes ; leurs séparateurs sont nos connecteurs extérieurs, et enfin cette partie de leur permutation est notre composante extérieure.

Quand $4 \log x < P(x) \leq x/4\sqrt{\log x}$, les auteurs remarquent qu'ils n'ont plus besoin de séparateurs. S'ils n'en utilisent pas, cette succession de blocs directement accolés les uns aux autres est l'analogie de notre composante intérieure.

Les propriétés communes de la chaîne $\mathcal{C}(100)$ avec cette permutation montrent que les deux questions sont liées. Ce travail [4] d'Erdős, Freud et Hegyvári est en fait même à l'origine de tous les travaux ultérieurs sur le graphe divisoriel.

Une question de fond est de chercher dans quelle mesure ces observations sur la chaîne $\mathcal{C}(x)$ avec $x = 100$ s'étendent à tous les x . Faire cette

recherche constitue une piste naturelle pour avancer vers une preuve de la conjecture E.

La construction d'une chaîne avec à la fois une composante intérieure et une composante extérieure est délicate. C'est dû au fait qu'il faut choisir des connecteurs extérieurs qa (avec q premier et $P(a) \leq q$) dans l'ensemble $q\mathcal{S}(x/q, q)$. La difficulté est alors de pouvoir s'assurer que ces entiers qa ne seront pas utilisés dans les sous-chaînes $q\mathcal{C}(x/q, q)$.

C'est pourquoi dans beaucoup de travaux consacrés à la minoration de $f(x)$ ou de l'une de ses variantes ([14, 15, 19, 22]) les chaînes construites ne contiennent pas de composante extérieure. (A noter aussi le travail [8] où cette fois il n'y a pas de composante intérieure).

En réalité, on construit d'emblée des chaînes $\mathcal{C}(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$ ayant la structure

$$(2.6) \quad \mathcal{C}(x, y) : \left| \begin{array}{l} p_1\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_1}, p_1\right) \cdots \cdots \cdots p_j\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_j}, p_j\right) \\ -p_{j+1}\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_{j+1}}, p_{j+1}\right) \cdots \cdots \cdots p_k\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_k}, p_k\right) \end{array} \right.$$

où $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ constitue un ensemble $\mathcal{P}(x, y)$ de nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à $\min(y, \sqrt{x})$. On reconnaît la structure de la composante intérieure des chaînes $\mathcal{C}(x/p, p)$ de $\mathcal{C}(100)$ (voir (2.5) pour $p = 7$). C'est une illustration du passage des mathématiques expérimentales aux mathématiques théoriques.

3. Introduction aux ensembles $\mathcal{A}(x, y)$ de Schinzel–Szekeres

Notons $n = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)}$ la décomposition de l'entier $n \geq 2$ en facteurs premiers avec

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{\Omega(n)}.$$

On définit la fonction de Schinzel–Szekeres [20] par

$$S(n) = \max_{1 \leq k \leq \Omega(n)} p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k^2$$

et on note par convention $S(1) = 1$. On note

$$\mathcal{A}(x, y) = \{n : S(n) \leq x, P(n) \leq y\}.$$

avec $A(x, y) = |\mathcal{A}(x, y)|$.

C'est Tenenbaum [22] qui a compris que ces ensembles $\mathcal{A}(x, y)$ jouaient un rôle central pour obtenir une bonne estimation asymptotique de $f(x)$, que ce soit pour sa minoration comme pour sa majoration (voir aussi [13, 17, 19]). Ces ensembles sont encore au cœur de ce présent travail ne serait-ce que dans l'énoncé des deux principaux résultats (voir les théorèmes 4.1 et 5.2 ci-dessous).

On vérifie facilement que l'on a pour tout $x \geq 1$ et tout $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$, la formule fondamentale

$$(3.1) \quad \mathcal{A}(x, y) = \{1\} \bigsqcup \bigsqcup_{p \leq \min(y, \sqrt{x})} p \mathcal{A}\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

Or si on identifie une chaîne à l'ensemble de ses entiers, les chaînes $\mathcal{C}(x, y)$ ayant la structure (2.6) vérifient

$$\mathcal{C}(x, y) = \bigsqcup_{p \in \mathcal{P}(x, y)} p \mathcal{C}(x/p, p)$$

où $\mathcal{P}(x, y)$ est un ensemble de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\min(y, \sqrt{x})$.

Les chaînes $\mathcal{C}(x, y)$ de la forme (2.6) ont donc une propriété d'autosimilarité fortement apparentée à celle des ensembles $\mathcal{A}(x, y)$.

On regroupe ci-dessous des propriétés de $S(n)$ qui nous seront utiles. On omet les preuves qui sont faciles.

Lemme 3.1. *Soit $n \geq 2$. On note pour (i), (ii) et (iii), $n = pm$ avec $p = P(n)$. On a*

- (i) $S(n) = \max(p^2, pS(m))$
- (ii) $S(m) \leq S(n)/p$
- (iii) $nP^-(n) \leq S(n) \leq np$.

Soit m un diviseur de n . On a

- (iv) $S(m) \leq S(n)$.

4. Introduction aux longues chaînes d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$

Notons

$$\mathcal{S}'(x, y) = \{n \geq x : P(n) \leq y \text{ et } \mu^2(n) = 1\}$$

$$\text{et } \mathcal{A}'(x, y) = \{n : S(n) \leq x, P(n) \leq y \text{ et } \mu^2(n) = 1\}$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius. Comme Pollington [9], Tenenbaum [22] travaille dans la restriction du graphe divisoriel aux entiers sans facteur carré. Il a trouvé un court algorithme récursif permettant de construire une famille de chaînes $\mathcal{C}'(x, y)$ ayant la structure (2.6) et vérifiant

$$\mathcal{A}'(x/2, y) \subset \mathcal{C}'(x, y) \subset \mathcal{S}'(x, y).$$

On en déduit immédiatement que

$$(4.1) \quad f(x, y) \geq |\mathcal{A}'(x/2, y)|.$$

Or on sait que $f(x) \ll x/\log x$ (voir [17]) et que $|\mathcal{A}'(x, +\infty)| \asymp x/\log x$ (voir [16]). C'est donc un fait remarquable : avec le travail de Tenenbaum, on dispose d'un procédé algorithmique qui fournit une chaîne d'entiers $\leq x$ dont la longueur est du même ordre de grandeur que $f(x)$ elle-même.

Plus précisément, grâce aux travaux de Pomerance, Thompson et Weingartner [11] et [29] sur les entiers à diviseurs denses, on sait maintenant que la formule (4.1) entraîne la minoration

$$(4.2) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x/\log x} > 0,07.$$

Il est intéressant de disposer d'une chaîne d'entiers $\leq x$ comme celle de Tenenbaum, c'est-à-dire de longueur ayant le même ordre de grandeur que celui de $f(x)$ et dont tous les entiers sont sans facteur carré. Cela permet notamment de « greffer » à différents endroits de la chaîne, des entiers avec facteur carré, de telle sorte que la nouvelle suite finie d'entiers soit encore une chaîne. La chaîne de Tenenbaum a été utilisée deux fois comme cela : pour établir la minoration du théorème 1 de [19] et pour démontrer le théorème de [6].

D'un autre point de vue, il est également intéressant de chercher à améliorer la minoration (4.2) pour se rapprocher de la conjecture $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x/\log x} > 7$. C'est ce que nous avons fait. En utilisant une variante de l'algorithme de Tenenbaum, nous avons établi l'analogie de son résultat, obtenu en enlevant la restriction pour les entiers d'être sans facteur carré.

Théorème 4.1. *Soient $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$. Il existe alors une chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ vérifiant*

$$\mathcal{A}(x/2, y) \subset \mathcal{C}(x, y) \subset \mathcal{S}(x, y).$$

On en déduit immédiatement le

Théorème 4.2. *Soit $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$. On a alors*

$$f(x, y) \geq A\left(\frac{x}{2}, y\right).$$

Avec l'aide des travaux de Weingartner sur les entiers à diviseurs denses [28, 29, 30], on en déduit la minoration suivante

Corollaire 4.3. *On a*

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x/\log x} > 0,37.$$

Ce dernier résultat est relatif à la valeur $y = +\infty$ de la minoration de $f(x, y)$ du théorème 4.2. Intéressons nous maintenant aux petites valeurs de y relativement à x . Rappelons (Conjecture P vers la fin de la section 2) que l'on conjecture que $f(x, y) = \Psi(x, y)$ pour $2 \leq y \leq \log x$. Le résultat suivant constitue un premier jalon vers cette conjecture.

Notons

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\log x \cdot \log y}, & (2 \leq y \leq (\log x)^{1/3}(\log \log x)^{2/3}), \\ \frac{\log y}{y}, & ((\log x)^{1/3}(\log \log x)^{2/3} < y \leq (\log x)^{1/2} \log \log x), \\ \frac{y}{\log x \cdot \log y}, & ((\log x)^{1/2} \log \log x < y \leq \log x). \end{cases}$$

Théorème 4.4. *On a uniformément pour tout $x \geq 8$ et tout y premier tels que $2 \leq y \leq \log x$,*

$$(1 + O(E(x, y))) \frac{\Psi(x, y)}{1 + \frac{y}{\log x}} \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y).$$

Remarquons que l'on a en particulier $f(x, y) \sim \Psi(x, y)$ dès que x tend vers $+\infty$ de telle sorte que $y = o(\log x)$.

Notons que la minoration (4.1) ne permet pas d'établir le théorème 4.4. En effet si on fait tendre x vers $+\infty$ de telle sorte que

$$(4.3) \quad \log y = o(\log \log x)$$

on a

$$|\mathcal{A}'(x, y)| \leq |\mathcal{S}'(x, y)| \leq 2^{\pi(y)} \leq 2^y = o\left(\exp\left\{\frac{y \log \log x}{2 \log y}\right\}\right).$$

Alors que d'après le théorème d'Ennola (cf. [23, corollaire III 5.4]), on a dans la région (4.3)

$$\psi(x, y) \asymp \frac{1}{\pi(y)!} \prod_{p \leq y} \frac{\log x}{\log p} \gg \exp\left\{\frac{y \log \log x}{2 \log y}\right\}.$$

5. Introduction aux longues chaînes d'entiers de $\mathcal{A}(x, y)$

On s'intéresse à présent à une autre question relative aux longues chaînes d'entiers. Notons $R(x, z)$ le cardinal maximum de l'union de chaînes d'entiers $\leq x$ deux à deux disjointes et toutes de longueur z . Dans [13] on démontre l'encadrement

$$(5.1) \quad R(x, z) \asymp \frac{x}{\log z}, \quad (2 \leq z \leq f(x)),$$

qui sera utilisé pour répondre à une question d'Erdős.

Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}(x, +\infty) = \{n : S(n) \leq x\}, \\ A(x) &= |\mathcal{A}(x)| \end{aligned}$$

et désignons par $f_a(x)$ la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}(x)$. Pour établir (5.1) on met en lumière une équation fonctionnelle approchée

de $R(x, z)$ qui fait intervenir la fonction $f_a(x)$. Pour itérer cette équation fonctionnelle, on a besoin de la minoration

$$(5.2) \quad f_a(x) \gg x/\log x.$$

Pour démontrer cette minoration, ma première idée était ambitieuse : il s'agissait de montrer que $f_a(x)$ prend pour tout x la plus grande valeur possible, i.e. $f_a(x) = A(x)$ et on a (5.2) par l'estimation $A(x) \asymp x/\log x$ (voir le lemme 6.3 ci-dessous). Autrement dit, il s'agissait de confirmer l'

Hypothèse A. *Pour tout $x \geq 1$, la restriction du graphe divisoriel à $\mathcal{A}(x)$ est un graphe Hamiltonien.*

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

En effet, j'ai pris conscience que l'on pouvait réutiliser la méthode de minoration de la section 8 de [15]. Je me contente donc ici de montrer (5.2).

Théorème 5.1. *Il existe deux réels c et K avec $K > c > 0$ tels que pour tout $x \geq 2$, on a*

$$c \frac{x}{\log x} \leq f_a(x) \leq K \frac{x}{\log x}.$$

On a $f_a(x) \leq A(x) \asymp x/\log x$ (voir le lemme 6.3 ci-dessous). Pour la minoration on note $\mathcal{S}^*(x, y) = \{n : \sqrt{x} < n \leq x, P(n) \leq y\}$. Notons $f_a(x, y)$ (respectivement $f_a^*(x, y)$) la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}(x, y)$ (resp. $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}^*(x, y)$). S'il n'existe pas de chaîne d'entiers de $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}(x, y)$ (respectivement $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}^*(x, y)$), on convient d'écrire $f_a(x, y) = 0$ (resp. $f_a^*(x, y) = 0$).

Rappelons que l'on désigne par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de l'entier $n \geq 2$ avec la convention $P^-(1) = +\infty$. Notons également $A(x, y, z) = |\{n : S(n) \leq x : P(n) \leq y \text{ et } P^-(n) > z\}|$. On montre en fait le

Théorème 5.2. *Il existe un réel $M \geq 1$ tel que pour tout $x > 0$ et tout y premier, on a*

$$f_a(x, y) \geq f_a^*(x, y) \geq A\left(\frac{x}{M}, y, 2\right).$$

On sait que $A(x, x, 2) \asymp x/\log x$ (voir toujours le lemme 6.3). Donc la minoration $f_a(x) \gg x/\log x$ du théorème 5.1 résulte immédiatement du théorème 5.2.

6. Les ensembles $\mathcal{A}(x, y)$ et la fonction $A(x, y, z, t)$

Pour x et t des réels positifs, $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$ et $z \in \mathbb{P} \sqcup \{1\}$, on note $A(x, y, z, t) = \{n \leq x : P(n) \leq y, P^-(n) > z \text{ et } S(n) \leq xt\}$ et $A(x, y, z, t) =$

$|\mathcal{A}(x, y, z, t)|$. On rappelle que l'on note $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(x, y, 1, 1) = \{n : S(n) \leq x \text{ et } P(n) \leq y\}$. Pour mémoire, on récrit ci-dessous la formule fondamentale (3.1) et on la prouve

Lemme 6.1. *On a pour tout $x \geq 1$ et tout $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$,*

$$\mathcal{A}(x, y) = \{1\} \bigsqcup \bigsqcup_{p \leq \min(y, \sqrt{x})} p \mathcal{A}\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

Démonstration. Comme $x \geq 1$, $1 \in \mathcal{A}(x, y)$. Soit $n \in \mathcal{A}(x, y) \setminus \{1\}$. Alors $P(n) \leq y$, et par définition de $S(n)$ on a aussi $P(n) \leq \sqrt{x}$.

Soit maintenant $p \leq \min(y, \sqrt{x})$ et $n \geq 2$ avec $P(n) = p$. Alors toujours par définition de $S(n)$

$$\begin{aligned} n \in \mathcal{A}(x, y) &\iff n/p \in \mathcal{A}(x/p, p) \\ &\iff n \in p\mathcal{A}(x/p, p). \end{aligned} \quad \square$$

On a (voir [21, formule (2.7)])

Lemme 6.2. *Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{+*} \times (\mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}) \times (\mathbb{P} \sqcup \{1\}) \times [1, +\infty[$, on a*

$$A(x, y, z, t) = \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{xt})} A(x/p, p, z, t).$$

Cette identité va nous servir pour établir le

Lemme 6.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{P}$.*

Pour tout $(x, y, z, t) \in [2, +\infty[\times \mathbb{P} \times (\mathbb{P} \sqcup \{1\}) \times [1, +\infty[$ tel que

$$(6.1) \quad x \geq y \geq \sqrt{x}, \quad 1 \leq t \leq x \text{ et } z \leq z_0$$

on a

$$(6.2) \quad A(x, y, z, t) \asymp_{z_0} x \frac{\log 2t}{\log x}.$$

Démonstration. La majoration résulte de celle du théorème 1 de [16]. Pour la minoration, on a pour tout $t_0 \geq 1$

$$A(x, y, z, t) \geq A(x/t_0, y, z, tt_0).$$

Il suffit donc de prouver la minoration de (6.2) avec la condition supplémentaire $t \geq t_0$ où t_0 est une constante fixée. Or il résulte du lemme 1 de [18] qu'il existe une constante $t_0 \geq 2$ telle que

$$(6.3) \quad A(x, +\infty, z, t) \gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x}$$

sous les conditions $x \geq t \geq t_0$ et $1 \leq z \leq z_0$.

On supposera donc dorénavant $t \geq t_0 \geq 2$. Si $y > \sqrt{xt}$, on a en utilisant le lemme 6.2 et (6.3) que sous les conditions (6.1)

$$A(x, y, z, t) = A(x, +\infty, z, t) \gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x}.$$

Quand x, z et t sont fixés la fonction $A(x, y, z, t)$ est croissante en y . Pour établir la minoration de $A(x, y, z, t)$ de (6.2) dans le cas $y \leq \sqrt{xt}$, il suffit donc de le faire pour $y = \sqrt{x}$.

On a

$$\begin{aligned} A(x, \sqrt{x}, z, t) &\geq A(x, \sqrt{x}, z, t) - A(x, (xt)^{1/3}, z, t) \\ &= \sum_{(xt)^{1/3} < p \leq \sqrt{x}} A\left(\frac{x}{p}, p, z, t\right) \quad \text{pour } x > z_0^3, \text{ d'après le lemme 6.2.} \end{aligned}$$

Or pour $n \in \mathcal{A}\left(\frac{x}{p}, +\infty, z, t\right)$, on a $P(n) \leq \sqrt{xt/p} \leq p$ quand $p \geq (xt)^{1/3}$. Donc d'après (6.3)

$$\begin{aligned} \sum_{(xt)^{1/3} < p \leq \sqrt{x}} A\left(\frac{x}{p}, p, z, t\right) &= \sum_{(xt)^{1/3} < p \leq \sqrt{x}} A\left(\frac{x}{p}, +\infty, z, t\right) \\ &\gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x} \sum_{(xt)^{1/3} < p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \asymp x \frac{\log t}{\log x} \end{aligned}$$

quand $t \leq x^{1/4}$ et $x \geq 2^{12}$, d'après le postulat de Bertrand.

Par ailleurs, la minoration de (6.2) est banale quand x est borné. Enfin comme a montré cette minoration pour $t \leq x^{1/4}$, on en déduit qu'elle est vraie aussi pour $x^{1/4} < t \leq x$. \square

7. Entiers à diviseurs denses. Lien avec la fonction $S(n)$

Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par $1 = d_1(n) < d_2(n) < \dots < d_{\tau(n)}(n) = n$ la suite croissante de ses diviseurs. Par convention, on écrira que pour $n = 1$

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} = 1.$$

On dit que l'entier n est à diviseurs t -denses quand il vérifie

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t.$$

Le lien avec $S(n)$ est donné par la formule

$$(7.1) \quad S(n) = n \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)}, \quad (n \geq 1),$$

qui a été établie par Tenenbaum ([21, lemme 2.2]).

C'est Erdős [3] qui s'est le premier intéressé à ce type d'entiers en 1948. Ils ont été ensuite étudiés notamment par Tenenbaum et moi-même, entre 1986 et 1999 ([16, 18, 21, 22]). Les remarquables travaux de Weingartner depuis 2001, dont un avec Pomerance, un avec Pomerance et Thompson, et un avec Tenenbaum, ont énormément amélioré la connaissance que nous avons de ces entiers ([11, 12, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]).

Notons

$$D(x, t) = \left| \left\{ n \leq x : \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t \right\} \right|$$

et

$$D'(x, t) = \left| \left\{ n \leq x : \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t \text{ et } \mu^2(n) = 1 \right\} \right|.$$

En 2014, Weingartner ([28, corollaire 1.1]) a montré que pour tout réel $t \geq 2$ fixé, il existe un nombre réel $c_t > 0$ tel que

$$(7.2) \quad D(x, t) = c_t \frac{x}{\log x} \left(1 + O_t \left(\frac{1}{\log x} \right) \right), \quad (x \geq 2).$$

Deux ans plus tard, Pomerance, Thompson et Weingartner ont établi un résultat analogue pour $D'(x, t)$ (cela découle du théorème 3.1 de [11]) : il existe un nombre réel $c'_t > 0$ tel que

$$(7.3) \quad D'(x, t) = c'_t \frac{x}{\log x} \left(1 + O_t \left(\frac{1}{\log x} \right) \right), \quad (x \geq 2).$$

De plus, Weingartner a calculé (au sens démontré) une valeur approximative de certaines de ces réels c_t et c'_t ([29, corollaires 2 et 7]). Pour minorer $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)/(x/\log x)$, nous allons utiliser ses résultats suivants

$$(7.4) \quad c_2 = 1,2248 \dots$$

et

$$(7.5) \quad c'_2 = 0,0686 \dots$$

Enfin notons $D_{12,6}(x, 2)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ à diviseurs 2-denses et congrus à 6 modulo 12. Dans [30], Weingartner montre qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$(7.6) \quad D_{12,6}(x, 2) = (\gamma c_2 + o(1))x/\log x, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

avec

$$(7.7) \quad \gamma = 0,214 \dots$$

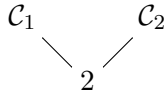
8. Opérations sur les chaînes

Les constructions de longues chaînes s’obtiennent en effectuant diverses opérations sur des sous-chaînes (voir [14, 22], etc.). Plutôt que de donner une définition formelle, on rappelle la nature de ces diverses opérations sur des exemples. Soit $\mathcal{C}_1 = 3-12-6$. La chaîne $6-12-3$ est l’inverse de \mathcal{C}_1 , et est notée $\text{inv } \mathcal{C}_1$. La chaîne $21-84-42$ est le produit de \mathcal{C}_1 par 7; on la note $7\mathcal{C}_1$. Il y a maintenant trois variantes de « collage » de deux chaînes.

Si $\mathcal{C}_2 = 30-5-10$, on appelle concaténation de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et on note $\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2$ la chaîne $3-12-6-30-5-10$.

Si $\mathcal{C}_2 = 6-42-7$, on appelle collage de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et on note encore $\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2$ la chaîne $3-12-6-42-7$.

Si $\mathcal{C}_2 = 10-5-15$, on appelle raccordement de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 par 2 la chaîne $3-12-6-2-10-5-15$. On la note



Signalons que l’on procèdera parfois en deux temps. Dans un premier temps on considèrera le résultat de ces opérations de collage comme une suite finie d’entiers et ce n’est que dans un deuxième temps que l’on établira que cette suite est en réalité une chaîne. On convient enfin que \emptyset est une chaîne.

9. Preuve des résultats énoncés à la section 4

(a). **Preuve du théorème 4.1.** Notons $p_1 < p_2 < \dots$ la suite croissante des nombres premiers. On pose par convention $p_0 = 2$ et $p_{-1} = 1/2$. On note

$$j = j(x, y) = \pi(\min(y, x/2))$$

$$\text{et } k = k(x, y) = \pi\left(\min\left(y, \sqrt{x/2}\right)\right).$$

On démontre le théorème 4.1 sous la forme plus précise suivante :

Proposition 9.1. *Soient $x \geq 2$ et y un nombre premier. Il existe une chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ d’entiers de $\mathcal{S}(x, y)$ qui commence en $2p_{j(x,y)-1}$, s’achève en 2 et contient $\mathcal{A}(x/2, y)$.*

Démonstration. On construit la chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ par récurrence sur $r \geq 1$ avec

$$(9.1) \quad 2^r \leq x < 2^{r+1} \quad \text{et} \quad y \geq 2.$$

On choisit la chaîne

$$\mathcal{C}(x, y) = \begin{cases} 1-2 & \text{si } r = 1 \\ 4-1-2 & \text{si } r = 2 \end{cases}$$

et on vérifie qu'elle convient quand $x < 8$. On suppose maintenant que $r \geq 3$, que toutes les chaînes $\mathcal{C}(x, y)$ avec $2 \leq x < 2^r$ et $y \geq 2$ ont été construites et que (9.1) est vérifiée. On a en particulier $j \geq k \geq 1$.

Pour tout $x \geq 4$ on définit $\mathcal{C}^*(x, p_1)$ comme étant la chaîne constituée de tous les entiers 2^m vérifiant $2 \leq 2^m \leq x$, par ordre décroissant.

On définit les deux suites finies d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$ suivantes :

$$\mathcal{D} = p_1 \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_1}, p_1\right) - p_2 \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_2}, p_2\right) - p_3 \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_3}, p_3\right) - \cdots - p_{k-1} \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_{k-1}}, p_{k-1}\right)$$

et

$$\mathcal{E} = \begin{cases} p_k \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_k}, p_k\right) & \text{si } k \geq 2 \\ \emptyset & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

(Si $k \leq 2$, on a donc $\mathcal{D} = p_1 \mathcal{C}^*(x/p_1, p_1)$).

Si $k = 1$, \mathcal{D} est une chaîne.

Supposons à présent $k \geq 2$. On a alors $x \geq 18$ d'où

$$j(x/p_2, p_2) = j(x/3, 3) = \pi(3) = 2.$$

Le premier entier de $p_2 \mathcal{C}(x/p_2, p_2)$ est donc égal à 12, qui est un multiple de 4, qui est le dernier entier de $p_1 \mathcal{C}^*(x/p_1, p_1)$. De même pour $3 \leq \ell \leq k$, en utilisant que $p_\ell \leq p_k \leq \sqrt{x/2}$, on a

$$j(x/p_\ell, p_\ell) = \pi(\min(p_\ell, x/2p_\ell)) = \pi(p_\ell) = \ell.$$

Le premier entier de $p_\ell \mathcal{C}(x/p_\ell, p_\ell)$ est donc égal à $2p_{\ell-1}p_\ell$, qui est un multiple de $2p_{\ell-1}$, qui est le dernier entier de $p_{\ell-1} \mathcal{C}(x/p_{\ell-1}, p_{\ell-1})$. Enfin par hypothèse de récurrence, tous les $p_\ell \mathcal{C}(x/p_\ell, p_\ell)$ sont des chaînes. Tout cela prouve que

$$(9.2) \quad \mathcal{D}, \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{D} - \mathcal{E} \text{ sont des chaînes d'entiers de } \mathcal{S}(x, y).$$

On définit maintenant l'inverse de $\mathcal{C}(x, y)$ par

$$(9.3) \quad \text{inv}\mathcal{C}(x, y) : \begin{cases} 2 - \mathcal{E} - 1 - \mathcal{D} & \text{si } j = k \\ 2 - 1 - \mathcal{D} - \mathcal{E} & \text{si } j = k + 1 \\ 2 - \mathcal{D} - \mathcal{E} - 1 - 2p_{j-1} & \text{si } j \geq k + 2. \end{cases}$$

On voit facilement que $\mathcal{C}(x, y)$ est une suite finie d'entiers de $\mathcal{S}(x, y)$ qui s'achève en 2. En utilisant (9.2) et en discutant suivant les différents cas, on vérifie que $\mathcal{C}(x, y)$ est également une chaîne qui commence en $2p_{j-1}$. En utilisant le lemme 6.1 et en réutilisant l'hypothèse de récurrence on voit donc que $\mathcal{C}(x, y) \supset \mathcal{A}(x/2, y)$. Cela achève la preuve de la proposition 9.1, et partant celle du théorème 4.1. \square

Remarque 1. On observe dans (9.3) que cet algorithme inverse à l'étape k les chaînes contruites à l'étape $k - 1$. Ce procédé est déjà présent dans

l'algorithme de Pollington [9]. En revanche il est à noter qu'il n'y a pas de tel passage à l'inverse dans l'algorithme de Tenenbaum [22].

Remarque 2. On peut transformer cette preuve en un programme informatique qui donne explicitement les chaînes $\mathcal{C}(x, y)$ pour x suffisamment petit. On a par exemple $|\mathcal{C}(4000, +\infty)| = 525$. C'est à comparer avec la chaîne de Tenenbaum $\Gamma(4000)$ (voir [22]) qui est de longueur 166.

(b). Preuve de la minoration (4.2). Notons $A'(x) = |\mathcal{A}'(x, x)|$. On commence par expliciter un lien entre A' et D' .

Lemme 9.2. *On a pour $x \geq 2$*

$$A'(x) \geq \frac{32}{7} D' \left(\frac{x}{2}, 2 \right) - O(1)$$

Démonstration. Soit x un réel suffisamment grand. Notons \mathcal{D}' l'ensemble des entiers n à diviseurs 2-denses, sans facteur carré et vérifiant $7 \leq n \leq x/2$.

Soit $n \in \mathcal{D}'$. Notons $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$ la suite croissante de ses diviseurs. Comme $d_{\tau(n)}/d_1 = n \geq 7 > 2$, il y a nécessairement des diviseurs intermédiaires, en particulier un diviseur d_2 . On a $d_2 = d_2/d_1 \leq 2$, donc $d_2 = 2$ et n est pair. Comme de nouveau $d_{\tau(n)}/d_2 = n/2 \geq 7/2 > 2$, il existe un diviseur d_3 . On a $d_3/2 = d_3/d_2 \leq 2$, donc $d_3 \leq 4$. Comme n est sans facteur carré, on a en fait $d_3 = 3$ et n est un multiple de 6. Soit $a \in \{1, 2, 3, 6\}$. On a donc n/a qui est entier et d'après le lemme 3.1 (iv) $S(n/a) \leq S(n) \leq x$. De plus comme n est sans facteur carré, les entiers $n, n/2, n/3$ et $n/6$ sont tous différents modulo 6. Les quatre ensembles \mathcal{D}'/a sont donc deux à deux disjoints et on en déduit déjà que $A'(x) \geq 4|\mathcal{D}'| = 4D'(x/2, 2) - 12$.

Continuons dans la même veine en montrant que

$$(9.4) \quad n \in \mathcal{D}' \implies n \text{ est divisible par } 5 \text{ ou } 7 \text{ ou } 11.$$

Pour cela, supposons que $n \in \mathcal{D}'$ et que n n'est pas divisible par 5. On a déjà vu alors que n est divisible par 6. Comme n est lui-même un diviseur de n et $n > 6$, on a $\tau(n) \geq 5$. Comme n n'est pas divisible par 5, on a $d_4 = 6$. Comme n est à diviseur 2-denses, il suit $d_5/6 = d_5/d_4 \leq 2$ d'où $d_5 \leq 12$. Comme n est sans facteur carré, cela entraîne que n est divisible par 7 ou 11, ce qui conclut.

Soit $a \in \{1, 2, 3, 6\}$ et φ_a l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathcal{D}'/a &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n/a &\longmapsto \frac{n}{a \operatorname{pgcd}(n, 5 \cdot 7 \cdot 11)}. \end{aligned}$$

Soit $m \in \operatorname{im} \varphi_a$. L'entier m est alors sans facteur carré et d'après le lemme 3.1 (iv) vérifie $S(m) \leq x$; cet entier est donc compté dans $A'(x)$. De plus m est premier à $5 \cdot 7 \cdot 11$, d'où $m \notin \bigsqcup_{a \in \{1, 2, 3, 6\}} \mathcal{D}'/a$ d'après (9.4). De

plus les quatre ensembles $\text{im } \varphi_a$ sont deux à deux disjoints pour la même raison que les quatre ensembles \mathcal{D}'/a le sont. Enfin l'entier m a au plus 7 préimages par φ_a ; cela permet de conclure que

$$\begin{aligned} A'(x) &\geq 4\left(1 + \frac{1}{7}\right)|\mathcal{D}'| \\ &= \frac{32}{7}D'\left(\frac{x}{2}, 2\right) - \frac{12 \times 8}{7}. \end{aligned}$$

On peut maintenant achever la preuve de la minoration (4.2). En utilisant successivement (4.1) avec $y = +\infty$, le lemme 9.2, et les formules (7.3) et (7.5), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\geq A'(x/2) \geq (32/7)D'(x/4, 2) - O(1) \\ &= (8c'_2/7 + o(1))x/\log x \\ &\geq (8/7) \cdot 0,068 \cdot x/\log x \quad \text{pour } x \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x/\log x} > 0,07. \quad \square$$

(c). Preuve du corollaire 4.3. Rappelons que l'on note $A(x) = |\{n : S(n) \leq x\}|$. et

$$D_{12,6}(x, 2) = |\{n \leq x : n \equiv 6(12) \text{ et } n \text{ est à diviseurs 2-denses}\}|.$$

Comme dans la preuve de la minoration (4.2) on commence par minorer A par les fonctions D .

Lemme 9.3. *On a pour tout $x \geq 12$*

$$A(x) \geq D(x/2, 2) + D_{12,6}(x/2, 2).$$

Démonstration. Soit $n \leq x/2$ avec $\max_{1 \leq i < \tau(n)} d_{i+1}/d_i \leq 2$. Comme

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} = \frac{S(n)}{n}$$

n est compté dans $A(x)$ et on a déjà $A(x) \geq D(x/2, 2)$. Si de plus $n \equiv 6(12)$ on a aussi d'après le lemme 3.1 (iv), $S(n/2) \leq x$. Comme $n/2$ est impair, il n'est pas lui à diviseur 2-denses. \square

On peut maintenant achever la preuve du corollaire 4.3. En utilisant successivement le théorème 4.2 avec $y = +\infty$, le lemme 9.3, les formules

(7.2) et (7.6), et enfin les formules (7.4) et (7.7), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\geq A(x/2) \geq D(x/4, 2) + D_{12,6}(x/4, 2) \\ &= \left[\frac{1+\gamma}{4} c_2 + o(1) \right] \frac{x}{\log x} \\ &> \frac{1,214}{4} \times 1,224 \frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x/\log x} > 0,37.$$

Remarque. Que ce soit avec l'algorithme de Tenenbaum ou celui du présent travail, on a une preuve courte d'une minoration de $f(x)$ par une fonction égale ou apparentée à $A(x/2)$. En revanche les différentes preuves ([16, 18, 28]) de $A'(x) \gg x/\log x$ et même de $A(x) \gg x/\log x$ sont assez voire très longues. Celles de [16] et [18] reposent sur les identités de Buchstab de A , et sont très (respectivement assez) longues pour [16] (resp. [18]). Celle de Weingartner [28] utilise la formule d'inversion de Laplace et est de longueur moyenne. De plus, elle fournit la minoration effective

$$(9.5) \quad A(x) \geq (0,75 + o(1))x/\log x.$$

Signalons que dans [13], on donne une preuve élémentaire de la minoration

$$(9.6) \quad A(x) \geq (\log 2 + o(1))x/\log x > (0,69 + o(1))x/\log x.$$

C'est un peu moins bien que (9.5), mais cette preuve est cette fois courte. Elle permet de plus de comprendre que le $x/\log x$ de $f(x) \asymp x/\log x$, est celui du théorème des nombres premiers.

(d). Preuve du théorème 4.4. La majoration $f(x, y) \leq \Psi(x, y)$ est banale.

La preuve de la minoration du théorème 4.4 se découpe en trois courtes étapes. La première est d'utiliser la minoration du théorème 4.2

$$f(x, y) \geq A\left(\frac{x}{2}, y\right).$$

La seconde consiste à utiliser la minoration suivante, qui résulte du lemme 3.1 (iii).

$$A\left(\frac{x}{2}, y\right) \geq \Psi\left(\frac{x}{2y}, y\right).$$

La troisième et dernière est de procéder comme dans la preuve du corollaire 2.3 de [7], en montrant que l'on a

$$\Psi\left(\frac{x}{2y}, y\right) = \frac{\Psi(x, y)}{1 + \frac{y}{\log x}} (1 + O(E(x, y)))$$

dans le domaine $2 \leq y \leq \log x$.

10. Utilisation d'inégalités de Buchstab en théorie multiplicative et additive des nombres

L'itération d'identités ou d'inéquations de Buchstab est un outil important de la théorie analytique des nombres. Suivant les cas on est amené à cribler par les petits ou les grands facteurs premiers. Notons $\pi(x, k) = |\{n \leq x : \omega(n) = k\}|$. Dans [1], Balazard crible par les petits facteurs premiers en prolongeant $\pi(x, k)$ par

$$\pi(x, z, k) := |\{n \leq x : P^-(n) > z \text{ et } \omega(n) = k\}|.$$

C'est en itérant l'identité de Buchstab que cette dernière fonction vérifie, qu'il a prouvé la conjecture d'Erdős suivante : pour tout x suffisamment grand, la suite $(\pi(x, k))_{k \geq 1}$ est unimodale.

L'itération d'identités de Buchstab a été également utilisée plusieurs fois dans le cadre de l'estimation de la fonction de comptage des entiers à diviseurs denses : dans [18, 22] et pour le Lemme 3 de [12], on itère l'identité de Buchstab obtenue en classant les entiers par leur plus petit facteur premier après avoir criblé par les petits facteurs premiers. Dans [15, 16, 17], c'est avec les grands facteurs premiers. Pour démontrer leur proposition 1, Pomerance et Weingartner [12] sont amenés cette fois à réutiliser la méthode d'itération d'inégalité de Buchstab de [16].

Voyons à présent ce qu'il en est pour les chaînes.

11. Preuve du théorème 5.2

(a). Schéma de la preuve. Les énoncés des théorèmes 4.1 et 5.2 se ressemblent : dans les deux cas, on minore une fonction apparentée à $f(x, y)$ par une fonction apparentée à $A(x, y)$. Cependant les preuves sont très différentes. Pour le premier cas, on l'a vu, on a utilisé un algorithme récursif. Alors que pour établir le théorème 5.2, on itère une inégalité de Buchstab.

L'itération d'une inégalité de Buchstab a été utilisée de manière cruciale dans plusieurs travaux relatifs aux longues chaînes du graphe divisoriel ([8, 14, 15, 19]). Cela a été en particulier le cas à la section 8 de [15] où on a construit une chaîne d'entiers de $]\sqrt{x}, x]$ de longueur $\asymp x/\log x$. On précise ici ce résultat en construisant une chaîne d'entiers de $]\sqrt{x}, x] \cap \mathcal{A}(x)$ toujours de longueur $\asymp x/\log x$. Pour cela on suivra de très près la démarche de la section 8 de [15].

On découpe la preuve du théorème 5.2 en huit étapes :

- (b) Définition de l'ensemble $\mathcal{A}^*(x, y)$
- (c) Lemmes
- (d) Définition de la fonction $h_a^*(x, y)$

- (e) Introduction à la construction d'une longue chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$
- (f) Construction d'une longue chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$
- (g) L'inégalité de Buchstab de $h_a^*(x, y)$
- (h) Un lemme d'itération d'inégalité de Buchstab
- (i) Fin de la preuve du théorème 5.2.

Le cœur de la preuve, qui est aussi l'étape qui demande le plus de travail, est la construction de la longue chaîne de la section (f). Nous expliquons les difficultés de cette construction à la sous-section (e).

(b). Définition de l'ensemble $\mathcal{A}^*(x, y)$. On note

$$\mathcal{A}^*(x, y) := \{n > \sqrt{x} : P(n) \leq \min(y, \sqrt{x}/27) \text{ et } S(n) \leq x\}.$$

(Attention au fait que ce n'est pas $\{n > \sqrt{x} : P(n) \leq y \text{ et } S(n) \leq x\}$). Les entiers de toutes les chaînes que l'on va construire appartiennent à $\mathcal{A}^*(x, y)$. C'est pourquoi cette notation sera omniprésente.

(c). Lemmes.

Lemme 11.1. *Soient x un réel positif et y un nombre premier. Soit p un autre nombre premier vérifiant*

$$(11.1) \quad p \leq \min(y, \sqrt{x}/27).$$

Alors

$$p\mathcal{A}^*(x/p, p) \subset \mathcal{A}^*(x, y).$$

Démonstration. Soit $m \in \mathcal{A}^*(x/p, p)$. On a

$$pm > p\sqrt{x/p} = \sqrt{px} > \sqrt{x}.$$

On a de plus

$$P(pm) = p \leq \min(y, \sqrt{x}/27)$$

d'après (11.1). Enfin en utilisant le point (i) du lemme (3.1) et de nouveau (11.1), on a

$$S(pm) = \max(p^2, pS(m)) \leq \max(x/3^6, x) = x. \quad \square$$

Le lemme suivant est élémentaire. Il est déjà présent en [15] comme le lemme 5.

Lemme 11.2. Soit \mathcal{E} un ensemble non vide partitionné en $\mathcal{E} = \coprod_{j=1}^k \mathcal{E}_j$. On note $n = |\mathcal{E}|$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) On peut ordonner les éléments de \mathcal{E} sous la forme e_1, e_2, \dots, e_n avec $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ quand $e_i \in \mathcal{E}_{\alpha_i}$, pour tout i tel que $1 \leq i < n$.
- (ii) $\max_{1 \leq j \leq k} |\mathcal{E}_j| \leq (n+1)/2$.

Nous donnons cette fois-ci la

Démonstration. On suppose que

$$(11.2) \quad |\mathcal{E}_1| \geq |\mathcal{E}_2| \geq \dots \geq |\mathcal{E}_k|.$$

(i) \Rightarrow (ii). Notons p et q tels que

$$p = |\mathcal{E}_1| \quad \text{et} \quad p + q = n.$$

On suppose (i). Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 \setminus \{e_n\} & \longrightarrow & \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1 \\ e_i & \longmapsto & e_{i+1} \end{array}$$

est une injection. Donc

$$p - 1 \leq |\mathcal{E}_1 \setminus \{e_n\}| \leq |\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1| = q.$$

D'où en rappelant que $q = n - p$, $p \leq (n+1)/2$.

(ii) \Rightarrow (i). On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont faciles. Supposons $n \geq 3$ et l'implication vérifiée pour $n - 2$. Comme $(n+1)/2 < n$, on a $k \geq 2$. Choisissons $f \in \mathcal{E}_1$ et $g \in \mathcal{E}_2$. On a $|\mathcal{E}_3| \leq n/3 \leq (n-1)/2$ car $n \geq 3$. On a donc avec l'hypothèse (ii) et (11.2),

$$\max(|\mathcal{E}_1| - 1, |\mathcal{E}_2| - 1, \max_{3 \leq j \leq k} |\mathcal{E}_j|) \leq (n-1)/2.$$

D'après l'hypothèse de récurrence pour $n - 2$, on peut ordonner $\mathcal{E} \setminus \{f, g\}$ en une suite e_3, e_4, \dots, e_n avec $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ quand $e_i \in \mathcal{E}_{\alpha_i}$. En complétant avec e_1 et e_2 qui sont f et g tels que e_2 et e_3 ne sont pas dans le même \mathcal{E}_j , on obtient une suite $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ qui convient. \square

Notation. Dans toute cette section, conformément aux notations de la section 8, le schéma « $m-n$ » à l'intérieur d'une chaîne représentera la sous-chaîne formée des deux entiers m et n si $m \neq n$, ou la sous-chaîne réduite à l'entier n si $m = n$.

Signalons que les trois lemmes suivant sont des lemmes de « connexité par arcs » dans $\mathcal{A}^*(x, y)$; on ne cherche pas ici à construire de longues chaînes.

Lemme 11.3. Soient $q \in \{2, 3\}$, x un réel et $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$ tels que $x \geq 3^{10}$ et $y \neq 2$. Soit A un entier de $\mathcal{A}^*(x, y)$ tel que $P^-(A) \geq q$ et $P(A) > q$.

Il existe alors une chaîne $\mathcal{C}(x, y) : A = a_1 - a_2 - \dots - a_s$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ telle que

$$(11.3) \quad P(a_j) = P(A) \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } 1 \leq j < s,$$

$$(11.4) \quad P(a_s) = q,$$

$$(11.5) \quad P^-(a_j) \geq q \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } 1 \leq j \leq s,$$

$$(11.6) \quad a_s \text{ divise } a_{s-1},$$

$$(11.7) \quad a_{s-1} > \sqrt{xP(a_{s-1})},$$

$$(11.8) \quad P(a_{s-1}/P(a_{s-1})) \leq \sqrt{x/P(a_{s-1})/27},$$

$$(11.9) \quad a_s > 3\sqrt{x}.$$

Remarque 3. Quand $q = 2$, les minoration de l'énoncé de la forme $P^-(n) \geq q$ sont vides.

Remarque 4. Les inégalités (11.7) et (11.8) vont être utilisées à la sous-section (f.4), pour établir la condition (11.21) (voir également la remarque 7 après cette condition (11.21)).

Démonstration. On écrit la décomposition de A en produit de facteurs premiers sous la forme

$$A = p_k p_{k-1} \cdots p_1 q^\alpha$$

avec $P(A) = p_k \geq p_{k-1} \geq \dots \geq p_1 > q$ et $\alpha \geq 0$. Comme $S(A) \leq x$ et $P^-(A) \geq q$, on a d'après le lemme 3.1(iii), $A \leq x/q$. On définit successivement les entiers $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ par les inégalités

$$\frac{x}{q^2} < d_j := p_k p_{k-1} \cdots p_j q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_j} \leq \frac{x}{q}$$

pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq k$. On définit également

$$c_j = p_k p_{k-1} \cdots p_j q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{j-1}} \quad (1 \leq j \leq k)$$

$$\text{et } c_{k+1} = q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}.$$

On choisit alors la chaîne

$$\mathcal{C}(x, y) : A = c_1 - d_1 - c_2 - d_2 - \dots - c_k - d_k - c_{k+1}.$$

On a donc

$$a_s = q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k} \quad \text{et} \quad a_{s-1} = d_k = p_k q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}(x, y)$ est une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ qui vérifie les quatre premières propriétés demandées.

Montrons à présent les propriétés (11.7), (11.8) et (11.9). On a

$$(11.10) \quad a_{s-1} > x/9,$$

$$(11.11) \quad P(a_{s-1}) \leq \sqrt{x}/27$$

$$(11.12) \quad x \geq 3^{10}.$$

On a donc $a_s = a_{s-1}/P(a_{s-1}) > 3\sqrt{x}$ d'après (11.10) et (11.11). On a $P(a_{s-1}/P(a_{s-1})) = q \leq 3$ et $3 \leq \sqrt{x/P(a_{s-1})}/27$ d'après (11.11) et (11.12). Enfin l'inégalité $a_{s-1} > \sqrt{xP(a_{s-1})}$ découle de (11.10), (11.11) et (11.12). \square

Lemme 11.4. *Pour tout réel x et tout $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$ tels que $x \geq 3^{10}$ et $y \geq 5$, et tout entier A de $\mathcal{A}^*(x, y)$ tel que $P(A) > 3$, il existe une chaîne $A = a_1 - a_2 - \dots - a_s$ d'éléments de $\mathcal{A}^*(x, y)$ telle que $P(a_j) = P(A)$ pour tout j vérifiant $1 \leq j < s$ et $P(a_s) = P^-(a_s) = 3$.*

Démonstration. Si $P^-(A) \geq 3$ on pose $r = 1$. Si $P^-(A) = 2$, on commence par construire une chaîne $A = a_1 - a_2 - \dots - a_r$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ avec $r \geq 2$ de la manière suivante. Si a_i est pair, on pose $a_{i+1} = a_i/2$ si $a_i > 2\sqrt{x}$ et $a_{i+1} = 3a_i$ sinon. Si a_i est impair, la construction est achevée et on pose $r = i$. En utilisant notamment le lemme 3.1 (iii), on vérifie que tous ces entiers appartiennent bien à $\mathcal{A}^*(x, y)$.

Comme $P(a_r) = P(A)$ et $A \in \mathcal{A}^*(x, y)$, on a

$$3 < P(a_r) \leq \sqrt{x}/27.$$

On peut donc appliquer le lemme 11.3 avec $q = 3$, ce qui, grâce aux propriétés (11.3), (11.4) et (11.5), fournit une chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$

$$\mathcal{C}(x, y) : a_r - a_{r+1} - \dots - a_s, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P(a_j) = P(a_r) & \text{pour } r \leq j < s \\ P(a_s) = 3 \\ P^-(a_j) \geq 3 & \text{pour } r \leq j \leq s. \end{cases}$$

Cela permet d'achever la preuve que la suite finie

$$A = a_1 - a_2 - \dots - a_r - a_{r+1} - \dots - a_s$$

est une chaîne qui répond à la question. \square

Lemme 11.5. *Pour tout réel x et tout $y \in \mathbb{P} \sqcup \{+\infty\}$ tels que $x \geq 3^{10}$ et $y \neq 2$, pour tous A et B éléments de $\mathcal{A}^*(x, y)$ tels que $P(A) < P(B)$, il existe une chaîne formée d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ qui relie A à B .*

Démonstration. Si $P(A) = 2$ on choisit $\mathcal{C}_1(x, y)$ réduit au singleton A . Sinon on choisit la chaîne $\mathcal{C}_1(x, y)$ comme la chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ du lemme 11.3 pour $q = 2$, qui commence par A . Par ailleurs on choisit $\mathcal{C}_2(x, y)$ également comme la chaîne $\mathcal{C}(x, y)$ du lemme 11.3 pour $q = 2$, mais qui commence cette

fois par B . D'après (11.3) et (11.4) pour ces deux chaînes, on obtient donc une chaîne qui convient en concaténant ou en collant $\mathcal{C}_1(x, y)$ à l'inverse de $\mathcal{C}_2(x, y)$. \square

Lemme 11.6. *Soit $x \geq 3^8$. Il existe alors deux entiers A et B de $\mathcal{A}^*(x, 3)$ tels que $P(A) = 2$ et $P(B) = 3$.*

Démonstration. On choisit A comme la plus grande puissance de 2 qui est $\leq x/6$ et $B = 3A$. Comme $x \geq 12$, $A \neq 1$ et $S(B) = 2B$. Plus précisément $S(A) = 2A < 6A = S(B) \leq x$. Comme $x \geq 3^8$, on a aussi

$$2 = P(A) < P(B) = 3 \leq \sqrt{x}/27.$$

Enfin, comme $x \geq 144$, on a $B > A > x/12 \geq \sqrt{x}$. \square

(d). Définition de la fonction $h_a^*(x, y)$. Le lemme 11.5 nous permet de définir $f_{a,A,B}^*(x, y)$ comme la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ reliant A à B , dès que $(A, B) \in (\mathcal{A}^*(x, y))^2$, $P(A) < P(B)$, $x \geq 3^{10}$ et $y \geq 3$. Avec le lemme 11.6, cela permet de définir également la fonction h_a^* de $\mathbb{R}^{+*} \times (\mathbb{P} \sqcup \{+\infty\})$ dans \mathbb{N} par

$$h_a^*(x, y) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) & \text{si } [0 < x < 3^{10} \text{ ou } y = 2] \\ \min_{(A,B) \in (\mathcal{A}^*(x,y))^2, P(A) < P(B)} f_{a,A,B}^*(x, y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dorénavant, on désigne par $\mathcal{C}_{C,D}^*$ une chaîne générique d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ qui relie C à D .

(e). Introduction à la construction d'une longue chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$. Idéalement, on souhaiterait construire pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{A}^*(x, y))^2$ avec $A \neq B$ une chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$, d'extrémités A et B , et vérifiant (2.6) avec

$$(11.13) \quad \mathcal{P}(x, y) = \left\{ p : 3 \leq p \leq \min\left(y, \sqrt{x/L}\right) \right\}$$

où L est une constante ad hoc. On souhaiterait aussi qu'elle soit longue au sens où $|\mathcal{C}(x/p, p)| \geq h_a^*(x/p, p)$ quand $p \in \mathcal{P}(x, y)$. La raison d'être de cette construction est d'en déduire l'inégalité de Buchstab

$$h_a^*(x, y) \geq 1 + \sum_{p \leq \min(y, \sqrt{x/L})} h_a^*(x/p, p)$$

(voir la sous-section (g)).

Dans la construction de cette chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$, a priori pour chaque p de $\mathcal{P}(x, y)$ il y a une seule sous-chaîne $p\mathcal{C}(x/p, p)$. Ce ne serait plus le cas si $P(A) = P(B)$. C'est pour ne pas avoir à traiter ce cas particulier que l'on demande dans la définition de $h_a^*(x, y)$ que $P(A) \neq P(B)$.

Notons

$$\bigsqcup = \bigsqcup_{p \in \mathcal{P}(x,y)} p\mathcal{A}^*(x/p, p)$$

où $\mathcal{P}(x, y)$ est défini en (11.13). On choisira L supérieur à 3^6 . Ainsi d'après le lemme 11.1, on aura

$$\sqcup \subset \mathcal{A}^*(x, y).$$

C'est ce qui va nous permettre de construire cette chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ de manière récursive et de vérifier in fine l'inégalité de Buchstab voulue. Pour faire cela, on rencontre toutefois deux difficultés. D'abord il se peut que A n'appartienne pas à \sqcup (même chose pour B). On ne peut donc pas directement construire $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ sous la forme (2.6). On procède alors comme à la section 8 de [15] en construisant $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ sous la forme

$$\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y) = \mathcal{C}_{A,A'}^*(x, y) - \mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y) - \mathcal{C}_{B',B}^*(x, y)$$

où A' (respectivement B') est le seul entier de $\mathcal{C}_{A,A'}^*(x, y)$ (resp. $\mathcal{C}_{B',B}^*(x, y)$) à appartenir à \sqcup .

C'est $\mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y)$ dont on souhaite qu'elle ait la structure (2.6). C'est là qu'apparaît la seconde difficulté.

Il s'agit du fait que deux sous-chaînes $p\mathcal{C}(x/p, p)$ et $p'\mathcal{C}(x/p', p')$ formées d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ avec $p' > p > x^{1/3}$ ne peuvent être directement accolées. En effet si elles l'étaient, cela oblige, on l'a déjà vu à la section 2, l'entier n extrémité de $p'\mathcal{C}(x/p', p')$ voisin de $p\mathcal{C}(x/p, p)$, d'être un multiple de $p'p$. On aurait alors $S(n) \geq p'p^2 > x$ ce qui est impossible car $n \in \mathcal{A}^*(x, y) \subset \mathcal{A}(x)$. On est donc obligé de séparer les deux sous-chaînes $p\mathcal{C}(x/p, p)$ et $p'\mathcal{C}(x/p', p')$ par un connecteur extérieur.

Remarquons que « cette barrière » à $x^{1/3}$ est l'analogie de celle à $x^{1/2}$ que l'on a observé dans le cas où $x = 100$ dans l'étude de $\mathcal{C}(100)$ à la section 2. Pour des raisons techniques, dans la construction de $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$, c'est $x^{1/3}/2^{13/3}$ qui va remplacer $x^{1/3}$. Plus précisément quand $y \leq (x/2^{13})^{1/3}$, $\mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y)$ sera de la forme (2.6), sans composante extérieure. Si $y > (x/2^{13})^{1/3}$, on construira $\mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y)$ comme dans l'exemple $\mathcal{C}(100)$ de la section 2, en collant une composante intérieure et une composante extérieure.

On a déjà évoqué cette deuxième difficulté à la fin de la section 2. On construit $\mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y)$ sous la forme (2.6), mais avec des connecteurs qa (q premier, $P(a) \leq q$) qui séparent les sous-chaînes $p_j\mathcal{C}(x/p_j, p_j)$ et $p_{j+1}\mathcal{C}(x/p_{j+1}, p_{j+1})$. (Pour des raisons de simplicité de rédaction, on notera qa tous les connecteurs, qu'ils soient extérieurs ou intérieurs, voir (11.16)). La difficulté est alors de s'assurer que les connecteurs qa n'appartiennent pas aux sous-chaînes $p_j\mathcal{C}(x/p_j, p_j)$. Voyons comment on résout cette difficulté.

D'abord on impose aux entiers n de $\mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y)$ de vérifier $n > \sqrt{x}$ (voir la définition de $\mathcal{A}^*(x, y)$). Par récursivité cela impose aux entiers m de $\mathcal{C}(x/p_j, p_j)$ de vérifier aussi $m > \sqrt{x/p_j}$. Enfin on impose aux connecteurs

qa de vérifier $a \leq \sqrt{x/q}$ (ce qui n'est pas une grosse contrainte). Ainsi les connecteurs qa ne peuvent être égaux aux entiers $p_j m$ de $p_j \mathcal{C}(x/p_j, p_j)$.

(f). Construction d'une longue chaîne $\mathcal{A}_{A,B}^*(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$.

(f.1). *Choix d'un grand réel L et énoncé du résultat central.* D'après le lemme 6.3 appliqué avec $z = 1$, il existe $c > 0$ et $K > 0$ tels que

$$(11.14) \quad \text{pour tous } x \geq y \geq \sqrt{x} \text{ et } 1 \leq t \leq x, \text{ on a}$$

$$c \frac{x}{\log x} \leq A(x, y, 1, t) \leq K \frac{x}{\log x} \max(\log t, 1).$$

On choisit un réel L tel que

$$(11.15) \quad c\sqrt{L} - 9K \log L \geq 16 \quad \text{et} \quad L \geq 2^{26}.$$

Avec ce choix de L , l'objet de cette sous-section (f) est d'établir le résultat suivant, qui constitue la substantifique moëlle de la preuve du théorème 5.2.

Proposition 11.7. *Il existe un réel $x_0 \geq 2$ tel que pour tout réel x et tout nombre premier y vérifiant*

$$3 \leq y \leq \sqrt{x/L} \quad \text{et} \quad x \geq x_0,$$

pour tous entiers A et B de $\mathcal{A}^(x, y)$ vérifiant $P(A) \neq P(B)$, il existe une chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ d'extrémités A et B et telle que*

$$|\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)| \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p).$$

Remarque. Pour simplifier les notations, on écrira dorénavant

$$\mathcal{C}_{A,B}^*, \mathcal{C}_{A,A'}^*, \mathcal{C}_{A',B'}^* \text{ et } \mathcal{C}_{B',B}^*$$

en lieu et place de

$$\mathcal{C}_{A,B}^*(x, y), \mathcal{C}_{A,A'}^*(x, y), \mathcal{C}_{A',B'}^*(x, y) \text{ et } \mathcal{C}_{B',B}^*(x, y).$$

De plus, dans toute la preuve, le réel x sera supposé implicitement suffisamment grand. Enfin, quitte à remplacer $\mathcal{C}_{A,B}^*$ par son inverse, on peut supposer que $P(A) < P(B)$.

(f.2). *Le cas particulier $y = 3$.* Comme $x \geq 2$ et $(A, B) \in (\mathcal{A}^*(x, 3))^2$ avec $P(A) < P(B)$, on a $A \neq 1, B \neq 1, P(A) = 2$ et $P(B) = 3$.

On choisit

$$B' = \begin{cases} B & \text{si } B > \sqrt{3x} \\ 2B & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{C}_{B',B}^* : B' - B.$$

Par ailleurs on note r l'entier défini par $\sqrt{x} < 2^r \leq 2\sqrt{x}$. On choisit alors un entier A' et une chaîne de la forme

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A - 2^r - 2^r 3^{1+\varepsilon} := A'$$

avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ choisi de telle sorte que $P(A'/3) \neq P(B'/3)$.

En utilisant notamment le lemme 3.1 (iii), on vérifie facilement, d'une part que $\mathcal{C}_{B',B}^*$ et $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ sont deux chaînes formées d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, 3)$, et d'autre part que $A, 2^r$, et B quand il est différent de B' , ne sont pas éléments de $3\mathcal{A}^*(x/3, 3)$.

Vérifions que $B'/3 \in \mathcal{A}^*(x/3, 3)$. On a $B'/3 > \sqrt{x/3}$, $P(B'/3) \leq 3 \leq \min(3, \sqrt{x/3}/27)$, et en utilisant le lemme 3.1 (ii), $S(B'/3) \leq S(B')/3 \leq \max(S(B)/3, 4\sqrt{x}) \leq x/3$. On a donc bien $B'/3 \in \mathcal{A}^*(x/3, 3)$.

On vérifie facilement que l'on a aussi $A'/3 \in \mathcal{A}^*(x/3, 3)$.

D'après la définition de $h_a^*(x, y)$, il existe donc une chaîne $\mathcal{C}_{A'/3, B'/3}^*$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x/3, 3)$ et de longueur supérieure ou égale à $h_a^*(x/3, 3)$. Comme de plus $2^r \neq 2^r 3^{1+\varepsilon}$, la longueur de $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ est au moins 2. On en déduit que la suite finie $\mathcal{C}_{A,B}^*$ définie par

$$\mathcal{C}_{A,B}^* : \mathcal{C}_{A,A'}^* - 3\mathcal{C}_{A'/3, B'/3}^* - \mathcal{C}_{B',B}^*$$

est une chaîne avec $|\mathcal{C}_{A,B}^*| \geq 1 + h_a^*(x/3, 3)$. Avec le lemme 11.1, on sait de plus que cette chaîne est formée d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, 3)$. Cela achève la preuve de ce cas particulier.

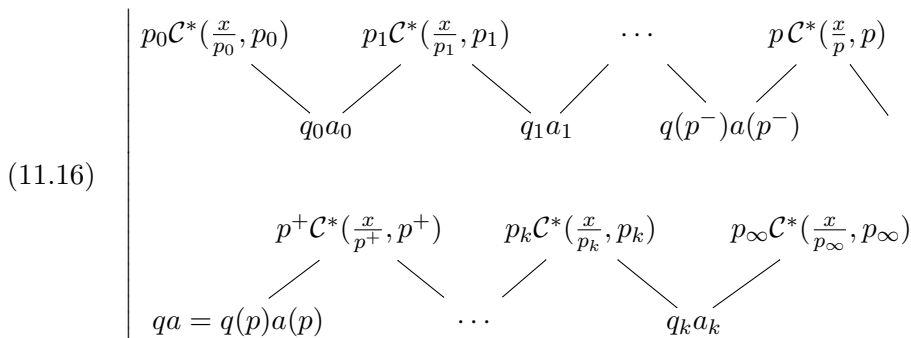
Passons maintenant au cas général. On suppose donc dorénavant que

$$5 \leq y \leq \sqrt{x/L}.$$

(f.3). La structure de la chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*$. Comme dans le cas particulier $y = 3$, la chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^*$ va être découpée en trois parties.

$$\mathcal{C}_{A,B}^* : \mathcal{C}_{A,A'}^* - \mathcal{C}_{A',B'}^* - \mathcal{C}_{B',B}^*.$$

avec $\mathcal{C}_{A',B'}^*$ ayant la structure suivante



avec $\{p_j : 0 \leq j \leq k \text{ ou } j = \infty\} = \{p : 3 \leq p \leq y\}$.

Lorsque $p = p_j$, on note également $p^- := p_{j-1}$ quand $1 \leq j \leq k$, et $p^+ := \begin{cases} p_{j+1} & (0 \leq j < k) \\ p_\infty & (j = k). \end{cases}$

Dans la notation qa (ou $q_j a_j$ ou $q(p)a(p), \dots$) pour désigner les entiers de la ligne du bas de (11.16), la lettre q désigne un nombre premier et la lettre a un entier vérifiant $P(a) \leq q$. Attention, contrairement à ce que la présentation de (11.16) pourrait suggérer, le connecteur qa n'est pas toujours extérieur. Plus précisément, cet entier qa associé à p sera choisi comme connecteur intérieur quand $p \leq (x/2^{13})^{1/3}$, et comme un connecteur extérieur sinon.

Dorénavant, on fait deux choses simultanément. D'une part on construit petit à petit la chaîne $\mathcal{C}^*(A, B)$. Et d'autre part, au fur et à mesure de la construction, on vérifie que les entiers construits appartiennent à $\mathcal{A}^*(x, y)$, et sont différents des autres construits précédemment.

(f.4). Construction des chaînes $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$. On va choisir ici deux entiers A' et B' et construire deux chaînes disjointes $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ d'extrémités respectives A et A' , et B et B' , et vérifiant

$$(11.17) \quad \text{il y a au plus une puissance de 2 dans } \mathcal{C}_{A,A'}^* \cap]\sqrt{x}, 2^4\sqrt{x}]$$

$$(11.18) \quad \text{il y a au plus une puissance de 2 dans } \mathcal{C}_{B',B}^* \cap]\sqrt{x}, 2^4\sqrt{x}]$$

$$(11.19) \quad P(A') \neq P(B')$$

$$(11.20) \quad n \in \mathcal{C}_{A,A'}^* \sqcup \mathcal{C}_{B',B}^* \Rightarrow \begin{cases} P(n) \in \{2, P(A'), P(B')\} \\ \text{ou } P(n) > \sqrt{x/L} \end{cases}$$

$$(11.21) \quad \begin{cases} \text{les entiers } A' \text{ et } B' \text{ sont les seuls entiers } n \text{ de } \mathcal{C}_{A,A'}^* \sqcup \mathcal{C}_{B',B}^* \\ \text{qui vérifient simultanément les trois propriétés suivantes :} \\ \bullet n > \sqrt{xP(n)} \\ \bullet P(n/P(n)) \leq \sqrt{x/P(n)}/27 \\ \bullet 3 \leq P(n) \leq \sqrt{x/L}. \end{cases}$$

Remarque 5. La chaîne $\mathcal{C}_{B',B}^*$ sera l'inverse de la chaîne $\mathcal{C}_{B,B'}^*$.

Remarque 6. On se contente ici de construire $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$. On omet la vérification facile que ces chaînes satisfont les propriétés demandées.

Remarque 7. Notons $n = pm$ avec $P(m) \leq p$. Les trois inégalités de (11.21) se traduisent alors par $m > \sqrt{x/p}$, $P(m) \leq \sqrt{x/p}/27$ et $3 \leq p \leq \sqrt{x/L}$. L'assertion (11.21) entraîne donc que

$$(\mathcal{C}_{A,A'} \sqcup \mathcal{C}_{B',B}) \cap \bigsqcup_{3 \leq p \leq \sqrt{x/L}} p \mathcal{A}^*(x/p, p) = \{A', B'\}.$$

C'est ce qui permet d'assurer qu'à l'exception notable de A' et B' , les entiers de $\mathcal{C}_{A,A'}$ et $\mathcal{C}_{B',B}$ ne sont pas présents à l'étage du haut de la chaîne (11.16).

Construction de $\mathcal{C}_{A,A'}^*$.

1^{er} cas.

$$P(A) = 2$$

On choisit $p_0 \in \{3, 5\}$ tel que $p_0 \neq P(B)$. On définit l'entier α par

$$x/2^5 < 2^\alpha \leq x/2^4$$

et on choisit

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A - 2^\alpha - 2^\alpha p_0 := A'$$

2^{ème} cas.

$$A > \sqrt{xP(A)}, P(A/P(A)) \leq \sqrt{x/P(A)}/27 \text{ et } 3 \leq P(A) \leq \sqrt{x/L}.$$

On choisit $A' = A$ et donc $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ réduite au seul entier A .

3^{ème} cas.

$$\left[A \leq \sqrt{xP(A)} \text{ ou } P(A/P(A)) > \sqrt{x/P(A)}/27 \right] \text{ et } 3 \leq P(A) \leq \sqrt{x/L}.$$

On note $A = a_1 - a_2 - \dots - a_s = 2^{\alpha'}$ la chaîne construite au lemme 11.3 avec $q = 2$. (C'est la propriété (11.4) du lemme 11.3 qui assure que cette chaîne s'achève par une puissance de 2. On utilisera cette argumentation de manière implicite dans les autres cas de figure où elle est utilisée). On choisit ℓ l'entier minimum ≥ 2 tel que

$$a_\ell > \sqrt{xP(a_\ell)} \text{ et } P(a_\ell/P(a_\ell)) \leq \sqrt{x/P(a_\ell)}/27.$$

On sait qu'il en existe car l'entier $s - 1$ vérifie ces conditions d'après (11.7) et (11.8). On choisit alors

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A = a_1 - a_2 - \dots - a_\ell = A'.$$

4^{ème} cas.

$$P(A) > \sqrt{x/L}$$

On note $\mathcal{C}_{A,2^{\alpha'}}^*$ la chaîne construite au lemme 11.3 avec $q = 2$. On définit comme au 1^{er} cas l'entier α par

$$x/2^5 < 2^\alpha \leq x/2^4.$$

On choisit $p_0 \in \{3, 5\}$ tel que $p_0 \neq P(B)$. On choisit enfin la chaîne

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : \mathcal{C}_{A,2^{\alpha'}}^* - 2^\alpha - 2^\alpha p_0 := A'.$$

Construction de $\mathcal{C}_{B,B'}^$.* On construit la chaîne $\mathcal{C}_{B,B'}^*$ de manière analogue. Notons que comme $P(B) \geq 3$, on n'est jamais dans le 1^{er} cas pour B . Dans les 2^{ème} et 3^{ème} cas pour B , on procède comme dans les 2^{ème} et 3^{ème} cas pour A , avec l'utilisation du lemme 11.3 avec $q = 2$ dans le 3^{ème} cas.

Il y a une petite variante dans le 4^{ème} cas car il faut s'assurer que la chaîne $\mathcal{C}_{B,B'}^*$ est disjointe de $\mathcal{C}_{A,A'}^*$; voyons cela. On note $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$ la chaîne construite au lemme 11.3 avec $q = 2$. On a alors $2^{\beta'} > 2\sqrt{x}$ d'après (11.9). D'après (11.6) on a aussi $2^{\beta'}$ qui divise l'avant dernier entier de $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$, que l'on note m . Avec (11.17) il en découle d'abord qu'il existe un entier $2^\beta \notin \mathcal{C}_{A,A'}^*$ avec $2^\beta > \sqrt{x}$ et $\beta \leq \beta'$, et ensuite que 2^β divise aussi m . On choisit enfin $p_\infty \in \{3, 5\}$ tel que $p_\infty \neq P(A')$. Tout cela permet de vérifier qu'en notant $\mathcal{C}_{B,m}^*$ la chaîne obtenue à partir de $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$ en supprimant le dernier entier $2^{\beta'}$, la suite d'entiers

$$\mathcal{C}_{B,B'}^* : \mathcal{C}_{B,m}^* - 2^\beta - 2^\beta p_\infty := B'$$

constitue une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ qui a les propriétés requises. Signalons que pour vérifier que $\mathcal{C}_{A,A'} \cap \mathcal{C}_{B',B} = \emptyset$, on s'aide de la propriété (11.3) du lemme 11.3.

(f.5). Choix des p_j pour $0 \leq j \leq k$ et $j = \infty$. On choisit $p_0 = P(A')$ et $p_\infty = P(B')$ ce qui correspond aux notations de la sous-section (f.4). On a $p_0 \neq p_\infty$ d'après (11.19). On note p_j , $1 \leq j \leq k$, les autres $p \in [3, y]$ avec $1 \leq j < j' \leq k \Rightarrow p_j < p_{j'}$.

(f.6). Choix des connecteurs qa de $\mathcal{C}_{A',B'}^*$. Supposons d'abord que $y = 5$ i.e. $k = 0$. D'après (11.17) et (11.18), on peut choisir $q_0 a_0$ comme une puissance de deux de l'intervalle $]\sqrt{x}, 2^4 \sqrt{x}]$, qui n'apparaît pas dans $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$. Supposons à présent $y \geq 7$, i.e. $k \geq 1$. Les propriétés (11.17) et (11.18) permettent encore de choisir $q_0 a_0$ et $q_k a_k$ comme des puissances de deux distinctes, appartenant à l'intervalle $]\sqrt{x}, 2^4 \sqrt{x}]$, et qui n'apparaissent pas dans $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$.

Si $0 \leq k \leq 1$, on a achevé de choisir tous les connecteurs qa de $\mathcal{C}_{A',B'}^*$. On suppose dorénavant $k \geq 2$. On va alors choisir $k - 1$ entiers deux à deux distincts $qa = q_j a_j$ associés aux $p = p_j$ ($1 \leq j \leq k - 1$) (voir (11.16)) de telle sorte que

$$(11.22) \quad \left| \begin{array}{l} q \text{ est premier, } P(a) \leq q, q \notin \{p_0, p_\infty\}, 3 \leq q \leq p \\ \sqrt{x}/q < a \leq \sqrt{x/q}, 8pqS(a) \leq x, \end{array} \right.$$

$$(11.23) \quad 2^{13} p q^2 \leq x$$

et

$$(11.24) \quad q_j \neq q_{j+1} \text{ pour } 0 \leq j \leq k - 1.$$

Expliquons la raison d'être des différentes conditions regroupées en (11.22) et (11.23). Les conditions « q premier et $P(a) \leq q$ » sont juste un rappel de la notation usuelle pour le connecteur qa (voir (11.16)). Pour les nombres premiers p dont il est question, on a d'après l'hypothèse de la proposition 11.7 relative à y

$$p \leq y \leq \sqrt{x/L}.$$

Avec les conditions « $q \notin \{p_0, p_\infty\}$ » et « $3 \leq q \leq p$ », on a donc

$$q \notin \{2, p_0, p_\infty\} \text{ et } q \leq \sqrt{x/L}.$$

D'après (11.20), cela assure que les connecteurs qa n'appartiennent pas à $\mathcal{C}_{A,A'}^* \sqcup \mathcal{C}_{B',B}^*$.

Reportons nous au schéma de chaîne (11.16). Dans le cas générique, on va choisir qa pour l'extrémité droite de $\mathcal{C}^*(x/p, p)$, ainsi que pour l'extrémité gauche de $\mathcal{C}^*(x/p^+, p^+)$. Commençons par montrer que dans ce cas générique les inégalités (11.22) et (11.23) impliquent

$$qa \in \mathcal{A}^*(x/p, p) \text{ et } qa \in \mathcal{A}^*(x/p^+, p^+).$$

On va faire les deux vérifications simultanément.

On a d'abord d'après (11.22), $qa > \sqrt{x} > \sqrt{x/p} > \sqrt{x/p^+}$.

Il y a au plus deux nombres premiers parmi p_0 et p_∞ entre p et p^+ , d'où avec le postulat de Bertrand $p^+ < 8p$. On en déduit que $27^2 p^+ q^2 < 3^6 2^3 p q^2 < 2^{13} p q^2 \leq x$ d'après (11.23). D'où $P(qa) = q \leq \sqrt{x/p^+}/27 < \sqrt{x/p}/27$.

On a enfin avec le lemme 3.1 (i), (11.22) et (11.23)

$$\begin{aligned} S(qa) &= \max(q^2, qS(a)) \leq \max(x/2^{13}p, x/8p) \\ &= x/8p < x/p^+ < x/p. \end{aligned}$$

Montrons également que les inégalités (11.22) et (11.23) entraînent $qa \in \mathcal{A}^*(x, y)$. On a d'après (11.22), $qa > \sqrt{x}$ et

$$P(qa) = q \leq p \leq \min(y, \sqrt{x/L}) \leq \min(y, \sqrt{x}/27).$$

Enfin on a déjà vu plus haut que $S(qa) \leq x/8p \leq x$.

Les entiers pm de l'étage du haut de la chaîne (11.16) vérifient $m > \sqrt{x/p}$, d'où $pm > \sqrt{xP(pm)}$. Alors qu'avec la condition « $a \leq \sqrt{x/q}$ » on a $qa \leq \sqrt{xP(qa)}$. Cela assure que les connecteurs qa de l'étage du bas de (11.16) ne sont pas présents à l'étage du haut.

Venons en au choix des connecteurs qa vérifiant (11.22), (11.23) et (11.24). Pour cela on distingue deux cas, qui correspondent à la dichotomie connecteur intérieur/extérieur.

Quand $3 \leq p \leq \min(y, (x/2^{13})^{1/3})$, on choisit $q = p$. On choisit également un entier a tel que

$$\frac{\sqrt{x}}{q} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q}}$$

où a est de la forme $2^\alpha 3^\beta$. On note $a = a_q$ cet entier a que l'on vient de choisir. On vérifie facilement que ce choix des $q a$ satisfait aux conditions demandées (11.22), (11.23) et (11.24).

On suppose à présent

$$(x/2^{13})^{1/3} < p \leq y \leq \sqrt{x/L}.$$

On note $R = R(x)$ l'entier maximum tel que

$$(x/2^{13})^{1/3} < \sqrt{x/L}/2^R.$$

Soit $r \in [0, R]$.

Sans les choisir explicitement, on va montrer ici qu'il existe suffisamment d'entiers $q a$ associés aux nombres premiers p de l'intervalle

$$I_r = \left] \frac{\sqrt{x/L}}{2^{r+1}}, \frac{\sqrt{x/L}}{2^r} \right],$$

de telle manière à vérifier les conditions (11.22), (11.23) et (11.24).

Soit q un nombre premier vérifiant

$$x^{1/5} < q \leq x^{1/4}.$$

En utilisant (11.14) et (11.15), on a

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q}} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \sqrt{Lx}/8q \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ a : \mathcal{P}(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \sqrt{Lx}/8q \right\} \right| \\ & \quad - \left| \left\{ a \leq \frac{\sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \sqrt{Lx}/8q \right\} \right| \\ &= A\left(\frac{\sqrt{Lx}}{8q}, q, 1, 1\right) - A\left(\frac{\sqrt{x}}{q}, q, 1, \frac{\sqrt{L}}{8}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt{x}}{8q} E \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \frac{c\sqrt{L}}{\log(\sqrt{Lx}/8q)} - \frac{4K \log L}{\log(\sqrt{x}/8q)} \\ &\geq \frac{2}{\log x} (c\sqrt{L} - 9K \log L) \geq \frac{32}{\log x}. \end{aligned}$$

Notons à présent

$$h_r(x) := x^{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{9} \sum_{j=1}^r \frac{1}{j^2})}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\log h_r}{\log h_{r+1}}\right) &= \log\left(1 - \frac{1}{9} \sum_{j=1}^r \frac{1}{j^2}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{j^2}\right) \\ &\geq \frac{1}{9(r+1)^2} \gg \frac{1}{(\log x)^2}. \end{aligned}$$

En désignant par q' un nombre premier générique différent de p_0 et p_∞ , et en utilisant une forme forte du théorème des nombres premiers, on en déduit que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \frac{1}{q'} &\geq \log\left(\frac{\log h_r}{\log h_{r+1}}\right) \\ &\geq \frac{1}{9(r+1)^2}. \end{aligned}$$

En combinant ces deux calculs, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q'} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q'}}, a \neq a_{q'} : P(a) \leq q' \text{ et } S(a) \leq \frac{\sqrt{Lx}}{8q'} \right\} \right| \\ \geq 2 \frac{\sqrt{x}}{\log x} \cdot \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \frac{1}{q'} \geq \frac{1}{9(r+1)^2} \frac{\sqrt{x}}{\log x} \\ \geq \frac{\sqrt{x/L}}{2^{r-1} \log x} \geq \pi\left(\frac{\sqrt{x/L}}{2^r}\right) - \pi\left(\frac{\sqrt{x/L}}{2^{r+1}}\right) \end{aligned}$$

grâce à la combinaison du théorème des nombres premiers avec la majoration $2^r \leq x^{1/6}$.

On a toujours $2^r \leq x^{1/6}$ et aussi $h_{r+1} > x^{1/5}$. En utilisant cela pour la deuxième inégalité ci-dessous, on a pour tout $q' \in]h_{r+1}, h_r]$

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q'} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q'}}, a \neq a_{q'} : P(a) \leq q' \text{ et } S(a) \leq \frac{\sqrt{Lx}}{8q'} \right\} \right| \\ \leq \frac{\sqrt{Lx}}{q'} \leq \frac{1}{2} \left(\pi\left(\frac{\sqrt{x/L}}{2^r}\right) - \pi\left(\frac{\sqrt{x/L}}{2^{r+1}}\right) \right) \end{aligned}$$

de nouveau par le théorème des nombres premiers.

D'après le lemme 11.2, il existe donc une injection

$$(11.25) \quad \begin{array}{ccc} \varphi_r & : & \mathbb{P} \cap I_r \longrightarrow \{n : h_{r+1} < P(n) \leq h_r, n \neq P(n)a_{P(n)}\} \\ & & p \longmapsto qa = q(p)a(p) \end{array}$$

de telle sorte que les conditions (11.22) et (11.24) (pour ces q là) soient vérifiées. De plus quand $p = p_j \in I_r$ et $p^+ = p_{j+1} \in I_{r-1}$, on a

$$h_{r+1} < q_{j+1} \leq h_r < q_j,$$

d'où en particulier $q_j \neq q_{j+1}$. Donc la condition (11.24) est vérifiée pour toute la composante extérieure que l'on est en train de construire. On a vu qu'elle l'était aussi pour la composante intérieure. De plus le dernier $q = q_f$ de la composante intérieure vérifie $q_f \sim x^{1/3}/2^{13/3}$ alors que le premier $q = q_d$ de la composante extérieure vérifie $q_d \leq x^{1/4}$. Enfin on a choisi $q_0 = q_k = 2$, $q_1 \geq 3$ ainsi que $q_{k-1} \geq 3$. Donc finalement la condition $q_j \neq q_{j+1}$ de (11.24) est bien vérifiée pour tous les j tels que $0 \leq j \leq k-1$.

C'est la condition $n \neq P(n)_{a_{P(n)}}$ de l'ensemble d'arrivée de l'injection φ_r en (11.25), qui assure que les connecteurs extérieurs qa ici, sont différents des connecteurs intérieurs qa choisis précédemment.

On a enfin d'une part $p \leq y \leq \sqrt{x/L} \leq \sqrt{x}/2^{13}$ d'après (11.15), et d'autre part $q \leq x^{1/4}$. Cela entraîne (11.23).

(f.7). Conclusion de la preuve de la proposition 11.7. Le premier objectif est ici de choisir pour tout $p \in [3, y]$ deux entiers $e^-(p)$ et $e^+(p)$, qui seront respectivement les extrémités gauche et droite de la chaîne $C^*(x/p, p)$ de (11.16).

Les extrémités de la chaîne $C^*_{A',B'}$ sont A' et B' . D'après (11.16), on n'a donc pas le choix pour l'extrémité gauche de $C^*(x/p_0, p_0)$ et l'extrémité droite de $C^*(x/p_\infty, p_\infty)$: on pose

$$e^-(p_0) = A'/p_0 \text{ et } e^+(p_\infty) = B'/p_\infty.$$

Rappelons que a_0q_0 et a_kq_k sont des puissances de 2 inférieures ou égales à $16\sqrt{x}$. Cela permet de choisir d'une part $e^+(p_0)$ de la forme

$$e^+(p_0) = d_0 a_0 q_0$$

avec $d_0 \in \{1, 3\}$ de telle sorte que

$$P(e^+(p_0)) \neq P(e^-(p_0)),$$

et d'autre part $e^-(p_\infty)$ de la forme

$$e^-(p_\infty) = d_\infty a_k q_k$$

avec $d_\infty \in \{1, 3\}$ de telle sorte que

$$P(e^-(p_\infty)) \neq P(e^+(p_\infty)).$$

Cela permet également de vérifier que

$$\begin{aligned} e^+(p_0) &\in \mathcal{A}^*(x, y) \cap \mathcal{A}^*(x/p_0, p_0) \\ \text{et } e^-(p_\infty) &\in \mathcal{A}^*(x, y) \cap \mathcal{A}^*(x/p_\infty, p_\infty) \end{aligned}$$

On choisit enfin pour les autres p

$$e^-(p) = q(p^-)a(p^-) \text{ et } e^+(p) = q(p)a(p).$$

Supposons que $p = p_j$ avec $1 \leq j \leq k - 1$. On a vérifié à la sous-section (f.6) que l'on a alors

$$qa \in \mathcal{A}^*(x/p, p) \cap \mathcal{A}^*(x/p^+, p^+).$$

En utilisant (11.24) et la définition de $h_a^*(x, y)$, tout cela permet de choisir pour tout $p \in [3, y]$ une chaîne $\mathcal{C}^*(\frac{x}{p}, p)$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x/p, p)$, dont les extrémités sont $e^-(p)$ et $e^+(p)$, et qui vérifie

$$|\mathcal{C}^*(x/p, p)| \geq h_a^*(x/p, p).$$

On a donc

$$|\mathcal{C}_{A,B}^*| \geq |\mathcal{C}_{A',B'}^*| \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p)$$

car $k \geq 0$.

On sait de plus par le lemme 11.1 que $p\mathcal{A}^*(x/p, p) \subset \mathcal{A}^*(x, y)$. Donc les entiers des chaînes $p\mathcal{C}^*(x/p, p)$ de l'étage du haut de (11.16) que l'on vient de choisir, appartiennent à $\mathcal{A}^*(x, y)$. Cela achève la construction de la chaîne $\mathcal{C}_{A,B}^* := \mathcal{C}_{A,B}^*(x, y)$ et la preuve de la proposition 11.7.

(g). L'inégalité de Buchstab de $h_a^*(x, y)$. Commençons par le

Lemme 11.8. *Pour tout $x \geq 3^{10}$ fixé, l'application*

$$\begin{aligned} [3, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ y &\longmapsto h_a^*(x, y) \end{aligned}$$

est croissante

Démonstration. Supposons $3 \leq y < z$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^*(x, z)^2$ avec $P(A) < P(B)$.

Si $(A, B) \in \mathcal{A}^*(x, y)^2$, alors on a immédiatement

$$f_{a,A,B}^*(x, z) \geq f_{a,A,B}^*(x, y).$$

Si $A \notin \mathcal{A}^*(x, y)$, alors $y < P(A) < P(B) \leq z$. En appliquant le lemme 11.3 avec $q = 2$ et z à la place de y , on obtient une chaîne $\mathcal{C}_{A,2^\alpha}^*$ d'entiers $A = a_1 - a_2 - \dots - a_s = 2^\alpha$ avec $P(a_j) = P(A)$ pour tout j vérifiant $1 \leq j < s$. En appliquant le lemme 11.4 avec z à la place de y et B à la place de A , on obtient une chaîne $\mathcal{C}_{3^\beta, B}^*$ d'entiers $3^\beta = b_1 - b_2 - \dots - b_{s'} = B$ avec $P(b_j) = P(B)$ pour tout j vérifiant $2 \leq j \leq s'$. On choisit maintenant une chaîne $\mathcal{C}_{2^\alpha, 3^\beta}^*$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$ et de longueur $f_{a,2^\alpha,3^\beta}^*(x, y)$. Alors

$$\mathcal{C}_{A,2^\alpha}^* - \mathcal{C}_{2^\alpha,3^\beta}^* - \mathcal{C}_{3^\beta, B}^*$$

forme une chaîne d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, z)$ de longueur $> f_{a,2^\alpha,3^\beta}^*(x, y)$. D'où

$$f_{a,A,B}^*(x, z) > f_{a,2^\alpha,3^\beta}^*(x, y).$$

Si enfin $P(A) \leq y < P(B) \leq z$, c'est avec une chaîne $\mathcal{C}_{A,2^\alpha}^* - \mathcal{C}_{2^\alpha,B}^*$ que l'on montre que $f_{a,A,B}(x, z) > f_{a,A,2^\alpha}^*(x, y)$. Tout cela montre que $h_a^*(x, z) \geq h_a^*(x, y)$. \square

Proposition 11.9 (Inégalité de Buchstab pour $h_a^*(x, y)$). *Il existe un réel $M \geq 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, pour tout $y \in \mathbb{P}$, on a*

$$h_a^*(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h_a^*(x/p, p).$$

Démonstration. D'après la proposition 11.7, il existe un réel $L \geq 1$ et un réel $x_0 \geq 2$ tels que pour tous x et y vérifiant

$$3 \leq y \leq \sqrt{x/L} \quad \text{et} \quad x \geq x_0$$

on a

$$h_a^*(x, y) \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p).$$

En choisissant $x_0 \geq 3^{10}$, avec le lemme 11.8 on en déduit que pour tous x et y vérifiant

$$y \geq 3 \quad \text{et} \quad x \geq x_0,$$

on a

$$\begin{aligned} h_a^*(x, y) &\geq h_a^*(x, \min(y, \sqrt{x/L})) \\ &\geq 1 + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x/L})} h_a^*(x/p, p) \\ &= \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x/L})} h_a^*(x/p, p). \end{aligned}$$

Choisissons

$$M = \max(L, x_0/9).$$

Comme $M \geq L$, on a aussi pour

$$(11.26) \quad y \geq 3 \quad \text{et} \quad x \geq x_0,$$

$$(11.27) \quad h_a^*(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h_a^*(x/p, p).$$

Si (11.26) n'est pas vérifiée, alors la somme en p dans (11.27) est vide, et (11.27) est encore vraie car on a toujours $h_a^*(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$. Cela achève la preuve de la proposition 11.9. \square

(h). Un lemme d'itération d'inégalité de Buchstab. Rappelons que l'on note

$$A(x, y, z) := |\{n : S(n) \leq x, P(n) \leq y \text{ et } P^-(n) > z\}|.$$

Dans l'énoncé suivant, on donne le résultat obtenu après avoir itéré un certain type d'inégalité de Buchstab.

Proposition 11.10. *Soient $h : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \in \{1\} \sqcup \mathbb{P}$ et $M \in [1 + \infty[$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{P}$, on a*

$$(11.28) \quad h(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h(x/p, p).$$

On a alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{P}$

$$(11.29) \quad h(x, y) \geq A(x/M, y, z).$$

Démonstration. Par le lemme 6.2 avec $t = 1$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{P}$

$$(11.30) \quad A(x, y, z) = \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x})} A(x/p, p, z).$$

Pour $0 < x < M$, la somme en p dans (11.28) est vide. On a donc $h(x, y) \geq 0 = A(x/M, y, z)$ et (11.29) est vérifiée.

On procède à présent par récurrence sur $k \geq 0$ en prouvant que l'inégalité (11.29) est vérifiée pour tous les couples (x, y) tels que $y \in \mathbb{P}$ et

$$(I_k) \quad 0 < x < M2^k.$$

On l'a montrée quand $k = 0$. On suppose à présent l'assertion vraie pour $k \geq 0$ et l'encadrement (I_{k+1}) vérifié.

En utilisant successivement (11.28), la minoration $M \geq 1$ et l'hypothèse de récurrence, et enfin (11.30), on obtient

$$\begin{aligned} h(x, y) &\geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h(x/p, p) \\ &\geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x/M) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} A(x/Mp, p, z) \\ &= A(x/M, y, z), \end{aligned}$$

et (11.29) est vérifiée. □

(i). Fin de la preuve du théorème 5.2. On combine les propositions 11.9 et 11.10.

Remerciements. Je remercie le rapporteur pour son formidable travail.

Bibliographie

- [1] M. BALAZARD, « Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier », *Ann. Inst. Fourier* **40** (1990), n° 2, p. 255-270.
- [2] A. CHADOZEAU, « Communication personnelle ».
- [3] P. ERDŐS, « On the density of some sequences of integers », *Bull. Am. Math. Soc.* **50** (1948), p. 685-692.
- [4] P. ERDŐS, R. FREUD & N. HEGYVARI, « Arithmetical properties of permutations of integers », *Acta Math. Hung.* **41** (1983), p. 169-176.
- [5] P. MAZET, « Recouvrements Hamiltoniens de certains graphes », *Eur. J. Comb.* **27** (2006), n° 5, p. 739-749.
- [6] P. MAZET & É. SAIAS, « Étude du graphe divisoriel 4 », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **29** (2020), n° 4, p. 971-975.
- [7] M. MEHDIZADEH, « The multiplication table for smooth integers », *J. Number Theory* **219** (2021), p. 172-197.
- [8] P. MELOTTI & É. SAIAS, « On path partitions of the divisor graph », *Acta Arith.* **192** (2020), n° 4, p. 329-339.
- [9] A. D. POLLINGTON, « There is a long path in the divisor graph », *Ars Comb.* **16-B** (1983), p. 303-304.
- [10] C. POMERANCE, « On the longest path in the divisor graph », *Congressus Numerantium*, vol. 40, Utilitas Mathematica Publishing Incorporated, 1983, p. 291-304.
- [11] C. POMERANCE, L. THOMPSON & A. WEINGARTNER, « On integers n for which $X^n - 1$ has a divisor of every degree », *Acta Arith.* **175** (2016), n° 3, p. 225-243.
- [12] C. POMERANCE & A. WEINGARTNER, « On primes and practical numbers », *Ramanujan J.* **57** (2022), n° 3, p. 981-1000.
- [13] É. SAIAS, « Étude du graphe divisoriel 6 », en préparation.
- [14] ———, « Longueur maximale d'un chemin élémentaire du graphe divisoriel », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), n° 5, p. 507-509.
- [15] ———, « Sur l'utilisation de l'identité de Buchstab », in *Séminaire de théorie des nombres, Paris, France, 1991-92*, Progress in Mathematics, vol. 116, 1993, p. 217-245.
- [16] ———, « Entiers à diviseurs denses », *J. Number Theory* **62** (1997), n° 1, p. 163-191.
- [17] ———, « Applications des entiers à diviseurs denses », *Acta Arith.* **83** (1998), n° 3, p. 225-240.
- [18] ———, « Entiers à diviseurs denses II », *J. Number Theory* **86** (2001), n° 1, p. 39-49.
- [19] ———, « Étude du graphe divisoriel II », *Monatsh. Math.* **137** (2002), n° 4, p. 301-312.
- [20] A. SCHINZEL & G. SZEKERES, « Sur un problème de M. Paul Erdős », *Acta Sci. Math.* **20** (1959), p. 221-229.
- [21] G. TENENBAUM, « Sur un problème de crible et ses applications », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **19** (1986), n° 1, p. 1-30.
- [22] ———, « Sur un problème de crible et ses applications. II : Corrigendum et étude du graphe divisoriel », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **28** (1995), n° 2, p. 115-127.
- [23] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ème éd., Belin, 2015.
- [24] G. TENENBAUM & A. WEINGARTNER, « An Erdős–Kac theorem for integers with dense divisors », *Q. J. Math.* **75** (2024), p. 161-195.
- [25] A. WEINGARTNER, « Integers with dense divisors », *J. Number Theory* **108** (2004), n° 1, p. 1-17.
- [26] ———, « Integers with dense divisors II », *J. Number Theory* **108** (2004), n° 1, p. 18-28.
- [27] ———, « Integers with dense divisors 3 », *J. Number Theory* **142** (2014), p. 211-222.
- [28] ———, « Practical numbers and the distribution of divisors », *Q. J. Math.* **66** (2015), n° 2, p. 743-758.
- [29] ———, « On the constant factor in several related asymptotic estimates », *Math. Comput.* **88** (2019), n° 318, p. 1883-1902.
- [30] ———, « An extension of the Siegel–Walfisz theorem », *Proc. Am. Math. Soc.* **149** (2021), n° 11, p. 4699-4708.

- [31] ———, « The number of prime factors of integers with dense divisors », *J. Number Theory* **239** (2022), p. 57-77.
- [32] ———, « The mean number of divisors for rough, dense and practical numbers », *Int. J. Number Theory* **19** (2023), n° 10, p. 2333-2351.

Éric SAIAS
Sorbonne Université
LPSM
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France)
E-mail: eric.saias@upmc.fr