

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Alexandre LARTAUD

Sur la fonction Delta de Hooley associée à des caractères

Tome 36, n° 1 (2024), p. 75-126.

<https://doi.org/10.5802/jtnb.1274>

© Les auteurs, 2024.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 4.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/fr/>



*Le Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux est membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*

<http://www.centre-mersenne.org/>

e-ISSN : 2118-8572

Sur la fonction Delta de Hooley associée à des caractères

par ALEXANDRE LARTAUX

RÉSUMÉ. Soit (f_1, f_2) un couple de fonctions arithmétiques et

$$\Delta_3(n, f_1, f_2) := \sup_{\substack{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} \left| \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u_i} < d_i \leq e^{u_i + v_i}}} f_1(d_1) f_2(d_2) \right|.$$

Dans cet article, nous fournissons une majoration du moment d'ordre 2 de $\Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)$ où χ_1 et χ_2 sont deux caractères de Dirichlet non principaux, en suivant les méthodes développées par La Bretèche et Tenenbaum dans [1]. Cette majoration est un résultat clé pour le comptage asymptotique du nombre d'idéaux de norme fixée, qui sera détaillé dans [4].

ABSTRACT. Let (f_1, f_2) a 2-tuple of arithmetic functions and

$$\Delta_3(n, f_1, f_2) := \sup_{\substack{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} \left| \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u_i} < d_i \leq e^{u_i + v_i}}} f_1(d_1) f_2(d_2) \right|.$$

In this paper, we give an upper bound of the second moment of $\Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)$ when χ_1 and χ_2 are two non principal Dirichlet characters, following methods developed by La Bretèche and Tenenbaum in [1]. This upper bound is a main step for the asymptotic counting of the number of ideals of norm fixed, which will be developed in [4].

1. Introduction

1.1. Notations et énoncés des théorèmes. Pour étudier l'ensemble

$$\{\log(d); d \mid n\},$$

la fonction Δ de Hooley, introduite dans [3] et définie par

$$(1.1) \quad \Delta(n) = \max_{u \in \mathbb{R}} (\Delta(n, u))$$

Manuscrit reçu le 20 février 2022, révisé le 3 août 2023, accepté le 27 octobre 2023.

Classification Mathématique (2020). 11N37, 11L40, 11N56, 11D45.

Mots-clés. Hooley's Delta-function, divisors, Dirichlet characters, Möbius function, moments of arithmetic functions, concentration functions, count of lattice points over algebraic varieties.

où

$$(1.2) \quad \Delta(n, u) = \sum_{\substack{d|n \\ e^u < d \leq e^{u+1}}} 1.$$

est un outil privilégié. Un résultat remarquable portant sur l'étude de l'ordre moyen de la fonction Δ a été apporté par Hall et Tenenbaum dans [2]. Il y est démontré que cet ordre moyen est $\log(n)^{o(1)}$.

Une généralisation de cette fonction est définie de la manière suivante.

Pour $r \geq 2$ et $n \geq 1$, nous notons

$$(1.3) \quad \Delta_r(n) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r-1}} (\Delta_r(n, \mathbf{u}))$$

où, pour $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{r-1})$,

$$(1.4) \quad \Delta_r(n, \mathbf{u}) = \sum_{\substack{d_1 \dots d_{r-1} | n \\ e^{u_i} < d_i \leq e^{u_i+1}}} 1.$$

Hall et Tenenbaum ([2]) parviennent à étendre la majoration de l'ordre moyen de $\Delta_r(n)$ lorsque $r \geq 3$. Aussi, l'ordre moyen obtenu est $\log(n)^{o(1)}$ pour $r \geq 2$.

Dans [1], La Bretèche et Tenenbaum s'intéressent à une autre généralisation. Ils étudient désormais la fonction Delta associée à un caractère de Dirichlet. Ils définissent donc, pour $n \geq 1$ et χ un caractère de Dirichlet non principal

$$(1.5) \quad \Delta(n, \chi) = \max_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ v \in [0,1]}} |\Delta(n, \chi, u, v)|$$

où

$$(1.6) \quad \Delta(n, \chi, u, v) = \sum_{\substack{d|n \\ e^u < d \leq e^{u+v}}} \chi(d).$$

Le caractère χ n'étant pas positif, le maximum en v n'est pas forcément atteint en $v = 1$, ce qui justifie l'apparition de cette nouvelle variable. Ils montrent que les compensations dues aux oscillations des caractères sont d'ordre statistique, puisque l'ordre moyen de $\Delta(n, \chi)^2$ est le même que celui de $\Delta(n)$ à un facteur $(\log n)^{o(1)}$ près.

Dans cet article, nous nous intéressons à la fonction Δ_3 lorsqu'elle est associée à deux caractères de Dirichlet. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$, nous posons

$$(1.7) \quad \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u_i} < d_i \leq e^{u_i+v_i}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2),$$

$$(1.8) \quad \Delta_3(n, \chi) = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} \in [0,1]^2}} |\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})|.$$

Nous introduisons la constante ρ définie par

$$(1.9) \quad \rho := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max(1, |1 + e^{i\vartheta}|^2) d\vartheta - 2 = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \approx 0,218,$$

et pour $y > 0$, nous notons

$$(1.10) \quad m(y, \rho) := \begin{cases} (\rho + 2)y & \text{si } y \leq \frac{1}{1-\rho}, \\ 3y - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire $m(y, \rho) = \max(3y - 1, (\rho + 2)y)$.

Pour la suite, lorsque χ_1 et χ_2 sont deux caractères de Dirichlet, nous notons

$$(1.11) \quad \chi := (\chi_1, \chi_2)$$

le couple constitué de ces deux caractères, et nous notons r_1 l'ordre de χ_1 et r_2 l'ordre de χ_2 . Par ailleurs, nous notons également q_1 et q_2 les conducteurs respectifs de χ_1 et χ_2 .

Pour $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0, 1[$, nous disons qu'une fonction positive et multiplicative g appartient à la classe $\mathcal{M}_A(c, \eta)$ si les conditions suivantes sont vérifiées

$$(1.12) \quad \begin{aligned} &\forall p \in \mathcal{P} \text{ et } \forall \nu \geq 1, g(p^\nu) \leq A^\nu \\ &\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon \\ &\sum_{p \leq x} g(p) = y \operatorname{li}(x) + O(x e^{-2c(\log x)^\eta}) \end{aligned}$$

pour une certaine constante $y = y(g) > 0$.

Lorsque χ est un caractère de Dirichlet d'ordre r , nous définissons $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ la classe des fonctions multiplicatives g appartenant à $\mathcal{M}_A(c, \eta)$ et vérifiant

$$(1.13) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{\substack{p \leq x \\ \chi(p) = \zeta^k}} g(p) = \frac{y}{r} \operatorname{li}(x) + O(x e^{-2c(\log x)^\eta})$$

où $y = y(g)$ et

$$(1.14) \quad \zeta := e^{2i\pi/r}.$$

Enfin, pour $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, $A > 0$, $c > 0$ et $\eta \in]0, 1[$, nous définissons la classe $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ par

$$\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta) := \mathcal{M}_A(\chi_1, c, \eta) \cap \mathcal{M}_A(\chi_2, c, \eta) \cap \mathcal{M}_A(\chi_1 \overline{\chi_2}, c, \eta).$$

Lorsque $x \geq 16$, nous notons

$$\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log_2(x) \log_3(x)}}$$

où \log_k désigne la k -ième itération de la fonction \log . Enfin, si g est une fonction arithmétique et χ un couple de caractères de Dirichlet, nous notons

$$(1.15) \quad \mathfrak{S}(x, g, \chi) := \sum_{n \leq x} g(n) \Delta_3(n, \chi)^2.$$

Théorème 1.1. *Soit χ défini en (1.11) un couple de caractères de Dirichlet non principaux tel que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ ne soit pas principal, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Pour $y = y(g) > 0$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, χ, c et η , telle que nous ayons, uniformément pour $x \geq 16$*

$$(1.16) \quad \mathfrak{S}(x, g, \chi) \ll x(\log x)^{\max\{y-1, (\rho+2)y-2, 3y-3\}} \mathcal{L}(x)^\alpha.$$

où ρ est défini en (1.9).

Remarque 1.2. En particulier, si $y(g) = 1$, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que nous ayons, uniformément pour $x \geq 16$

$$(1.17) \quad \mathfrak{S}(x, g, \chi) \ll x(\log x)^\rho \mathcal{L}(x)^\alpha,$$

Remarque 1.3. Comme nous le verrons par la suite, la première étape de la démonstration du théorème 1.1 consiste à ramener le problème à l'étude d'une somme d'entiers sans facteur carré, pondérés par un poids $\frac{1}{n}$. Pour cela, nous utilisons une propriété de sous multiplicativité de la fonction Δ . Cette propriété nous permet de supposer également que $g(n) = 0$ si $(n, q_1 q_2) \neq 1$ où q_1 et q_2 désignent les conducteurs respectifs de χ_1 et χ_2 .

Nous pouvons alors nous demander à quel point le théorème 1.1 est optimal. À cet effet, nous énonçons le théorème de minoration suivant.

Théorème 1.4. *Soient $y > 0$ un réel et χ un couple de caractères de Dirichlet non principaux.*

(i) *Si $\chi_1 \overline{\chi_2}$ n'est pas principal, alors nous avons lorsque $x \geq 3$,*

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n, \chi) \gg x(\log x)^{\max\{y-1, 3y-3\}}.$$

(ii) *Si $\chi_1 \overline{\chi_2}$ est principal, alors nous avons lorsque $x \geq 3$,*

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3^2(n, \chi) \gg x(\log x)^{\max\{y-1, 5y-4\}}.$$

Les résultats du théorème 1.1 et du théorème 1.4 montrent que l'exposant $\max\{y-1, (\rho+2)y-2, 3y-3\}$ est optimal lorsque $y \leq 1/(1+\rho)$ ou $y \geq 1/(1-\rho)$. Il est par ailleurs intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Hall et Tenenbaum. Dans [2], les auteurs établissent les estimations suivantes.

Théorème 1.5 (Hall, Tenenbaum [2]). *Pour tout $0 < y < 1$, il existe une constante α pour laquelle nous avons, lorsque $x \geq 16$,*

$$\sum_{n \leq x} y^{\omega(n)} \Delta_3(n) \ll x(\log x)^{y-1} \mathcal{L}(x)^\alpha.$$

Pour tout $y \geq 1$, il existe une constante β pour laquelle nous avons, lorsque $x \geq 16$,

$$\sum_{n \leq x} y^{\omega(n)} \Delta_3(n) \ll x(\log x)^{3y-3} \mathcal{L}(x)^\beta.$$

Les constantes α et β sont explicites.

Par ailleurs, des minoration triviale montrent que les exposants de $\log x$ sont optimaux. Nous pouvons donc observer que pour $y \leq 1/(1 + \rho)$ et pour $y \geq 1/(1 - \rho)$, $y^{\omega(n)} \Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)^2$ se comporte en moyenne comme $y^{\omega(n)} \Delta_3(n)$. Néanmoins pour les autres valeurs de y , notamment pour $y = 1$, nous ne savons pas si cela reste vrai.

Pour démontrer le théorème 1.1, nous étudierons les quantités suivantes

$$(1.18) \quad C(n, \chi) := \sup_{\substack{u_2 \in \mathbb{R} \\ v_1, v_2 \in [0, 1]^2}} C(n, \chi, u_2, v_1, v_2)$$

et

$$(1.19) \quad D(n, \chi) := \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ v_1, v_2 \in [0, 1]^2}} D(n, \chi, u, v_1, v_2)$$

où

$$(1.20) \quad C(n, \chi, u_2, \mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \chi, u_1, u_2, \mathbf{v})|^2 du_1$$

et

$$(1.21) \quad D(n, \chi, u, \mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \chi, u - u_1, u_1, \mathbf{v})|^2 du_1$$

avec $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, χ un couple de caractères de Dirichlet et $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme nous le verrons par la suite, les estimations de $C(n, \chi)$ et de $D(n, \chi)$ passent par l'estimation de

$$\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta) := \sup_{(u, v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1]^2} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|,$$

où

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2) \\ := \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^u < d_1 \leq e^{u+v_1}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta} (u + v_1 - v_2 - \log d_1)^k. \end{aligned}$$

Toutes ces quantités sont étudiées dans la partie 3.

1.2. Applications. Les résultats que nous obtenons pour l'ordre moyen de $\Delta_3(n, \chi_1, \chi_2)^2$ ne fournissent pas des compensations statistiques qui nous permettraient de le comparer à l'ordre moyen de $\Delta_3(n)$. Le théorème 1.1 est néanmoins utilisé de manière cruciale dans l'article [4] afin de fournir, dans un cadre particulier, une estimation asymptotique en ξ de la quantité suivante.

$$Q(F, \xi, \mathcal{R}) := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}(\xi)} r_3(F(\mathbf{x})),$$

où F est une forme binaire de degré 3, $r_3(n)$ compte le nombre d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombre de norme n , \mathcal{R} est un domaine de \mathbb{R}^2 . Enfin, nous désignons par $\mathcal{R}(\xi)$ le domaine de \mathbb{R}^2 obtenu en dilatant \mathcal{R} par ξ , c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(\xi) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}/\xi \in \mathcal{R}\}.$$

Dans le cas où le corps de nombre \mathbb{K} est une extension cyclique de \mathbb{Q} de degré 3, en notant $G := \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois et χ un caractère non principal de G , nous pouvons relier la fonction r_3 au caractère χ par l'égalité suivante.

$$r_3(n) = (1 * \chi * \chi^2)(n),$$

où $*$ désigne le produit de convolution entre deux fonctions arithmétiques. Pour f et g deux telles fonctions, celui-ci est la fonction arithmétique définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Nous formulons quatre hypothèses sur le domaine \mathcal{R} et sur la forme binaire F , valables pour certaines valeurs $\sigma > 0$ et $\vartheta > 0$.

(H1) Le domaine \mathcal{R} est un ouvert borné convexe dont la frontière est continuellement différentiable.

(H2) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \|\mathbf{x}\| \leq \sigma$.

(H3) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}, |F(\mathbf{x})| \leq \vartheta^3$.

(H4) La forme F est irréductible sur \mathbb{K} .

Théorème 1.6. *Soient \mathbb{K} une extension cyclique de \mathbb{Q} de degré 3, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\xi > 0$, F une forme binaire de degré 3 et \mathcal{R} un domaine de \mathbb{R}^2 tels que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) soient vérifiées. Sous les conditions*

$$1/\sqrt{\xi} \leq \sigma \leq \xi^{3/2}, \quad 1/\sqrt{\xi} \leq \vartheta \leq \xi^{3/2},$$

nous avons

$$(1.23) \quad Q(F, \xi, \mathcal{R}) = K(F)\text{vol}(\mathcal{R})\xi^2 + O\left(\frac{\|F\|^\varepsilon(\sigma^2 + \vartheta^2)\xi^2}{(\log \xi)^{0,0034}}\right).$$

où $\|F\|$ désigne le maximum des coefficients de la forme F et $K(F)$ est une constante explicite possédant une interprétation géométrique.

2. Résultats préliminaires

2.1. Majorer une norme infinie par une norme L^q . La démonstration du théorème 1.1 suit la méthode différentielle de [1]. Les lemmes que nous énonçons ici sont analogues à ceux de notre article de référence. Cependant, comme il s'agit ici essentiellement d'une généralisation à deux variables de ces lemmes, plusieurs difficultés apparaissent, nous rédigeons donc en détails les démonstrations.

Avant d'énoncer le premier lemme, quelques notations sont nécessaires.

Lorsque $n \geq 1$, nous posons

$$(2.1) \quad E(n) := \min_{\substack{d|n \\ d < d'}} \log \frac{d'}{d}, \quad E^*(n) := \min(1, E(n)).$$

Pour $n \geq 1$, $q \geq 1$, \mathbf{f} un couple de deux fonctions arithmétiques, nous posons

$$(2.2) \quad M_{2q}(n, \mathbf{f}) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_3(n, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2q} d\mathbf{u}d\mathbf{v}.$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nous notons

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Lorsque χ est un caractère de Dirichlet, nous notons

$$(2.3) \quad \Delta^*(n, \chi) := \max_{d|n} (\Delta(d, \chi)),$$

où $\Delta(n, \chi)$ est défini en (1.5).

Lemme 2.1. *Pour $n \geq 1$, $q \geq 1$, χ défini en (1.11), un couple de deux caractères de Dirichlet, nous avons*

$$(2.4) \quad \Delta_3(n, \chi)^2 \leq 4E^*(n)^{-4/q} M_{2q}(n, \chi)^{1/q} + 32(\Delta^*(n, \chi_1)^2 + \Delta^*(n, \chi_2)^2).$$

Les deuxième et troisième membres qui apparaissent dans ce majorant ne peuvent être trivialement traités par le théorème 1.1 de [1] puisque le maximum sur les diviseurs de n n'est pas forcément atteint en n , contrairement au cas où $\chi_1 = \chi_2 = 1$. Il nécessite donc une résolution particulière que nous développons dans la sous-section 4.1. Cet aspect constitue une des innovations de ce travail.

Démonstration. Si $\Delta_3(n, \chi) \leq 4(\Delta^*(n, \chi_1) + \Delta^*(n, \chi_2))$, le résultat est évident. Sinon, nous notons \mathbf{u}_0 et \mathbf{v}_0 les réels tels que

$$\Delta_3(n, \chi) = |\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)|$$

avec $\mathbf{u}_0 = (u_{01}, u_{02})$ et $\mathbf{v}_0 = (v_{01}, v_{02})$.

Pour tout $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ tels que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_\infty \leq E^*(n),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{\substack{\log(d) \in]u_1, u_1+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \Delta\left(\frac{n}{d}, \chi_2, u_2, v_2\right) \\
&= \sum_{\log(d) \in]u_{01}, u_{01}+v_{01}] \atop d|n} \chi_1(d) \Delta\left(\frac{n}{d}, \chi_2, u_2, v_2\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{\log(d) \in]u_1, u_1+v_1] \\ \log(d) \notin]u_{01}, u_{01}+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d) \Delta\left(\frac{n}{d}, \chi_2, u_2, v_2\right) \\
&\quad - \sum_{\substack{\log(d) \in]u_{01}, u_{01}+v_{01}] \\ \log(d) \notin]u_1, u_1+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \Delta\left(\frac{n}{d}, \chi_2, u_2, v_2\right).
\end{aligned}$$

L'ensemble des deux dernières sommes comporte au plus deux termes, il est donc majoré en valeur absolue par $2\Delta^*(n, \chi_2)$. Nous pouvons alors effectuer le même travail avec la première somme, ce qui nous permet de retrouver $\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ et un reste qui ne dépassera pas $2\Delta^*(n, \chi_1)$. Ainsi, pour tout \mathbf{u}, \mathbf{v} tels que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|_\infty \leq E^*(n)$, nous avons

$$|\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \geq \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) - 2(\Delta^*(n, \chi_1) + \Delta^*(n, \chi_2)).$$

Puisque $\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \geq 4(\Delta^*(n, \chi_1) + \Delta^*(n, \chi_2))$, nous avons

$$|\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \geq \frac{1}{2} \Delta_3(n, \chi).$$

En élevant cette inégalité à la puissance $2q$, en intégrant cette relation sur l'ensemble de mesure $E^*(n)^4$ sur lequel cette inégalité est valable, puis en prenant la racine q -ième, nous obtenons le résultat annoncé. \square

Pour la suite, lorsque χ est un caractère de Dirichlet, nous notons

$$(2.5) \quad M_{2q}^\dagger(n, \chi) := \sum_{d|n} M_{2q}(d, \chi)$$

avec

$$(2.6) \quad M_{2q}(n, \chi) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(n, \chi, u, v)|^{2q} du dv.$$

Lemme 2.2. *Pour $n \geq 1$, $q \geq 1$, χ un caractère de Dirichlet, nous avons*

$$(2.7) \quad \Delta^*(n, \chi)^2 \leq 4E^*(n)^{-2/q} M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{1/q} + 4\tau(n)^{1/q}.$$

Démonstration. Observons tout d'abord que pour tout n et pour tout χ , nous avons

$$\Delta^*(n, \chi)^2 \leq \left(\sum_{d|n} \Delta(d, \chi)^{2q} \right)^{1/q}.$$

Nous utilisons ensuite le lemme 2.1 de [1] sous la forme suivante

$$\Delta(d, \chi)^{2q} \leq 4^q E^*(d)^{-2} M_{2q}(d, \chi) + 4^q$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \Delta^*(n, \chi)^2 &\leq \left(\sum_{d|n} (4^q E^*(d)^{-2} M_{2q}(d, \chi) + 4^q) \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{d|n} 4^q E^*(n)^{-2} M_{2q}(d, \chi) + 4^q \tau(n) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons l'inégalité suivante valable pour tout $x, y \geq 0$ et $q \geq 1$

$$(x + y)^{1/q} \leq x^{1/q} + y^{1/q}. \quad \square$$

Pour les besoins du prochain lemme, nous notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, χ un caractère de Dirichlet et $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$(2.8) \quad \tau(n, \chi, \vartheta) := \sum_{d|n} \chi(d) d^{i\vartheta}.$$

Pour χ un couple de caractères de Dirichlet, $q \in \mathbb{N}$ et $j \leq q$, nous notons

$$(2.9) \quad M_{2q}^{(j)}(n, \chi, \vartheta) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(j)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2q} du dv_1 dv_2,$$

où les quantités $\Delta^{(j)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)$ sont définies en (1.22). Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$, nous posons

$$E_k(n) := \min \left(\frac{\log(3/2)}{k+1}, E(n) \right).$$

Lemme 2.3. *Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $q \geq 1$, χ un couple de caractères de Dirichlet et $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^2 \leq 16 E_k(n)^{-3/q} \sum_{j \leq k} M_{2q}^{(j)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q} + 64 e^2 \max_{d|n} (|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|^2).$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous notons j_k un entier $j \leq k$ tel que

$$\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta) := \max_{j \leq k} \Delta^{(j)}(n, \chi, \vartheta).$$

Si $\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta) \leq 8 e \max_{d|n} (|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|)$, le résultat est évident.

Sinon, nous notons u_0, v_{01} et v_{02} les réels tels que

$$\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta) = |\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta, u_0, v_{01}, v_{02})|.$$

Pour tout u, v_1, v_2 tels que

$$|u - u_0| + |v_1 - v_{01}| + |v_2 - v_{02}| \leq E_k(n),$$

nous avons

$$\begin{aligned} & \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2) \\ &= \sum_{\substack{\log(d) \in]u, u+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\ &= \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\ &\quad + \sum_{\substack{\log(d) \in]u, u+v_1] \\ \log(d) \notin]u_0, u_0+v_{01}] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\ &\quad - \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_{01}] \\ \log(d) \notin]u, u+v_1] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k}. \end{aligned}$$

Les deux dernières sommes comportent au plus un terme. Par ailleurs, nous avons, pour tout $\log(d) \in]u_0, u_0 + v_{01}] \cup]u, u + v_1]$

$$(u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \leq \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{j_k} \leq e.$$

Ainsi, ces deux sommes sont majorées par

$$e \max_{d|n} (|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|).$$

Pour la première somme, nous écrivons

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_0] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \\
 &= \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_0] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) \\
 & \quad (u_0 + v_0 - v_2 - \log d + (u - u_0 + v_1 - v_0 + v_2 - v_2))^{j_k} \\
 &= \sum_{j \leq j_k} \binom{j_k}{j} (u - u_0 + v_1 - v_0 + v_2 - v_2)^{j_k - j} \\
 & \quad \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_0] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta\right) (u_0 + v_0 - v_2 - \log d)^j.
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_0] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta_2\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \right| \\
 & \geq \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta) - ((1 + |u - u_0 + v_1 - v_0 + v_2 - v_2|)^{j_k} - 1) \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta).
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, nous avons

$$((1 + |u - u_0 + v_1 - v_0 + v_2 - v_2|)^{j_k} - 1) \leq \frac{1}{2},$$

ce qui fournit

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\substack{\log(d) \in]u_0, u_0+v_0] \\ d|n}} \chi_1(d) \tau\left(\frac{n}{d}, \chi_2, \vartheta_2\right) (u + v_1 - v_2 - \log d)^{j_k} \right| \\
 & \geq \frac{1}{2} \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta).
 \end{aligned}$$

Puisque $\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta) \geq 8$ e $\max_{d|n} |\tau(d, \chi, \vartheta)|$, nous avons

$$|\Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)| \geq \frac{1}{4} \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta).$$

En élevant cette inégalité à la puissance $2q$, en intégrant cette relation sur l'ensemble de mesure $E_k(n)^3$ sur lequel cette inégalité est valable, puis

en prenant la racine q -ième, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta)^2 &\leq 16E_k(n)^{-3/q} M_{2q}^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q} + 64e^2 \max_{d|n} (|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|^2) \\ &\leq 16E_k(n)^{-3/q} \sum_{j \leq k} M_{2q}^{(j)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q} + 64e^2 \max_{d|n} (|\tau(d, \chi_2, \vartheta)|^2). \end{aligned}$$

L'inégalité $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta) \leq \Delta^{(j_k)}(n, \chi, \vartheta)$ nous permet de conclure. \square

2.2. Un théorème de Shiu et une formule de Parseval. Le lemme suivant est une adaptation du lemme 2.2 de [1] qui nous permet de négliger la contribution des entiers n pour lesquels le facteur $E(n)$, défini en (2.1), est trop petit.

Lemme 2.4. *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$, g une fonction de $\mathcal{M}_A(c, \eta)$ et $Y \geq 27y$ où $y = y(g) > 0$. Nous avons uniformément en $\sigma > 0$*

$$(2.10) \quad \sum_{\substack{n \geq 1 \\ E(n) \leq \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} \ll 1.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2 de [1]. Pour un tel choix de Y , dire qu'un entier n vérifie l'inégalité

$$E(n) \leq \sigma^Y$$

implique qu'il possède deux diviseurs premiers entre eux d_1, d_2 vérifiant d'une part $d_1 < d_2 \leq (1 + \sigma^Y)d_1$, et d'autre part $\frac{1}{2\sigma^Y} \leq d_1$.

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ E(n) \leq \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} &\leq \sum_{\substack{m, d_1, d_2 \\ \frac{1}{2\sigma^Y} \leq d_1 < d_2 \leq (1+\sigma^Y)d_1 \\ (d_1, d_2)=1}} \frac{\tau_3(m)^2 \tau_3(d_1)^2 \tau_3(d_2)^2}{(md_1d_2)^{1+\sigma}} g(m)g(d_1)g(d_2) \\ &\ll \frac{1}{\sigma^{9y}} \sum_{\frac{1}{2\sigma^Y} \leq d_1} \frac{g(d_1)\tau_3(d_1)^2}{d_1^{2+\sigma}} \sum_{\substack{d_1 < d_2 \leq (1+\sigma^Y-y)d_1 \\ (d_1, d_2)=1}} g(d_2)\tau_3(d_2)^2. \end{aligned}$$

Le théorème 1 de Shiu [5] nous permet de majorer la somme intérieure, ce qui fournit l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ E(n) \leq \sigma^Y}} \frac{\mu^2(n)g(n)\tau_3(n)^2}{n^{1+\sigma}} &\ll \sigma^{Y-10y} \sum_d \frac{g(d)\tau_3(d)^2}{d^{1+\sigma}} \log(d)^{8y} \\ &\ll \sigma^{Y-27y} \\ &\ll 1. \end{aligned} \quad \square$$

Pour $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de caractères de Dirichlet, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2$, nous posons

$$(2.11) \quad \tau(n, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2) := \sum_{d_1 d_2 | n} \chi_1(d_1) d_1^{i\vartheta_1} \chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta_2},$$

et pour $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous posons

$$(2.12) \quad \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta) := \int_{\mathbb{R}^2} |\tau(n, \chi, \vartheta_1, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta_1}{1 + \vartheta_1^2}.$$

Lemme 2.5. Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de Dirichlet et $n \geq 1$ un entier. Nous avons, uniformément pour $k \in \mathbb{N}$ et $v_1, v_2 \in [0, 1]^2$

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^2 du \ll (k+1)^2 \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta)$$

où $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)$ est défini en (1.22).

Démonstration. Posons

$$f : u \mapsto \Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2).$$

Il s'agit d'une somme de fonctions portes, nous pouvons donc calculer sa transformée de Fourier, notée \widehat{f} .

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\vartheta_1) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iu\vartheta_1} du \\ &= \sum_{d_1 d_2 | (n)} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta} \int_{\log d_1 - v_1}^{\log d_1} (u + v_1 - v_2 - \log d_1)^k e^{-iu\vartheta_1} du \\ &= \sum_{d_1 d_2 | (n)} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{i\vartheta} d_1^{-i\vartheta_1} \int_{-v_1}^0 (u + v_1 - v_2)^k e^{-iu\vartheta_1} du \\ &= \tau(n, \chi, \vartheta, -\vartheta_1) \int_{-v_1}^0 (u + v_1 - v_2)^k e^{-iu\vartheta_1} du. \end{aligned}$$

Or, pour tout $v_1, v_2 \in [0, 1]^2$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left| \int_{-v_1}^0 (u + v_1 - v_2)^k e^{-iu\vartheta_1} du \right| \leq \min\left(1, \frac{k+2}{|\vartheta_1|}\right).$$

L'inégalité

$$\left| \int_{-v_1}^0 (u + v_1 - v_2)^k e^{-iu\vartheta_1} du \right| \leq 1$$

est triviale puisqu'on intègre sur un intervalle de taille plus petite que 1 une fonction majorée par 1 en valeur absolue. L'inégalité

$$\left| \int_{-v_1}^0 (u + v_1 - v_2)^k e^{-iu\vartheta_1} du \right| \leq \frac{k+2}{|\vartheta_1|}$$

est fournie par une intégration par partie. La formule de Parseval nous permet de conclure. \square

2.3. Des inégalités de Hölder. Avant d'établir le prochain lemme, quelques notations sont nécessaires.

Pour $n \geq 1$, $1 \leq j \leq q$ des entiers, $w \in \mathbb{R}$ et χ défini en (1.11), un couple de caractères de Dirichlet, nous posons

$$(2.13) \quad N_{1,j,q}(n, \chi, w) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})^{2j} \Delta_3(n, \chi, u_1 - w, u_2, \mathbf{v})^{2(q-j)} d\mathbf{u} d\mathbf{v},$$

$$(2.14) \quad N_{2,j,q}(n, \chi, w) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})^{2j} \Delta_3(n, \chi, u_1 - w, u_2 + w, \mathbf{v})^{2(q-j)} d\mathbf{u} d\mathbf{v}.$$

De plus, nous posons

$$(2.15) \quad \widehat{\tau}_2(n, \chi) := \int_{\mathbb{R}^2} |\tau(n, \chi, \vartheta)|^2 \prod_{i=1}^2 \frac{1}{1 + \vartheta_i^2} d\vartheta,$$

où $\tau(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (2.11).

Lemme 2.6. *Soient $A > 0$, $c > 0$ des constantes, $\eta \in]0, 1[$ et χ un couple de caractères de Dirichlet. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c, \eta)$, $q \geq 1$, $1 \leq j \leq q - 1$, $n \geq 1$ et $x \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{p > x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{1,j,q}(n, \chi, \log p) \ll M_{2q}(n, \chi)^{(q-2)/(q-1)} C(n, \chi) \widehat{\tau}_2(n, \chi)^{1/(q-1)} + R_{2,q}(n, x),$$

où $C(n, \chi)$ est défini en (1.18),

$$R_{2,q}(n, x) \ll e^{-c(\log x)^\eta} 4^q M_{2q}(n)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)}$$

et

$$M_h(n) := \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_3(n, \mathbf{u})^h d\mathbf{u},$$

avec $\Delta_3(n, \mathbf{u})$ défini en (1.4). De plus, si nous remplaçons $N_{1,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, \log p)$ par $N_{2,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, \log p)$, alors la majoration reste valable en remplaçant $C(n, \boldsymbol{\chi})$ par $D(n, \boldsymbol{\chi})$, défini en (1.19).

Démonstration. Nous raisonnons uniquement sur la fonction $N_{1,j,q}$, la démonstration pour la fonction $N_{2,j,q}$ étant analogue. Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{1,j,q}(n, \boldsymbol{\chi}, \log p) = \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2j} S_{2(q-j)} \mathbf{d}\mathbf{u} \mathbf{d}\mathbf{v},$$

où

$$S_{2h} := \sum_{p>x} \frac{g(p) \log(p)}{p} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - \log(p), u_2, \mathbf{v})|^{2h}.$$

Un développement de la somme définissant Δ_3 fournit l'égalité suivante

$$S_{2h} = \sum_{d_1, \dots, d_{2h} | n} \chi_1(d_1 \cdots d_h) \overline{\chi_1(d_{h+1} \cdots d_{2h})} \prod_{i=1}^h \Delta\left(\frac{n}{d_i}, \chi_2, u_2, v_2\right) \overline{\Delta\left(\frac{n}{d_{h+i}}, \chi_2, u_2, v_2\right)} \sum_{\substack{u_1 - \log \min d_r < \log p \leq u_1 + v_1 - \log \max d_r \\ p > x}} \frac{g(p) \log p}{p}.$$

Par sommation d'Abel, la somme intérieure vaut, dans le cas où $\log(\max d_r / \min d_r) \leq v_1$

$$y \int_{u_1 - \log \min d_r}^{u_1 + v_1 - \log \max d_r} 1_{[0,1]}\left(\frac{\log x}{t}\right) dt + O(e^{-c(\log x)^\eta})$$

où $y = y(g)$.

De plus, elle est nulle si l'inégalité n'est pas respectée. En adaptant le théorème 72 de [2], nous obtenons, pour tout $h \geq 1$

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_h | n \\ \log(\max d_i) - \log(\min d_i) \leq v_1}} \prod_{i=1}^h \Delta\left(\frac{n}{d_i}, u_2\right) \leq 2^h M_h(n, u_2),$$

où

$$M_h(n, u_2) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^h \mathbf{d}u_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{2h} &= y \int_{\log x}^{+\infty} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - t, u_2, \mathbf{v})|^{2h} dt + O(2^{2h} M_{2h}(n, u_2) e^{-c(\log x)^\eta}) \\ &\leq y \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1 - t, u_2, \mathbf{v})|^{2h} dt + O(2^{2h} M_{2h}(n, u_2) e^{-c(\log x)^\eta}). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$(2.16) \quad \sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{1,j,q}(n, \log p) \\ \leq y Q_j + O\left(2^{2(q-j)} \int_{\mathbb{R}} M_{2(q-j)}(n, u_2) M_{2j}(n, u_2) du_2 e^{-c(\log x)^\eta}\right),$$

où

$$Q_j := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}', \mathbf{v})|^{2j} du'_1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2(q-j)} du_1 \right) du_2 d\mathbf{v},$$

avec $\mathbf{u}' = (u'_1, u_2)$.

Nous appliquons alors l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{q-1}{q-j}$ et $\frac{q-1}{j-1}$ à

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2j} du_1$$

en écrivant $j = q \frac{j-1}{q-1} + \frac{q-j}{q-1}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2j} du_1 \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^{2q} du_1 \right)^{(j-1)/(q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 du_1 \right)^{(q-j)/(q-1)}.$$

En appliquant le même raisonnement en remplaçant j par $q-j$, nous obtenons finalement

$$Q_j \ll M_{2q}(n, \boldsymbol{\chi})^{(q-2)/(q-1)} \left(\int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 du_1 \right)^q du_2 d\mathbf{v} \right)^{1/(q-1)} \\ \ll M_{2q}(n, \boldsymbol{\chi})^{(q-2)/(q-1)} C(n, \boldsymbol{\chi}) M_2(n, \boldsymbol{\chi})^{1/(q-1)}.$$

Une adaptation du lemme 2.3 de [1] fournit

$$M_2(n, \boldsymbol{\chi}) \ll \widehat{\tau}_2(n, \boldsymbol{\chi}).$$

Pour traiter la contribution du terme d'erreur du majorant de (2.16), nous effectuons un raisonnement similaire. Le terme $|\Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|$ est clairement majoré par $\Delta_3(n, \mathbf{u})$. Puis, une inégalité de Hölder avec exposants $\frac{2q-1}{2(q-j)}$ et $\frac{2q-1}{2j-1}$ montre l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^{2j} du_1 \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^2 du_1 \right)^{2(q-j)/(2q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^{2q} du_1 \right)^{(2j-1)/(2q-1)}.$$

Le même raisonnement en remplaçant j par $q - j$ fournit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^{2j} du_1 \int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^{2(q-j)} du_1 du_2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u})^{2q} du_1 \right)^{(2q-2)/(2q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u}) du_1 \right)^{2q/(2q-1)} du_2 \\ & \leq M_{2q}(n)^{(2q-2)/(2q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u}) du_1 \right)^{2q} du_2 \right)^{1/(2q-1)}. \end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons l'estimation

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \mathbf{u}) du_1 \right)^{2q} du_2 \\ & = \sum_{d_1, \dots, d_{2q} | n} \prod_{i=1}^{2q} \tau\left(\frac{n}{d_i}\right) \max\left(0, 1 - \log\left(\frac{\max(d_i)}{\min(d_i)}\right)\right) \\ & \leq \sum_{d_1, \dots, d_{2q} | n} \prod_{i=1}^{2q} \tau\left(\frac{n}{d_i}\right) \\ & \leq \tau_3(n)^{2q}. \quad \square \end{aligned}$$

Pour le prochain lemme, nous notons, lorsque χ est un caractère de Dirichlet non principal,

$$(2.17) \quad N_{j,q}^\dagger(n, \chi, w) := \sum_{d|n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d, \chi, u, v)|^{2j} |\Delta(d, \chi, u-w, v)|^{2(q-j)} du dv,$$

et

$$(2.18) \quad \widehat{\tau}_0(n, \chi) := \left(\sum_{d|n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau(d, \chi, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2} \right)^q \right)^{1/q},$$

où $\tau(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (2.8). Enfin, nous définissons

$$M_h^\dagger(n) := \sum_{d|n} M_h(d),$$

où

$$M_h(d) := \int_{\mathbb{R}} \Delta(d, u)^h du.$$

Lemme 2.7. *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et χ un caractère de Dirichlet non principal. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c, \eta)$, $q \geq 1$, $1 \leq j \leq q-1$, $n \geq 1$ et $x \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^\dagger(n, \chi, \log p) \ll M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{q-2/q-1} \widehat{\tau}_0(n, \chi)^{q/q-1} + R_q^\dagger(n, x),$$

où

$$R_q^\dagger(n, x) \ll e^{-c(\log x)^\eta} 4^q M_{2q}^\dagger(n)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)},$$

$N_{j,q}^\dagger(n, \chi, \log p)$ est défini en (2.17) et $\widehat{\tau}_0(n, \chi)$ est défini en (2.18).

Démonstration. Nous reprenons la démonstration du lemme 2.6. Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^\dagger(n, \chi, \log p) = \sum_{d|n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d, \chi, u, v)|^{2j} S_{2(q-j)}^*(d) dudv,$$

où

$$S_{2h}^*(d) := \sum_{p>x} \frac{g(p) \log(p)}{p} |\Delta(d, \chi, u - \log(p), v)|^{2h}.$$

Le développement de $S_{2h}^*(d)$ et l'application du théorème des nombres premiers fournissent

$$S_{2h}^*(d) \leq y \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d, \chi, u - t, v)|^{2h} dt + O\left(2^{2h} M_{2h}(d) e^{-c(\log x)^\eta}\right)$$

où $y = y(g)$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^\dagger(n, \chi, \log p) \\ \leq y Q_j^\dagger + O\left(2^{2(q-j)} \sum_{d|n} M_{2j}(d) M_{2(q-j)}(d) e^{-c(\log x)^\eta}\right), \end{aligned}$$

où

$$Q_j^\dagger := \sum_{d|n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d, \chi, u, v)|^{2j} du \int_{\mathbb{R}} |\Delta(d, \chi, u, v)|^{2(q-j)} dudv.$$

Des inégalités de Hölder impliquent

$$\begin{aligned} Q_j^\dagger &\ll \sum_{d|n} M_{2q}(d, \chi)^{(q-2)/(q-1)} \widehat{\tau}(d, \chi)^{q/(q-1)} \\ &\ll M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{(q-2)/(q-1)} \widehat{\tau}_0(n, \chi)^{q/(q-1)}, \end{aligned}$$

où

$$\widehat{\tau}(n, \chi) = \int_{\mathbb{R}} |\tau(n, \chi, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2}.$$

Le terme d'erreur se traite de manière analogue au lemme 2.6. \square

Pour le prochain lemme, nous définissons, pour $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, χ un couple de caractères de Dirichlet, $1 \leq j < q$ et $(w, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$

$$(2.19) \quad N_{j,q}^{(k)}(n, \chi, w, \vartheta) := \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2j} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - w, v_1, v_2)|^{2(q-j)} du dv_1 dv_2,$$

où $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)$ est défini en (1.22). Enfin, nous notons

$$(2.20) \quad M_h^{(1)}(n, \tau) := \int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u, 1)^h du$$

où $\Delta(n, \tau, u, 1)$ est défini en (1.6) et τ est la fonction nombre de diviseurs.

Lemme 2.8. *Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$ et χ un couple de caractères de Dirichlet. Pour toute fonction g de $\mathcal{M}_A(c, \eta)$, $q \geq 1$, $1 \leq j \leq q - 1$, $n \geq 1$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $x \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{p > x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta, \log p) \ll (k+1)^{2q/(q-1)} M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^{q-2/q-1} \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta)^{q/q-1} + R_{k,q}(n, x),$$

où $M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (2.9), $\widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (2.12), et

$$R_{k,q}(n, x) \ll (k+1)q e^{-c(\log x)^\eta} 4^q M_{2q}^{(1)}(n, \tau)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)}.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p > x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta, \log p) &= \int_{[0,1]^2} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2j} S_{2(q-j)}^{(k)} du dv_1 dv_2, \end{aligned}$$

où

$$S_{2h}^{(k)} := \sum_{p > x} \frac{g(p) \log(p)}{p} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - \log(p), v_1, v_2)|^{2h}.$$

Un développement de la somme définissant $\Delta^{(k)}$ fournit l'égalité suivante

$$\begin{aligned} S_{2h}^{(k)} &= \sum_{d_1, \dots, d_{2h} | n} \chi_1(d_1 \cdots d_h) \overline{\chi_1(d_{h+1} \cdots d_{2h})} \prod_{i=1}^h \tau\left(\frac{n}{d_i}, \chi_2, \vartheta\right) \overline{\tau\left(\frac{n}{d_{h+i}}, \chi_2, \vartheta\right)} \\ &\quad \sum_{\substack{u - \log \min d_r < \log p \leq u + v_1 - \log \max d_r \\ p > x}} \frac{g(p) \log p}{p} \prod_{i=1}^{2h} (u + v_1 - v_2 - \log p - \log d_i)^k. \end{aligned}$$

Par sommation d'Abel, la somme intérieure vaut, dans le cas où $\log(\max d_r / \min d_r) \leq v_1$

$$y \int_{u_1 - \log \min d_r}^{u_1 + v_1 - \log \max d_r} 1_{[0,1]} \left(\frac{\log x}{t} \right) \prod_{i=1}^{2h} (u + v_1 - v_2 - t - \log d_i)^k dt + O((k+1)h e^{-c(\log x)^\eta})$$

où $y = y(g)$. Le point important étant que tous les termes

$$(u + v_1 - v_2 - t - \log d_i)^k$$

sont majorés par 1 en valeur absolue dans les intervalles, en t , considérés, ce qui permet d'obtenir le terme d'erreur ci-dessus.

De plus, elle est nulle si l'inégalité n'est pas respectée. En adaptant le théorème 72 de [2], nous obtenons, pour tout $h \geq 1$

$$\sum_{\substack{d_1, \dots, d_h | n \\ \log(\max d_i) - \log(\min d_i) \leq v_1}} \prod_{i=1}^h \tau \left(\frac{n}{d_i} \right) \leq 2^h M_h^{(1)}(n, \tau),$$

où $M_h^{(1)}(n, \tau)$ est défini en (2.20). Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{2h}^{(k)} &= y \int_{\log x}^{+\infty} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - t, v_1, v_2)|^{2h} dt \\ &\quad + O((k+1)h 2^{2h} M_{2h}^{(1)}(n, \tau) e^{-c(\log x)^\eta}) \\ &\leq y \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - t, v_1, v_2)|^{2h} dt \\ &\quad + O((k+1)h 2^{2h} M_{2h}^{(1)}(n, \tau) e^{-c(\log x)^\eta}). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$(2.21) \quad \sum_{p>x} \frac{g(p) \log p}{p} N_{j,q}^{(k)}(n, \vartheta, \log p) \leq y Q_j + O\left((k+1)(q-j) 2^{2(q-j)} M_{2(q-j)}^{(1)}(n, \tau) M_{2j}^{(1)}(n, \tau) e^{-c(\log x)^\eta}\right),$$

où

$$Q_j := \int_{[0,1]^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u', v_1, v_2)|^{2j} du' \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2(q-j)} du \right) dv_1 dv_2.$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{q-1}{q-j}$ et $\frac{q-1}{j-1}$ à

$$|\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2j}$$

en écrivant $j = q \frac{j-1}{q-1} + \frac{q-j}{q-1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2j} du \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2q} du \right)^{(j-1)/(q-1)} \\ \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^2 du \right)^{(q-j)/(q-1)}. \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement en remplaçant j par $q - j$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} Q_j \ll M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^{(q-2)/(q-1)} \\ \left(\int_{[0,1]^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^2 du \right)^q dv_1 dv_2 \right)^{1/(q-1)}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.5 fournit la majoration suivante, uniformément pour $v_1, v_2 \in [0, 1]^2$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^2 du \ll (k+1)^2 \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta).$$

Pour traiter la contribution du terme d'erreur du majorant de (2.21), nous appliquons une inégalité de Hölder avec exposants $\frac{2q-1}{2(q-j)}$ et $\frac{2q-1}{2j-1}$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u)^{2j} du \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u)^2 du \right)^{2(q-j)/(2q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u)^{2q} du \right)^{(2h-1)/(2q-1)}. \end{aligned}$$

Le même raisonnement en remplaçant j par $q - j$ fournit

$$\begin{aligned} M_{2j}^{(1)}(n, \tau) M_{2(q-j)}^{(1)}(n, \tau) \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u)^{2q} du \right)^{(2q-2)/(2q-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta(n, \tau, u) du \right)^{2q/(2q-1)} \\ \leq M_{2q}^{(1)}(n, \tau)^{(2q-2)/(2q-1)} \tau_3(n)^{2q/(2q-1)}. \quad \square \end{aligned}$$

2.4. Estimations de sommes sur les nombres premiers. Les lemmes présentés dans cette sous-section sont des lemmes arithmétiques fondamentaux pour les différentes démonstrations de cet article.

Lemme 2.9. Soient χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r , A, c des constantes strictement positives et $\eta \in]0, 1[$. Pour $T > 1$ et g appartenant $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$, nous avons, uniformément pour $\sigma > 0$, $1 \leq q \leq \frac{1}{\sigma}$ et $|\vartheta| \leq q\sigma$

$$(2.22) \quad \sum_{p>T} \max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leq \frac{3y}{\sigma} + O(1),$$

où $y = y(g)$. Nous avons uniformément pour $q\sigma \leq |\vartheta| \leq e^{c(\log T)^\eta}$

$$(2.23) \quad \sum_{p>T} \max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} = \frac{(\rho + 2)y + O(1/q)}{\sigma},$$

où ρ est défini en (1.9), et uniformément pour $|\vartheta| \geq e^{c(\log T)^\eta}$

$$(2.24) \quad \sum_{p>T} |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2 g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leq \frac{4y}{\sigma} + O(1).$$

Démonstration. Lorsque $|\vartheta| \leq q\sigma$, nous utilisons l'inégalité suivante

$$\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2) \leq 1 + |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2,$$

ce qui fournit

$$\begin{aligned} \sum_{p>T} \max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \\ \leq \sum_{p>T} (3 + \chi(p)p^{i\vartheta} + \overline{\chi(p)p^{i\vartheta}}) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}}. \end{aligned}$$

D'après (1.12), nous avons d'une part

$$\sum_{p>T} 3g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \leq \frac{3y}{\sigma} + O(1)$$

et d'autre part, d'après (1.13)

$$\begin{aligned} \sum_{p>T} \chi(p)p^{i\vartheta} g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\substack{p>T \\ \chi(p)=\zeta^k}} \zeta^k p^{i\vartheta} g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} \\ &= \frac{y}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k \left(\int_{\log T}^{+\infty} e^{(-\sigma+i\vartheta)u} du + O(|\vartheta| e^{-c(\log T)^\eta}) \right) \\ &= \frac{y}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k \frac{T^{-\sigma+i\vartheta}}{\sigma - i\vartheta} + O(|\vartheta| e^{-c(\log T)^\eta}) \\ &= O(|\vartheta| e^{-c(\log T)^\eta}) \end{aligned}$$

ce qui fournit (2.22) puisque $|\vartheta| \leq e^{c(\log T)^\eta}$.

Si $q\sigma \leq |\vartheta| \leq e^{c(\log T)^\eta}$, nous observons que la fonction

$$t \mapsto \max(1, |1 + e^{it}|^2)$$

est périodique, de période 2π , et de moyenne $\rho + 2$. Une intégration par partie semblable au lemme III.4.13 de [6] fournit

$$\sum_{p>T} \max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2) g(p) \frac{\log p}{p^{1+\sigma}} = \frac{(\rho + 2)y}{\sigma} + O\left(\frac{1}{|\vartheta|} + \frac{|\vartheta| + 1}{e^{c(\log T)^\eta}}\right),$$

ce qui implique (2.23). Dans le dernier cas, nous nous contentons de la majoration triviale

$$|1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2 \leq 4. \quad \square$$

Pour $r \geq 1$, nous notons

$$(2.25) \quad \kappa(r) := \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \max(1, |1 + \zeta^k|^2)$$

où ζ est défini en (1.14).

Lemme 2.10. *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal d'ordre r , A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et g appartenant $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons, uniformément pour $x \geq 16$ et $0 < |\vartheta| \leq 1$,*

$$\sum_{p \leq x} g(p) \frac{\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p} = y\kappa(r) \log\left(\frac{\log x}{1 + |\vartheta| \log x}\right) + y(\rho + 2) \log(1 + |\vartheta| \log x) + O(1),$$

où $y = y(g)$, et uniformément pour $|\vartheta| > 1$

$$\sum_{p \leq x} g(p) \frac{\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p} \leq y(\rho + 2) \log(1 + |\vartheta| \log x) + B \log_2(2 + |\vartheta|),$$

où ρ est défini en (1.9).

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.5 de [1]. La fonction

$$t \mapsto \max(1, |1 + e^{it}|^2)$$

est périodique, de moyenne $\rho + 2$. Ainsi, si nous nous donnons un paramètre $w \leq x$, une intégration par partie semblable à celle du lemme III.4.13 de [6] fournit

$$\sum_{w < p \leq x} \frac{g(p) \max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p} = y(\rho + 2) \log\left(\frac{\log x}{\log w}\right) + O\left(\frac{1}{|\vartheta| \log w} + \frac{1 + |\vartheta|}{e^{c(\log w)^\eta}}\right).$$

Pour les entiers $p \leq w$, nous nous contentons d'approcher $p^{i\vartheta}$ par 1, l'erreur que nous commettons est alors $O(|\vartheta| \log w)$. Ainsi

$$\sum_{p \leq w} g(p) \frac{\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p} = y\kappa(r) \log_2(w) + O(1 + |\vartheta| \log w).$$

Il s'agit désormais de choisir le paramètre w afin d'obtenir les formules souhaitées. Pour $|\vartheta| \leq \frac{1}{\log x}$, nous choisissons $w = x$.

Pour $1/\log x \leq |\vartheta| \leq 1$, nous choisissons $w = \exp\left(\frac{\log x}{1+|\vartheta| \log x}\right)$.

Pour $1 \leq |\vartheta| \leq \exp(c(\log x)^\eta) - 2$, nous choisissons

$$w = \exp((2/c)(\log(2 + |\vartheta|))^{1/\eta}).$$

Dans le dernier cas, nous nous contentons d'observer que la somme à majorer est $\ll \log_2(x) \ll \log_2(2 + |\vartheta|)$. \square

Lemme 2.11. *Soient χ un caractère de Dirichlet d'ordre $r > 1$, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons uniformément pour $x \geq 16$ et $|\vartheta| \leq 1$*

$$\sum_{p \leq x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} = O(1)$$

et uniformément pour $|\vartheta| > 1$

$$\sum_{p \leq x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} \leq B \log_2(2 + |\vartheta|).$$

Démonstration. Notant ζ le complexe défini en (1.14), nous avons

$$\sum_{p \leq x} g(p) \frac{\chi(p)}{p} p^{i\vartheta} = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\substack{p \leq x \\ \chi(p) = \zeta^k}} g(p) \frac{\zeta^k}{p} p^{i\vartheta}.$$

La suite de la démonstration est identique à celle du lemme 2.5 de [1], nous introduisons un paramètre w , choisi convenablement par la suite. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est périodique de période nulle, donc le lemme III.4.13 de [6] permet d'écrire

$$\sum_{\substack{w < p \leq x \\ \chi(p) = \zeta^k}} \frac{g(p)}{p} p^{i\vartheta} = O\left(\frac{1}{|\vartheta| \log w} + \frac{1 + |\vartheta|}{e^{c(\log w)^\eta}}\right).$$

Par ailleurs, pour $p \leq w$, nous approchons $p^{i\vartheta}$ par 1, l'erreur que nous commettons étant $O(|\vartheta| \log w)$. Nous renvoyons à la démonstration du lemme 2.10 pour savoir comment choisir w afin que les différents termes d'erreur soient $O(1)$ lorsque $|\vartheta| \leq 1$ et $O(\log_2(2 + |\vartheta|))$ lorsque $|\vartheta| > 1$. Nous concluons en remarquant que $\sum_{k=0}^{r-1} \zeta^k = 0$. \square

Lemme 2.12. Soit χ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ ne soit pas principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et g appartenant à $\mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Pour $x \geq 16$ et uniformément pour $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} g(p) \frac{|1 + \chi_1(p)p^{i\vartheta_1} + \chi_2(p)p^{i\vartheta_2}|^2}{p} \\ \leq 3y \log_2(x) \\ + B(\log_2(2 + |\vartheta_1|)1_{]1, +\infty[}(|\vartheta_1|) + \log_2(2 + |\vartheta_2|)1_{]1, +\infty[}(|\vartheta_2|)) + O(1), \end{aligned}$$

où $y = y(g)$.

Démonstration. Un développement du carré du module fournit

$$\begin{aligned} |1 + \chi_1(p)p^{i\vartheta_1} + \chi_2(p)p^{i\vartheta_2}|^2 \\ = 3 + \chi_1(p)p^{i\vartheta_1} + \overline{\chi_1(p)}p^{-i\vartheta_1} + \chi_2(p)p^{i\vartheta_2} + \overline{\chi_2(p)}p^{-i\vartheta_2} \\ + \chi_1(p)\overline{\chi_2(p)}p^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} + \chi_2(p)\overline{\chi_1(p)}p^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)}. \end{aligned}$$

Nous étudions alors les sommes sur p de chacun de ces termes séparément, en utilisant le lemme 2.11 pour obtenir le résultat énoncé. \square

2.5. Lemmes fondamentaux. Le terme $\kappa(r)$ défini en (2.25) peut facilement être majoré par 3, ce majorant est suffisant pour la suite, néanmoins, nous pouvons l'améliorer, au moyen de la proposition suivante.

Lemme 2.13. Pour tout entier $r \geq 2$, nous avons

$$\kappa(r) \leq \frac{5}{2},$$

où $\kappa(r)$ est défini en (2.25). Cette inégalité est une égalité lorsque $r = 2$.

Démonstration. Nous notons $A_r = \{z \in \mathbb{U}_r : |1 + z| < 1\}$ où \mathbb{U}_r désigne l'ensemble des racines r -ièmes de l'unité. Ainsi

$$\begin{aligned} \kappa(r) &= \frac{1}{r} \left(\sum_{z \notin A} |1 + z|^2 + \sum_{z \in A} 1 \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\sum_{z \in \mathbb{U}_r} |1 + z|^2 + \sum_{z \in A} (1 - |1 + z|^2) \right) \\ &= 2 + \frac{1}{r} \sum_{z \in A} (1 - |1 + z|^2). \end{aligned}$$

Si A_r est non vide, nous pouvons choisir $z \in A_r$, alors $\arg(z) \in]2\pi/3, 4\pi/3[$, ainsi, pour tout $z' \in A_r$, $\arg(zz') \in]4\pi/3, 8\pi/3[$, donc $zz' \notin A_r$, nous avons

donc une injection de A_r dans $\mathbb{U}_r \setminus A_r$, ce qui montre que $|A_r| \leq \frac{r}{2}$. Ainsi

$$\kappa(r) \leq \frac{5}{2}. \quad \square$$

Par la suite, pour $T > 1$, pour tout $n \geq 1$, nous notons

$$(2.26) \quad a_n := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq T}} p \quad b_n := \prod_{\substack{p|n \\ p > T}} p.$$

Lemme 2.14. *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal, $T > 1$ un réel, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Nous avons, uniformément pour $0 < \sigma \leq \frac{1}{\log T}$*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} g(n) \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \max_{d|n} (|\tau(d, \chi, \vartheta)|^2) \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y, \rho)}},$$

où ρ est défini en (1.9) et $m(y, \rho)$ en (1.10).

Démonstration. Nous ne traitons que l'intégrale sur \mathbb{R}^+ car celle sur \mathbb{R}^- se déduit par symétrie. Notons $S(\vartheta)$ la somme à l'intérieur de l'intégrale. Elle admet un développement en produit eulérien

$$S(\vartheta) = \prod_{p \leq T} \left(1 + g(p) \frac{\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p} \right) \prod_{p > T} \left(1 + g(p) \frac{\max(1, |1 + \chi(p)p^{i\vartheta}|^2)}{p^{1+\sigma}} \right).$$

Le lemme 2.10 nous permet alors de majorer uniformément $S(\vartheta)$ en fonction de ϑ . En prenant $x = e^{1/\sigma}$, ce qui est possible par hypothèse sur σ , nous obtenons l'inégalité suivante, pour $0 \leq \vartheta < 1$

$$S(\vartheta) \ll \left(\frac{1}{\sigma + \vartheta} \right)^{y\kappa(r)} \left(1 + \frac{\vartheta}{\sigma} \right)^{(\rho+2)y},$$

et pour $\vartheta > 1$

$$S(\vartheta) \ll \frac{1}{\sigma^{(\rho+2)y}} \log(2 + \vartheta)^B.$$

Nous découpons l'intégrale au point $\vartheta = 1$. Celle portant sur l'ensemble $\{\vartheta > 1\}$ est convenablement majorée. Pour l'autre intégrale, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(\vartheta) d\vartheta &\ll \int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma + \vartheta} \right)^{\kappa(r)y} \left(1 + \frac{\vartheta}{\sigma} \right)^{(\rho+2)y} d\vartheta \\ &\ll \frac{1}{\sigma^{\kappa(r)y}} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \frac{\vartheta}{\sigma}} \right)^{\kappa(r)y - (\rho+2)y} d\vartheta. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.13, nous avons $\kappa(r) < 3$. Un calcul direct de l'intégrale permet alors d'obtenir le majorant souhaité, en notant que, uniformément pour $\sigma \in]0, 1[$

$$\frac{1}{\sigma^{\kappa(r)y-1}} \log(1/\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{3y-1}}. \quad \square$$

Lemme 2.15. *Soient χ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ soit non principal, A, c des constantes strictement positives et $\eta \in]0, 1[$, $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$ et $T > 1$ un réel. Nous avons, uniformément pour $\sigma > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta) \ll \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{3y}} & \text{si } |\vartheta| \leq 1, \\ \frac{1}{\sigma^{3y}} \log(2 + |\vartheta|)^B & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a_n et b_n sont définis en (2.26) et $\widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta)$ en (2.12).

Démonstration. La seule différence par rapport à la démonstration du lemme 2.14 est l'utilisation du lemme 2.12 pour majorer le produit eulérien. \square

3. Estimation de $C(n, \chi)$ et $D(n, \chi)$

Pour $0 < \sigma \leq 1/10$, nous notons

$$(3.1) \quad \mathcal{L}_1(\sigma) := \exp\left(\sqrt{\log(1/\sigma) \log_2(1/\sigma)}\right).$$

Pour $\sigma > 0$, g une fonction arithmétique et $T > 1$, nous notons

$$\mathfrak{S}_1(\sigma, g, \chi) := \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) C(n, \chi),$$

où $C(n, \chi)$ est défini en (1.18) et a_n et b_n sont définis en (2.26). L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ soit non principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Si $0 < y = y(g)$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, χ, c et η , telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma > 0$*

$$\mathfrak{S}_1(\sigma, g, \chi) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1, m(y, \rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

où $m(y, \rho)$ est défini en (1.10), et où nous avons posé

$$(3.2) \quad \log T := \left(\frac{9yq \log \frac{1}{\sigma}}{c}\right)^{1/\eta}$$

et

$$(3.3) \quad q := \sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}.$$

Nous avons le même résultat en remplaçant $C(n, \chi)$ par $D(n, \chi)$.

3.1. Estimation de $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta)$. Pour $\sigma > 0$, g une fonction arithmétique et $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous notons

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \chi, \vartheta) := \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^2,$$

où $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (1.22) et a_n et b_n sont définis en (2.26) à partir de la valeur de T déterminée en (3.2).

Proposition 3.2. *Soient $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ un couple de deux caractères de Dirichlet non principaux tels que $\chi_1 \overline{\chi_2}$ soit non principal. Soient A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Pour $0 < y = y(g)$, il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, χ, c et η , telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leq \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $|\vartheta| \leq q\sigma$*

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \chi, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leq \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $q\sigma \leq |\vartheta| \leq \frac{q}{\log T}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \chi, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3 |\vartheta|^{m(y, \rho) - 3y}}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leq \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $\frac{q}{\log T} \leq |\vartheta| \leq e^{c(\log T)^\eta}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \chi, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha \log(3 + |\vartheta|)^B$$

et uniformément pour $\sigma > 0$, $k \leq \sqrt{\log 1/\sigma}$ entier et $|\vartheta| \geq e^{c(\log T)^\eta}$

$$\mathfrak{S}^{(k)}(\sigma, g, \chi, \vartheta) \ll \frac{(k+1)^3}{\sigma^{4y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha \log(2 + |\vartheta|)^B,$$

où ρ est défini en (1.9), $\mathcal{L}_1(\sigma)$ est défini en (3.1), et T et q sont définis en (3.2) et (3.3).

Démonstration. Cette démonstration s'appuie sur la méthode différentielle de [1].

Nous commençons par utiliser le lemme 2.3 pour majorer $\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta)$. Le membre de droite du majorant se traite au moyen du lemme 2.14, qui fournit la majoration

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) \max_{d|n} |\tau(d, \chi_1, \vartheta)|^2 \ll \frac{1}{\sigma^{m(y, \rho)}}.$$

Pour traiter le membre de gauche du majorant, nous utilisons dans un premier temps le lemme 2.4, qui nous permet de restreindre la somme aux entiers n pour lesquels le facteur $E(n)$, défini en (2.1) n'est pas trop petit. Pour de tels entiers n , le terme $E(n)^{-4/q}$, où q est défini en (3.3), est uniformément majoré par $\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ pour une constante α bien choisie. Il s'agit donc d'étudier

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma) := \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q},$$

où $M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)$ est défini en (2.9). En dérivant la fonction $L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -(L_{\vartheta, T, q}^{(k)})'(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q} \log b_n \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta)^{1/q} \sum_{\substack{p|n \\ p > T}} \log p \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) \sum_{\substack{(n, p)=1 \\ p > T}} M_{2q}^{(k)}(np, \chi, \vartheta)^{1/q} \frac{g(p) \log p}{p^{1+s}}. \end{aligned}$$

Un calcul explicite de la quantité $\Delta^{(k)}(np, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)$, valable pour tout p premier et $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n, p) = 1$, fournit

$$\begin{aligned} \Delta^{(k)}(np, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2) &= (1 + \chi_1(p) p^{i\vartheta}) \Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2) \\ &\quad + \chi_2(p) \Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - \log p, v_1, v_2). \end{aligned}$$

En prenant le module à la puissance $2q$ de cette égalité, et en utilisant des inégalités classiques, nous obtenons

$$\begin{aligned} &|\Delta^{(k)}(np, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)| \\ &\leq 2|1 + \chi_1(p) p^{i\vartheta}|^{2q} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2q} \\ &\quad + 3|\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - \log p, v_1, v_2)|^{2q} \\ &\quad + (1 + q) 4^q \sum_{j=1}^{q-1} \binom{2q}{2j} |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u, v_1, v_2)|^{2j} \\ &\quad \quad \quad |\Delta^{(k)}(n, \chi, \vartheta, u - \log p, v_1, v_2)|^{2(q-j)}. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R} \times [0, 1]^2$, nous obtenons

$$M_{2q}^{(k)}(np, \chi, \vartheta) \leq \left(2|1 + \chi_1(p) p^{i\vartheta}|^{2q} + 3\right) M_{2q}^{(k)}(n, \chi, \vartheta) + W_q^{(k)}(n, p, \vartheta),$$

où

$$W_q^{(k)}(n, p, \vartheta) := (1+q)4^q \sum_{j=1}^{q-1} \binom{2q}{2j} N_{j,q}^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, \log p),$$

les $N_{j,q}^{(k)}(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta, \log p)$ étant définis en (2.19). Des inégalités de Hölder ainsi que le lemme 2.8 fournissent

$$\begin{aligned} & - (L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s) \\ & \leq \frac{D(s)}{s} L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s) \\ & \quad + \frac{A}{s^{1-1/q}} \left(L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s) \right)^{(q-2)/(q-1)} \left((k+1)^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} \widehat{\tau}_1(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta) \right)^{1/(q-1)} \\ & \quad + B_1 \frac{(k+1)^{1/q} (\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q} e^{-c/q(\log T)^n}} \end{aligned}$$

où

$$D(s) := s \sum_{p>T} \frac{g(p)}{p^{1+s}} (\max(1, |1 + \chi_1(p)p^{i\vartheta}|^2) + O(1/q)) \log p,$$

$\widehat{\tau}_1(n, \boldsymbol{\chi}, \vartheta)$ est défini en (2.12) et A et B_1 sont des constantes absolues.

Si $|\vartheta| \leq q\sigma$, le lemme 2.9 nous permet d'obtenir $D(s) \leq 3y + O(1/q)$ pour tout $s \geq \sigma$. De plus, par le lemme 2.15, nous avons

$$\begin{aligned} - (L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s) & \leq \frac{3y + a_1/q}{s} L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s) + A \frac{(k+1)^{2/(q-1)} \left(L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s) \right)^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1+3y/(q-1)-1/q}} \\ & \quad + B_1 \frac{(\log T)^9}{s^{9y+1-1/q} e^{-c(\log T)^n}}, \end{aligned}$$

où $a_1 > 0$ est une constante absolue.

En posant

$$\varepsilon := B_1 (\log T)^{9y} e^{-(\log T)^n c/q}, \quad \beta := 9y - 1/q,$$

nous obtenons

$$- (L_{\vartheta,T,q}^{(k)})'(s) \leq \phi_1(s, L_{\vartheta,T,q}^{(k)}(s)),$$

avec

$$\phi_1(s, x) := \frac{3y + a_1/q}{s} x + \frac{A(k+1)^{2/(q-1)} x^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+3y/(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma_1 := 3y + \frac{b_1}{q}, \quad X_1(s) := \frac{K_1}{s^{\gamma_1}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta}}$$

où $b_1 > a_1$ est une constante. Remarquons dans ce cas l'inégalité suivante

$$\gamma_1 + 1 \geq 1 - \frac{1}{q} + \frac{3y}{q-1} + \frac{q-2}{q-1} \gamma_1.$$

En supposant les inégalités

$$\begin{aligned}\gamma_1 &> \left(3y + \frac{a_1}{q}\right) + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)}, \\ \beta &> 3y + \frac{a_1}{q} + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)} + 1,\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}-X'_1(s) &= \frac{K_1 \gamma_1}{s^{\gamma_1+1}} + \frac{\epsilon \beta}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{K_1(3y + a_1/q)}{s^{\gamma_1+1}} + \frac{\epsilon(3y + a_1/q)}{s^{\beta+1}} + \frac{A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma_1+1}} \left(1 + \frac{\epsilon s^{\gamma_1}}{K_1 s^\beta}\right) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{K_1(3y + a_1/q)}{s^{\gamma_1+1}} + \frac{\epsilon(3y + a_1/q)}{s^{\beta+1}} \\ &\quad + \frac{A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma_1+1}} \left(1 + \frac{\epsilon s^{\gamma_1}}{K_1 s^\beta}\right)^{(q-2)/(q-1)} + \frac{\epsilon}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \phi_1(s, X_1(s)).\end{aligned}$$

Remarque 3.3. Les hypothèses sur γ_1 et β sont vérifiées dès que nous choisissons K de l'ordre de $(k+1)^2(qC_2)^q$ pour une constante C_2 assez grande.

Comme tout ceci n'est valable que pour $s \leq \frac{1}{\log T}$, nous notons $s_0 = \frac{1}{\log T}$. Remarquons dans ce cas que

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(s) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \tau_3(n)^2 \ll \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y}}.$$

Ainsi,

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(s_0) \leq X_1(s_0)$$

en choisissant $K = (k+1)^2(qC_2)^q(\log T)^{18y}$. Le lemme 70.2 de [2] permet alors de montrer l'inégalité suivante

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(s) \leq \frac{(k+1)^2(qC_2)^q(\log T)^{18y}}{s^{3y+a_1/q}} + \frac{B_1(\log T)^{9y}}{e^{(\log T)^{nc/q}} s^{9y-1/q}}$$

dès que $\sigma \leq s \leq s_0$. Les choix de T (3.2) et de q (3.3) impliquent alors

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Le cas $q\sigma \leq |\vartheta| \leq \frac{q}{\log T}$ est le plus délicat, puisque le majorant de $D(s)$ fourni par le lemme 2.9 change en fonction de la position de s par rapport à $\frac{|\vartheta|}{q}$.

Pour $\frac{|\vartheta|}{q} \leq s \leq \frac{1}{\log T}$, nous avons toujours $D(s) \leq 3y + a_1/q$, la suite de la démonstration est inchangée, et nous permet d'avoir

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}\left(\frac{|\vartheta|}{q}\right) \ll \frac{(k+1)^2}{|\vartheta|^{3y}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$$

car $|\vartheta| \geq \sigma$ et \mathcal{L}_1 est décroissante. Par ailleurs, le facteur q^{3y} peut être absorbé par le terme $\mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ quitte à augmenter α .

Pour $s \leq \frac{|\vartheta|}{q}$, nous avons cette fois $D(s) \leq (\rho+2)y + a_1/q$. Nous modifions donc γ_1 et K_1 par rapport à précédemment, nous choisissons

$$\gamma_1 := m(y, \rho) + b_1/q,$$

de manière à vérifier

$$\gamma_1 + 1 \geq 1 - \frac{1}{q} + \frac{3y}{q-1} + \frac{q-2}{q-1} \gamma_1$$

et

$$\gamma_1 > (\rho+2)y + a_1/q + A(k+1)^{2/(q-1)} K_1^{-1/(q-1)}.$$

Par ailleurs, pour assurer l'inégalité

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}\left(\frac{|\vartheta|}{q}\right) \leq X_1\left(\frac{|\vartheta|}{q}\right),$$

nous choisissons

$$K_1 := (k+1)^2 |\vartheta|^{m(y, \rho) - 3y} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Nous obtenons ainsi

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2 |\vartheta|^{m(y, \rho) - 3y}}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Si $\frac{q}{\log T} \leq |\vartheta| \leq e^{c(\log T)^\eta}$, nous avons systématiquement $D(s) \leq (\rho+2)y + a_1/q$ et le lemme 2.15 fournit cette fois la majoration

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_1(n, \chi, \vartheta) \ll \frac{1}{s^{3y}} \log(3 + |\vartheta|)^B.$$

Nous choisissons ainsi

$$\gamma_1 := m(y, \rho) + \frac{b_1}{q}$$

et

$$K_1 := (k+1)^2 (qC_2)^q \log(3 + |\vartheta|)^B$$

pour obtenir

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Enfin, si $|\vartheta| \geq e^{c(\log T)^n}$, nous avons $D_1(s) \leq 4y + \frac{a_1}{q}$. Nous choisissons ainsi

$$\gamma_1 := 4y + \frac{b_1}{q} \quad \text{et} \quad K_1 := (k+1)^2 (qC_2)^q \log(2 + |\vartheta|)^B$$

pour obtenir

$$L_{\vartheta, T, q}^{(k)}(\sigma) \ll \frac{(k+1)^2}{\sigma^{4y}} \log(2 + |\vartheta|)^B \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha. \quad \square$$

3.2. Démonstration du théorème 3.1. La proposition 3.2 nous permet de déterminer la majoration du théorème 3.1 pour $C(n, \chi)$, défini en (1.18). En effet, d'après le théorème de Parseval, pour tout $(u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, nous avons

$$C(n, \chi, u_2, v_1, v_2) \ll \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(0)}(n, \chi_2, \chi_1, \vartheta, u_2, v_2, v_1)|^2 \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2},$$

où $\Delta^{(0)}(n, \chi_2, \chi_1, \vartheta, u_2, v_2, v_1)$ est défini en (1.22). Ainsi,

$$C(n, \chi) \ll \int_{\mathbb{R}} |\Delta^{(0)}(n, \chi_2, \chi_1, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2}.$$

Elle nous permet également de déterminer la majoration du théorème 3.1 pour $D(n, \chi)$, défini en (1.19). Cependant, les calculs sont plus complexes. Nous commençons par calculer, pour tout v_1, v_2 la transformée de Fourier de la fonction

$$(u_1, u_2) \mapsto \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2, v_1, v_2)$$

que nous noterons

$$\widehat{\Delta}(n, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2, v_1, v_2).$$

Nous notons également pour la suite, pour $(v_1, v_2, \vartheta) \in \mathbb{R}^3$,

$$(3.4) \quad k(v_1, v_2, \vartheta) := \frac{e^{i(v_1+v_2)\vartheta} - e^{iv_1\vartheta}}{i\vartheta}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \widehat{\Delta}(n, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2, v_1, v_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2, v_1, v_2) e^{-i\vartheta_1 u_1} e^{-i\vartheta_2 u_2} du_1 du_2 \\ &= \sum_{d_1 d_2 | n} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) \int_{\log d_1 - v_1}^{\log d_1} \int_{\log d_2 - v_2}^{\log d_2} e^{-i\vartheta_1 u_1} e^{-i\vartheta_2 u_2} du_1 du_2 \\ &= \tau(n, \chi, -\vartheta_1, -\vartheta_2) k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_2), \end{aligned}$$

où $\tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2)$ est défini en (2.11). Ainsi, pour tout (u_1, u_2) sauf un nombre fini, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u_1, u_2, v_1, v_2) \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2) k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u_1} e^{i\vartheta_2 u_2} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \end{aligned}$$

En remplaçant u_1 par $u - u_2$, puis en effectuant le changement de variable $\vartheta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \Delta_3(n, \boldsymbol{\chi}, u - u_2, u_2, v_1, v_2) \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2) k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_2) e^{i\vartheta_1(u-u_2)} e^{i\vartheta_2 u_2} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2) k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u} e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)u_2} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u} e^{i\vartheta_2 u_2} d\vartheta_1 d\vartheta_2. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} (3.6) \quad F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) \\ := \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1) k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1. \end{aligned}$$

Le théorème de Parseval nous permet de relier la valeur de $D(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2)$ au moment L^2 de $F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)$. Nous transformons l'expression de F afin de relier cette fonction à des fonctions Δ de type (1.22) et pouvoir utiliser la proposition 3.2 pour estimer $D(n, \boldsymbol{\chi})$. Pour cela, nous linéarisons en ϑ_1 la quantité $k(0, v_1, \vartheta_1) k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)$. Nous commençons par utiliser la décomposition en éléments simples,

$$(3.7) \quad \frac{1}{\vartheta_1(\vartheta_2 + \vartheta_1)} = \frac{1}{\vartheta_1 \vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_2(\vartheta_2 + \vartheta_1)}.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} (3.8) \quad (e^{iv_1 \vartheta_1} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} - 1) \\ = (e^{iv_1 \vartheta_1} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} - e^{iv_2 \vartheta_1} + e^{iv_2 \vartheta_1} - 1) \\ = (e^{iv_2 \vartheta_2} - 1)(e^{i(v_1 + v_2)\vartheta_1} - e^{iv_2 \vartheta_1}) + (e^{iv_2 \vartheta_1} - 1)(e^{iv_1 \vartheta_1} - 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad & (e^{iv_1\vartheta_1} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1) \\
 &= (e^{iv_1((\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta_2)} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1) \\
 &= (e^{iv_1((\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta_2)} - e^{-iv_1\vartheta_2} + e^{-iv_1\vartheta_2} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1) \\
 &= e^{-iv_1\vartheta_2}(e^{iv_1(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1) + (e^{-iv_1\vartheta_2} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (3.7), (3.8) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & k(0, v_1, \vartheta_1)k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) \\
 &= \frac{1}{i\vartheta_2} \frac{(e^{iv_1\vartheta_1} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)}{i\vartheta_1} \\
 &\quad - \frac{1}{i\vartheta_2} \frac{(e^{iv_1\vartheta_1} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)}{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\
 &= \frac{e^{iv_2\vartheta_2} - 1}{i\vartheta_2} \frac{(e^{i(v_1+v_2)\vartheta_1} - e^{iv_2\vartheta_1})}{i\vartheta_1} + \frac{1}{i\vartheta_2} \frac{(e^{iv_1\vartheta_1} - 1)(e^{iv_2\vartheta_1} - 1)}{i\vartheta_1} \\
 &\quad - \frac{e^{-iv_1\vartheta_2}}{i\vartheta_2} \frac{(e^{iv_1(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)(e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1)}{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} - \frac{e^{-iv_1\vartheta_2} - 1}{i\vartheta_2} \frac{e^{iv_2(\vartheta_1+\vartheta_2)} - 1}{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\
 &= k(0, v_2, \vartheta_2)k(v_2, v_1, \vartheta_1) + \frac{1}{i\vartheta_2} (k(v_1, v_2, \vartheta_1) - k(0, v_2, \vartheta_1)) \\
 &\quad + k(-v_1, v_1, \vartheta_2)k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) \\
 &\quad - \frac{e^{-iv_1\vartheta_2}}{i\vartheta_2} (k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) - k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)) \\
 &= k(0, v_2, \vartheta_2)k(v_2, v_1, \vartheta_1) + k(-v_1, v_1, \vartheta_2)k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) \\
 &\quad + \frac{1}{i\vartheta_2} (k(v_1, v_2, \vartheta_1) - k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{-iv_1\vartheta_2}) \\
 &\quad + \frac{1}{i\vartheta_2} (k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{-iv_1\vartheta_2} - k(0, v_2, \vartheta_1)).
 \end{aligned}$$

Pour $(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \in [0, 1]^2 \times \mathbb{R}^2$, nous définissons

$$(3.11) \quad k_1(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_2, v_1, \vartheta_1)$$

$$(3.12) \quad k_2(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$(3.13) \quad k_3(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(v_1, v_2, \vartheta_1) - k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{-iv_1\vartheta_2}$$

$$(3.14) \quad k_4(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) := k(0, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{-iv_1\vartheta_2} - k(0, v_2, \vartheta_1),$$

et pour $j = 1, \dots, 4$, nous posons

$$(3.15) \quad F_j(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) \\ := \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \boldsymbol{\chi}, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1) k_j(v_1, v_2, \vartheta_1, \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1.$$

En injectant les équations (3.10) à (3.15) dans (3.6), nous obtenons

$$F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) \\ = k(0, v_2, \vartheta_2) F_1(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) + k(-v_1, v_1, \vartheta_2) F_2(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) \\ + \frac{1}{i\vartheta_2} F_3(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2) + \frac{1}{i\vartheta_2} F_4(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2).$$

D'après le théorème de Parseval et l'égalité (3.5), nous avons

$$D(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2) \ll \int_{\mathbb{R}} |F(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2,$$

où $D(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2)$ est défini en (1.21). En injectant (3.15) dans cette inégalité, nous obtenons

$$(3.16) \quad D(n, \boldsymbol{\chi}) \ll \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_1(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\ + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_2(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\ + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_3(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\ + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_4(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2.$$

Nous voyons ainsi que l'estimation de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} D(n, \boldsymbol{\chi})$$

se déduit de celle de

$$(3.17) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_j(n, \boldsymbol{\chi}, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2$$

pour $j = 1, \dots, 4$. Il nous faut maintenant relier les fonctions F_j aux fonctions Δ de type (1.22). Pour cela, nous constatons que nous avons, pour

$(v_1, v_2, \vartheta_2) \in [0, 1]^2 \times \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \chi, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1) k(v_1, v_2, \vartheta_1) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{d_1 d_2 | n} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} (d_1 d_2)^{-i\vartheta_1} k(v_1, v_2, \vartheta_1) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1 \\
 &= \sum_{d_1 d_2 | n} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} \int_{\mathbb{R}} (d_1 d_2)^{-i\vartheta_1} k(v_1, v_2, \vartheta_1) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1 \\
 &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2},
 \end{aligned}$$

où $\tau(n, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)$ est défini en (2.11) et $k(v_1, v_2, \vartheta_1)$ en (3.4). De même, en effectuant le changement de variable $\vartheta_1 = \vartheta'_1 + \vartheta_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \chi, -\vartheta_1, -\vartheta_2 - \vartheta_1) k(v_1, v_2, \vartheta_1 + \vartheta_2) e^{i\vartheta_1 u} d\vartheta_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \tau(n, \chi, \vartheta_2 - \vartheta_1, -\vartheta_1) k(v_1, v_2, \vartheta_1) e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)u} d\vartheta_1 \\
 &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_1^{i\vartheta_2} e^{-iu\vartheta_2}.
 \end{aligned}$$

En injectant les deux dernières égalités, ainsi que la formule (3.10) dans (3.15), nous obtenons

$$(3.18) \quad F_1(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_2} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2}$$

$$(3.19) \quad F_2(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_1^{i\vartheta_2} e^{-iu\vartheta_2}$$

$$(3.20) \quad F_3(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} (1 - (d_1 d_2)^{i\vartheta_2} e^{-i(u+v_1)\vartheta_2})$$

$$(3.21) \quad F_4(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^u \leq d_1 d_2 < e^{u+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} ((d_1 d_2)^{i\vartheta_2} e^{-i(u+v_1)\vartheta_2} - 1).$$

Dans le cas où u est tel que l'une des égalités ci-dessus n'est pas vérifiée, nous pouvons approcher $D(n, \chi, u, v_1, v_2)$ par $D(n, \chi, u + \varepsilon, v_1, v_2)$ où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et tel que les égalités (3.18) à (3.21) soient vérifiées pour $u + \varepsilon$. L'erreur que l'on commet est alors dominée par $\log(n)(\Delta^*(n, \chi_1)^2 + \Delta^*(n, \chi_2)^2)$ d'après (1.21), la quantité $\Delta^*(n, \chi)$ étant définie en (2.3). La majoration (3.16) se réécrit donc

$$\begin{aligned}
(3.22) \quad D(n, \chi) &\ll \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_1(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_2(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_3(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta_2^2} \sup_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) \in [0, 1]^2}} |F_4(n, \chi, u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 d\vartheta_2 \\
&+ \log n (\Delta^*(n, \chi_1)^2 + \Delta^*(n, \chi_2)^2),
\end{aligned}$$

où les fonctions F_j sont désormais définies par les équations (3.18) à (3.21).

L'estimation de la somme (3.17) pour $j = 1, 2$ se déduit alors de la proposition 3.2. Nous ne traitons ici que le cas $j = 1$, le cas $j = 2$ étant identique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la remarque 1.3 afin de ne considérer que les entiers n qui sont premiers avec $q_1 q_2$, où q_i désigne le conducteur de χ_i pour $i = 1, 2$. Nous pouvons donc poser $d_3 = n / (d_1 d_2)$ dans la somme (3.18) afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_2} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} \\
&= \sum_{\substack{d_2 d_3 | n \\ n e^{-u-v_1-v_2} < d_3 \leq n e^{-u-v_2}}} \chi_1\left(\frac{n}{d_2 d_3}\right) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} \\
&= \chi_1(n) \sum_{\substack{d_2 d_3 | n \\ n e^{-u-v_1-v_2} < d_3 \leq n e^{-u-v_2}}} \overline{\chi_1}(d_3) \overline{\chi_1} \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc, uniformément pour $u, \vartheta_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \times [0, 1]^2$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_1(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \\ \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} |\Delta_1^{(0)}(n, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_1 \chi_2, -\vartheta_2)|^2. \end{aligned}$$

La proposition 3.2, appliquée à $k = 0$, fournit alors

$$(3.23) \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_1(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

où $m(y, \rho)$ est défini en (1.10) et $\mathcal{L}_1(\sigma)$ en (3.1).

Pour $j = 3, 4$, une difficulté apparaît, du fait que l'intégrale de $\frac{1}{\vartheta_2^2}$ est divergente en 0. Nous ne détaillons que le cas $j = 3$, le cas $j = 4$ étant analogue. Nous posons alors $\vartheta_0 := \mathcal{L}_1(\sigma)^{-1}$. Pour $|\vartheta_2| \geq \vartheta_0$ et $j = 3$, nous écrivons

$$\begin{aligned} |F_3(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \ll \frac{1}{|\vartheta_2|^2} \left| \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} \right|^2 \\ + \frac{1}{|\vartheta_2|^2} \left| \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_1^{i\vartheta_2} \right|^2. \end{aligned}$$

La proposition 3.2, appliquée à $k = 0$, fournit alors

$$(3.24) \quad \int_{|\vartheta| > \vartheta_0} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_1(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \frac{d\vartheta_2}{\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^{m(y, \rho)}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}.$$

Il nous reste à traiter le cas $|\vartheta_2| \leq \vartheta_0$. Pour cela, nous effectuons alors un développement limité de

$$1 - e^{-i(u+v_1)\vartheta_2} (d_1 d_2)^{i\vartheta_2}$$

par rapport à ϑ_2 . Nous obtenons

$$1 - e^{-i(u+v_1)\vartheta_2} (d_1 d_2)^{i\vartheta_2} = - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\vartheta_2^k}{k!} \left(\log(d_1 d_2) - u - v_1 \right)^k + O\left(\frac{|\vartheta_2|^{k_0+1}}{(k_0 + 1)!} \right).$$

Ce qui implique, d'après (3.20),

$$\begin{aligned}
(3.25) \quad & \frac{1}{\vartheta_2^2} |F_3(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \\
& \leq \frac{1}{\vartheta_2^2} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k!} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\vartheta_2^{2k}}{k!} \left| \sum_{\substack{d_1 d_2 | n \\ e^{u+v_1} \leq d_1 d_2 \\ < e^{u+v_1+v_2}}} \chi_1(d_1) \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} (\log(d_1 d_2) - u - v_1)^k \right|^2 \\
& \quad + O\left(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2} \tau_3(n)^2\right) \\
& \leq e \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!} \left| \sum_{\substack{d_2 d_3 | n \\ n e^{-u-v_1-v_2} \\ < d_3 \leq n e^{-u-v_1}}} \bar{\chi}_1(d_3) \bar{\chi}_1 \chi_2(d_2) d_2^{-i\vartheta_2} (\log n - u - v_1 - \log d_3)^k \right|^2 \\
& \quad + O\left(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2} \tau_3(n)^2\right) \\
& \leq e \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!} \left| \Delta^{(k)}(n, \bar{\chi}_1, \chi_2 \bar{\chi}_1, -\vartheta_2) \right|^2 + O\left(\frac{\vartheta_2^{2(k_0-1)}}{(k_0+1)!^2} \tau_3(n)^2\right).
\end{aligned}$$

La proposition 3.2 fournit alors, pour tout $1 \leq k \leq k_0$,

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad & \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} \left| \Delta^{(k)}(n, \bar{\chi}_1, \chi_2 \bar{\chi}_1, -\vartheta_2) \right|^2 \frac{\vartheta_2^{2(k-1)}}{k!} d\vartheta \\
& \ll \frac{(k+1)^3}{k! \sigma^m(y, \rho)} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.
\end{aligned}$$

Nous choisissons ensuite $k_0 := \lceil 5y \sqrt{\frac{\log 1/\sigma}{\log_2 1/\sigma}} \rceil + 2$, de sorte que

$$(3.27) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} \tau_3(n)^2 \frac{1}{(k_0+1)!^2} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \vartheta^{2(k_0-1)} d\vartheta \ll 1.$$

En combinant les majorations (3.26) et (3.27) dans l'inégalité (3.25), nous obtenons

$$(3.28) \quad \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_3(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \frac{d\vartheta_2}{\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^m(y, \rho)} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}.$$

Les équations (3.24) et (3.28) fournissent alors

$$(3.29) \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n) g(n)}{n^{1+\sigma}} \sup_{u, v_1, v_2} |F_3(u, v_1, v_2, \vartheta_2)|^2 \frac{d\vartheta_2}{\vartheta_2^2} \ll \frac{1}{\sigma^m(y, \rho)} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha+1}.$$

Enfin, le théorème 4.1, qui sera énoncé et démontré dans la section suivante, fournit la majoration

$$(3.30) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \log n \Delta^*(n, \chi)^2 \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1, m(y, \rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

valable lorsque χ est un caractère de Dirichlet non principal.

En combinant les équations (3.23), (3.29) et (3.30) à l'inégalité (3.22), nous obtenons

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) D(n, \chi) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y+1, m(y, \rho)\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

ce qui correspond à l'énoncé du théorème 3.1 pour $D(n, \chi)$.

4. Démonstration du théorème 1.1

4.1. Majoration de $\Delta^*(n, \chi)$. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soient χ un caractère de Dirichlet non principal, A, c des constantes strictement positives, $\eta \in]0, 1[$ et $g \in \mathcal{M}_A(\chi, c, \eta)$. Il existe une constante $\alpha > 0$, dépendant au plus de g, χ, c et η , telle que nous ayons, uniformément pour $\sigma \in]0, \frac{1}{10}[$*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \Delta^*(n, \chi)^2 \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y, m(y, \rho)\}-1}} \mathcal{L}_1(\sigma)$$

où $y = y(g)$, ρ est défini en (1.9), $\mathcal{L}_1(\sigma)$ en (3.1) et $m(y, \rho)$ en (1.10).

Démonstration. Nous commençons par utiliser la majoration (2.7) du lemme 2.2. Le membre de droite du majorant ne pose aucune difficulté, puisque nous avons

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \tau(n)^{1/q} \ll \frac{1}{\sigma^{y2^{1/q}}} = \frac{1}{\sigma^{y+O(1/q)}}.$$

En effet, la fonction à l'intérieur de la somme étant multiplicative, nous pouvons l'écrire sous forme d'un produit eulérien. La relation (1.13) et une intégration par partie permettent d'obtenir la majoration ci-dessus.

Le terme q sera de l'ordre de $\sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}$, donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \tau(n)^{1/q} \ll \frac{\mathcal{L}_1(\sigma)}{\sigma^y}.$$

Nous nous intéressons donc au membre de gauche du majorant de (2.7). Le lemme 2.4, nous permet de considérer uniquement les entiers n pour

lesquels le facteur $E(n)$ n'est pas trop petit, ce qui nous amène à étudier la somme

$$L_q^\dagger(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{1/q}$$

où $M_{2q}^\dagger(n, \chi)$ est défini en (2.5). Plus précisément nous étudions

$$L_{T,q}^\dagger(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{1/q}$$

où a_n et b_n sont définis en (2.26) et T un paramètre que nous fixerons par la suite.

Nous employons alors la méthode différentielle de [1] pour majorer cette somme.

Pour cela, nous utilisons l'égalité

$$\Delta(np, \chi, u, v) = \Delta(n, \chi, u, v) + \chi(p) \Delta(n, \chi, u - \log p, v)$$

valable pour tout $(n, p) = 1$ si p est premier. Ainsi,

$$M_{2q}^\dagger(np, \chi) \leq 6M_{2q}^\dagger(n, \chi) + W_q^\dagger(n, p)$$

où

$$W_q^\dagger(n, p) := (1+q) \sum_{j=1}^{q-1} \binom{2q}{2j} N_{j,q}^\dagger(n, \chi, \log p).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} L_{T,q}^\dagger(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) M_{2q}^\dagger(n, \chi)^{1/q} \log b_n \\ &\leq \sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p^{1+s}} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) M_{2q}^\dagger(np, \chi)^{1/q} \\ &\leq \sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p^{1+s}} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) (6M_{2q}^\dagger(n, \chi) + W_q^\dagger(n, p))^{1/q} \\ &\leq \sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p^{1+s}} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) \left((6M_{2q}^\dagger(n, \chi))^{1/q} + W_q^\dagger(n, p)^{1/q} \right) \\ &\leq \frac{6^{1/q}(y+as)}{s} L_{T,q}^\dagger(s) + \sum_{n \geq 1} g(n) \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p^{1+s}} W_q^\dagger(n, p)^{1/q}. \end{aligned}$$

où a est une constante absolue. Une inégalité de Hölder fournit

$$-\frac{d}{ds}L_{T,q}^\dagger(s) \leq \frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}^\dagger(s) + \sum_{n \geq 1} g(n) \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \left(\sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p} W_q^\dagger(n,p) \right)^{1/q} \left(\sum_{p>T} g(p) \frac{\log p}{p^{1+sq/(q-1)}} \right)^{(q-1)/q}.$$

L'application du lemme 2.7 et une inégalité de Hölder permet ainsi d'avoir

$$-\frac{d}{ds}L_{T,q}^\dagger(s) \leq \frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}(s) + \frac{A}{s^{1-1/q}} \left(L_{T,q}^\dagger(s) \right)^{(q-2)/(q-1)} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) \widehat{\tau}_0(n, \chi) \right)^{1/(q-1)} + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q} e^{-c/q(\log T)^\eta}},$$

où A et B_1 sont des constantes absolues. Le lemme 2.14 fournit une majoration du terme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} g(n) \widehat{\tau}_0(n, \chi).$$

En effet

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_0(n, \chi) &= \left(\sum_{d|n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau(d, \chi, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta}{1+\vartheta^2} \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \tau(n)^{1/q} \max_{d|n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau(d, \chi, \vartheta)|^2 \frac{d\vartheta}{1+\vartheta^2} \right) \\ &\leq \tau(n)^{1/q} \int_{\mathbb{R}} \max_{d|n} (|\tau(d, \chi, \vartheta)|^2) \frac{d\vartheta}{1+\vartheta^2}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'utiliser ce lemme. Nous obtenons donc

$$-\frac{d}{ds}L_{T,q}^\dagger(s) \leq \frac{6^{1/q}(y+as)}{s}L_{T,q}(s) + A \left(L_{T,q}(s) \right)^{(q-2)/(q-1)} \frac{1}{s^{1+m(y,\rho)/(q-1)-1/q+O(1/q^2)}} + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q} e^{-c/q(\log T)^\eta}},$$

où $m(y, \rho)$ est défini en (1.10).

En posant

$$\varepsilon := B_1 (\log T)^{9y} e^{-(\log T)^{n c/q}}, \quad \beta := 9y - 1/q,$$

nous obtenons

$$-L'_{T,q}(s) \leq \phi(s, L_{T,q}^\dagger(s)),$$

avec

$$\phi(s, x) := 6^{1/q} \frac{y + as}{s} x + \frac{Ax^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+m(y,\rho)/(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma := \max\left(m(y, \rho) - \frac{q-1}{q} + O\left(\frac{q-1}{q^2}\right), y + \frac{b}{q}\right), \quad X(s) := \frac{K}{s^\gamma} + \frac{\varepsilon}{s^\beta}$$

pour une certaine constante b , de sorte que

$$\gamma + 1 \geq 1 - \frac{1}{q} + \frac{m(y, \rho)}{q-1} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) + \frac{q-2}{q-1}\gamma,$$

et

$$\gamma > 6^{1/q}(y + as_0),$$

où s_0 est petit devant $\frac{1}{q}$.

Pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$, en supposant les inégalités

$$\begin{aligned} \gamma &> 6^{1/q}(y + as_0) + AK^{-1/(q-1)}, \\ \beta &> 6^{1/q}(y + as_0) + AK^{-1/(q-1)} + 1, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} -X'(s) &= \frac{K\gamma}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon\beta}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{6^{1/q}K(y + as)}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon 6^{1/q}(y + as)}{s^{\beta+1}} + \frac{AK^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma+1}} \left(1 + \frac{\varepsilon s^\gamma}{K s^\beta}\right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{6^{1/q}K(y + as)}{s^{\gamma+1}} + \frac{\varepsilon 6^{1/q}(y + as)}{s^{\beta+1}} \\ &\quad + \frac{AK^{(q-2)/(q-1)}}{s^{\gamma+1}} \left(1 + \frac{\varepsilon s^\gamma}{K s^\beta}\right)^{(q-2)/(q-1)} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}} \\ &\geq \phi(s, X(s)). \end{aligned}$$

Remarque 4.2. Les hypothèses sur γ et β sont vérifiées pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$ dès que nous choisissons K de l'ordre de $(qC_2)^q$ pour une constante C_2 assez grande.

Comme tout ceci n'est valable que pour $s \leq \frac{1}{\log T}$, nous notons $s_0 = \frac{1}{\log T}$. le réel T sera choisi de telle sorte que $\frac{1}{\log T}$ soit petit devant $\frac{1}{q}$. Remarquons dans ce cas que

$$L_{T,q}^\dagger(s) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+s}} \tau_3(n)^2 \ll \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y}}.$$

Ainsi

$$L_{T,q}^\dagger(s_0) \leq X(s_0)$$

en choisissant $K = (qC_2)^q(\log T)^{18}$. Le lemme 70.2 de [2] permet alors de montrer l'inégalité suivante

$$L_{T,q}^\dagger(s) \leq \frac{(qC_2)^q(\log T)^{18}}{s^{m(y,\rho)-1+1/q}} + \frac{B(\log T)^{9y}}{e^{(\log T)^{nc/q}} s^{9y-1/q}}.$$

Nous choisissons T de sorte que

$$e^{(\log T)^{nc/q}} = \sigma^{-9y}$$

ce qui implique

$$\left(\frac{9yq \log \frac{1}{\sigma}}{c}\right)^{1/\eta} = \log T.$$

Dans le cas où q est de l'ordre de $\sqrt{\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}}$, nous avons bien $\sigma \leq \frac{1}{\log T}$. De plus, le terme dominant est celui de gauche, ainsi

$$L_{T,q}^\dagger(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y,m(y,\rho)-1\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha,$$

où α est une constante strictement positive. □

4.2. Fin de la démonstration. Dans cette partie, nous utilisons les différents théorèmes et lemmes vus précédemment afin de démontrer le théorème 1.1. Pour commencer nous appliquons la méthode de Rankin, ainsi que la formule (25) de [6] pour obtenir la majoration

$$\mathfrak{S}(x, g, \chi) \ll \frac{x^{1+\sigma}}{\log x} \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) \Delta_3(n, \chi)^2 := \mathfrak{S}_0(\sigma, g, \chi).$$

Le lemme 2.1 permet de majorer $\Delta_3(n, \chi)^2$. La contribution des deuxième et troisième termes du majorant est, selon le théorème 4.1

$$\ll \frac{1}{\sigma^{\max\{y,m(y,\rho)-1\}}} \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha.$$

Pour traiter le premier terme du majorant, nous utilisons le lemme 2.4 pour ne travailler que sur la somme suivante

$$L_q(\sigma) := \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n, \chi)^{1/q},$$

où $M_q(n, \chi)$ est défini en (2.2). Plus précisément, nous étudions

$$L_{T,q}(\sigma) := \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} M_{2q}(n, \chi)^{1/q},$$

où a_n et b_n sont définis en (2.26). En dérivant par rapport à σ la fonction précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} -L'_{T,q}(\sigma) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n, \chi)^{1/q} \log b_n \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) M_{2q}(n, \chi)^{1/q} \sum_{\substack{p|n \\ p > T}} \log p \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)}{a_n b_n^{1+\sigma}} g(n) \sum_{p > T} \frac{g(p)}{p^{1+\sigma}} \log p M_{2q}(np, \chi)^{1/q}. \end{aligned}$$

Pour majorer $M_{2q}(np, \chi)$, il nous faut dans un premier temps calculer $\Delta_3(np, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Nous avons

$$(4.1) \quad \Delta_3(np, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \chi_1(p) \Delta_3(n, \chi, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v}) \\ + \chi_2(p) \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2, \mathbf{v}).$$

En prenant le module à la puissance $2q$, nous obtenons

$$(4.2) \quad \left| \Delta_3(np, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2q} \\ \leq \sum_{i+j+k=2q} \binom{2q}{i, j, k} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^i \left| \Delta_3(n, \chi, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v}) \right|^j \\ \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^k$$

Si les trois exposants i, j, k sont non nuls, nous considérons le plus grand de ces trois exposants. Nous pouvons supposer sans perdre de généralité qu'il s'agit de k . Nous décomposons alors k de la manière suivante

$$k = k_1 + k_2,$$

où k_1 et k_2 vérifient

$$\begin{aligned} i + k_1 &= q \\ j + k_2 &= q. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

à

$$a = \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^i \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{k_1}$$

et

$$b = \left| \Delta_3(n, \chi, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v}) \right|^j \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{k_2}$$

afin d'obtenir

$$(4.3) \quad \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^i \left| \Delta_3(n, \chi, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v}) \right|^j \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^k \\ \leq \frac{1}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2i} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2(q-i)} \\ + \frac{1}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1 - \log p, u_2, \mathbf{v}) \right|^{2j} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2(q-j)}.$$

Si l'un des trois exposants est nul, disons k , nous utilisons les majorations suivantes.

$$\left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2h+1} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q-2h-1} \\ \leq \frac{1}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2h} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q-2h} \\ + \frac{1}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2h+2} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q-2h-2} \quad (1 \leq h \leq q-2), \\ \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q-1} \\ \leq \frac{1}{2q} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q} \\ + \frac{q}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^2 \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^{2q-2}, \\ \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2q-1} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right| \\ \leq \frac{q}{2} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2(q-1)} \left| \Delta_3(n, \chi, u_1, u_2 - \log p, \mathbf{v}) \right|^2 + \frac{1}{2q} \left| \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|^{2q}.$$

La majoration de $M_{2q}(np, \chi)$ fait donc intervenir les quantités $N_{1,j,q}(n, \chi, \log p)$ et $N_{2,j,q}(n, \chi, \log p)$ définies respectivement en (2.13) et (2.14). Pour la suite, nous définissons

$$(4.4) \quad n(y, \rho) := \max\{y + 1, (\rho + 2)y, 3y - 1\} = \max\{y + 1, m(y, \rho)\}.$$

Le lemme 2.8 fournit alors

$$-L'_{T,q}(s) \leq \frac{9^{1/q}(y + as)}{s} L_{T,q}(s) \\ + \frac{A}{s^{1-1/q}} (L_{T,q}(s))^{(q-2)/(q-1)} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} C(n, \chi) \right)^{1/q} \\ \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{\tau}_2(n, \chi) \right)^{1/q(q-1)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A}{s^{1-1/q}} (L_{T,q}(s))^{(q-2)/(q-1)} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} C(n, {}^t \chi) \right)^{1/q} \\
& \quad \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{r}_2(n, \chi) \right)^{1/q(q-1)} \\
& + \frac{A}{s^{1-1/q}} (L_{T,q}(s))^{(q-2)/(q-1)} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} D(n, \chi) \right)^{1/q} \\
& \quad \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu^2(n)g(n)}{a_n b_n^{1+s}} \widehat{r}_2(n, \chi) \right)^{1/q(q-1)} \\
& + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q} e^{-c/q(\log T)^n}}
\end{aligned}$$

où ${}^t \chi = (\chi_2, \chi_1)$.

D'après le théorème 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
-L'_{T,q}(s) & \leq \frac{9^{1/q}(y+as)}{s} L_{T,q}(s) \\
& \quad + A(L_{T,q}(s))^{(q-2)/(q-1)} \frac{\mathcal{L}_1(s)^{\alpha/(q-1)}}{s^{1+(n(y,\rho)/q-1/q+9y/q(q-1))}} \\
& \quad + B_1 \frac{(\log T)^{9y}}{s^{9y+1-1/q} e^{-c/q(\log T)^n}}.
\end{aligned}$$

En posant

$$\varepsilon := B_1 (\log T)^{9y} e^{-(\log T)^{nc/q}}, \quad \beta := 9y - 1/q,$$

nous obtenons

$$-L'_{T,q}(s) \leq \phi_2(s, L_{T,q}(s)),$$

avec

$$\phi_2(s, x) := 9^{1/q} \frac{y+as}{s} x + \frac{A \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha/(q-1)} x^{(q-2)/(q-1)}}{s^{1-1/q+n(y,\rho)/(q-1)+9y/q(q-1)}} + \frac{\varepsilon}{s^{\beta+1}}.$$

Posons

$$\gamma_2 := \max\left(y + \frac{b}{q}, n(y, \rho) - 1 + \frac{9y}{q}\right), \quad X_2(s) := \frac{K_2}{s^{\gamma_2}} + \frac{\varepsilon}{s^\beta},$$

de sorte que nous avons les inégalités suivantes,

$$\gamma_2 + 1 \geq 1 - \frac{1}{q} + \frac{n(y, \rho)}{q-1} + \frac{9y}{q(q-1)} + \frac{q-2}{q-1} \gamma_2,$$

et

$$\gamma_2 > 9^{1/q}(y+as_0)$$

pour s_0 suffisamment petit devant $\frac{1}{q}$. Pour que X_2 vérifie

$$-X'_2(s) \geq \phi_2(s, X_2(s)),$$

il faut choisir K_2 de l'ordre de $(qC_3)^q \mathcal{L}_1(\sigma)^\alpha$ où C_3 est une constante suffisamment grande. Nous obtenons finalement, pour les choix de T et de q définis en (3.2) et (3.3),

$$L_{T,q}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma^{n(y,\rho)-1}} \mathcal{L}_1(\sigma)^{\alpha_1},$$

où $\alpha_1 > \alpha$. En spécifiant $\sigma = 1/\log x$, nous obtenons, d'après (4.4),

$$\mathfrak{S}(x, g, \chi) \ll x(\log x)^{\max\{y-1, (\rho+2)y-2, 3y-3\}} \mathcal{L}(x)^{\alpha_1}.$$

5. Démonstration du théorème 1.4

L'inégalité

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} \Delta_3(n, \chi)^2 \gg x(\log x)^{y-1}$$

se déduit de la minoration triviale

$$\Delta_3(n, \chi)^2 \geq 1.$$

La deuxième inégalité est obtenue par application du théorème de Parseval. Comme la fonction $\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ est nulle si u_1 ou u_2 est plus grand que $\log n$ en valeurs absolue, nous pouvons écrire que pour tout $n \leq x$

$$(5.1) \quad \Delta_3^2(n, \chi) \gg \frac{1}{(\log x)^2} \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,1]^2} |\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 d\mathbf{u}d\mathbf{v}.$$

La fonction $\mathbf{u} \rightarrow \Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ est intégrable et de carré intégrable, nous pouvons donc utiliser le théorème de Parseval pour calculer l'intégrale ci-dessus. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,1]^2} |\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ = \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,1]^2} |\tau(n, \chi, \boldsymbol{\vartheta})|^2 \prod_{i=1}^2 \frac{\sin^2(v_i \vartheta_i / 2)}{(\vartheta_i / 2)^2} d\boldsymbol{\vartheta}d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

où $\tau(n, \chi, \boldsymbol{\vartheta})$ est défini en (2.11).

L'avantage de cette nouvelle fonction est qu'elle est multiplicative, nous savons donc estimer sa fonction sommatoire. Tout d'abord le calcul de l'intégrale en v_1 et v_2 montre que

$$(5.2) \quad \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,1]^2} |\Delta_3(n, \chi, \mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 d\mathbf{u}d\mathbf{v} \gg \int_{[0,1]^2} |\tau(n, \chi, \boldsymbol{\vartheta})|^2 d\boldsymbol{\vartheta}.$$

Soit $F(s)$ la série de Dirichlet associée à la fonction

$$\mu^2(n) y^{\omega(n)} |\tau(n, \chi, \boldsymbol{\vartheta})|^2.$$

Pour $\Re(s) > 1$, cette série de Dirichlet admet le produit eulérien suivant

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{y}{p^s} |1 + \chi_1(p)p^{i\vartheta_1} + \chi_2(p)p^{i\vartheta_2}|^2 \right)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme

$$F(s) = \prod_p \left\{ 1 + \frac{y}{p^s} \left(3 + \chi_1(p)p^{i\vartheta_1} + \overline{\chi_1(p)}p^{-i\vartheta_1} + \chi_2(p)p^{i\vartheta_2} + \overline{\chi_2(p)}p^{-i\vartheta_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \chi_1(p)\overline{\chi_2(p)}p^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)} + \overline{\chi_1(p)}\chi_2(p)p^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)} \right) \right\}.$$

Dans le cas où $\chi_1\overline{\chi_2}$ n'est pas principal, nous avons

$$(5.3) \quad F(s) = \zeta(s)^{3y} L(s - i\vartheta_1, \chi_1)^y L(s + i\vartheta_1, \overline{\chi_1})^y L(s - i\vartheta_2, \chi_2)^y L(s + i\vartheta_2, \overline{\chi_2})^y \\ L(s - i(\vartheta_1 - \vartheta_2), \chi_1\overline{\chi_2})^y L(s + i(\vartheta_1 - \vartheta_2), \overline{\chi_1}\chi_2)^y F_1(s),$$

où $F_1(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re(s) > 3/4$.

La méthode de Selberg–Delange assure alors que lorsque $|\vartheta_1|$, $|\vartheta_2|$ et $|\vartheta_1 - \vartheta_2|$ sont plus grands que $c/\log(x)$ pour une certaine constante c , nous avons

$$(5.4) \quad \sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} |\tau(n, \chi, \vartheta)|^2 \gg x \log(x)^{3y-1}.$$

Les formules (5.1), (5.2) et (5.4) permettent de conclure dans le cas où $\chi_1\overline{\chi_2}$ est non principal.

Dans le cas où $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, les deux dernières fonctions L qui apparaissent dans la formule (5.3) ne sont plus des fonctions L mais des fonctions ζ , cependant le fait que leur argument ne soit pas s nous empêche d'appliquer la méthode de Selberg–Delange pour conclure. Afin de contourner cette difficulté, nous constatons que si ϑ_1 et ϑ_2 sont très proches, alors $\zeta(s + i(\vartheta_1 - \vartheta_2))$ est proche de $\zeta(s)$, ce qui nous conduit à énoncer le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Pour $x \geq 16$, il existe une constante c telle que pour $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq c/\log x$, il existe une constante B dépendant uniquement de c telle que pour tout $n \leq x$ sans facteur carré*

$$\left| \log \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right) \right| \leq B$$

où

$$f(n) = |\tau(n, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)|^2$$

et

$$g(n) = |\tau(n, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_1)|^2.$$

Supposons le lemme démontré. Dans ce cas sur la bande $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq c/\log x$, nous avons

$$(5.5) \quad \sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} f(n) \gg \sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} g(n)$$

et si nous notons G la série de Dirichlet associée à $\mu^2(n) y^{\omega(n)} g(n)$, nous pouvons écrire

$$G(s) = \zeta(s)^{5y} L(s - i\vartheta_1, \chi)^{2y} L(s + i\vartheta_1, \chi)^{2y} G_1(s),$$

où $G_1(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re(s) > 3/4$.

La méthode de Selberg–Delange assure alors que si $|\vartheta_1| \geq c'/\log x$ pour une certaine constante $c' > 0$, alors

$$(5.6) \quad \sum_{n \leq x} \mu^2(n) y^{\omega(n)} g(n) \gg x \log(x)^{5y-1}.$$

Les formules (3.1), (5.2), (5.5) (qui n'est valable que sur un ensemble de mesure $1/\log x$) et (5.6) permettent de conclure dans le cas où $\chi_1 = \chi_2$.

Il nous reste à démontrer le lemme.

Démonstration. Pour $p \leq x$, nous avons

$$\frac{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)}{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_1)} = \frac{1 + \chi(p)(p^{i\vartheta_1} + p^{i\vartheta_2})}{1 + 2\chi(p)p^{i\vartheta_1}}.$$

Par inégalité triangulaire, le module du dénominateur est toujours plus grand que 1, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)}{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_1)} &= \frac{1 + 2\chi(p)p^{i\vartheta_1} + \chi(p)(p^{i\vartheta_2} - p^{i\vartheta_1})}{1 + 2\chi(p)p^{i\vartheta_1}} \\ &= 1 + O((\vartheta_1 - \vartheta_2) \log(p)). \end{aligned}$$

Ainsi, si la différence $\vartheta_1 - \vartheta_2$ est suffisamment petite par rapport à $1/\log x$, d'une part la fraction ne s'annule pas, nous pouvons donc considérer le logarithme du module de cette fraction, et d'autre part, le développement limité du logarithme nous assure que

$$\log \left| \frac{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)}{\tau(p, \chi, \chi, \vartheta_1, \vartheta_1)} \right| = O((\vartheta_1 - \vartheta_2) \log(p)).$$

Nous avons donc pour tout $n \leq x$ sans facteur carré

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) &= \sum_{p|n} 2 \log \left| \frac{\tau(p, \chi, \vartheta_1, \vartheta_2)}{\tau(p, \chi, \vartheta_1, \vartheta_1)} \right| \\ &= \sum_{p|n} O((\vartheta_1 - \vartheta_2) \log(p)) \\ &= O((\vartheta_1 - \vartheta_2) \log(n)) \\ &= O(1). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remerciements. Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, et Gérald Tenenbaum, qui, au travers de nombreuses discussions, m'ont permis d'obtenir des avancées significatives dans la résolution de mon problème, et qui ont également pris le temps de répondre aux nombreuses questions que je leur ai posées.

Bibliographie

- [1] R. DE LA BRETÈCHE & G. TENENBAUM, « Oscillations localisées sur les diviseurs », *J. Lond. Math. Soc.* **85** (2012), n° 3, p. 669-693.
- [2] R. R. HALL & G. TENENBAUM, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 90, Cambridge University Press, 1988, xvi+167 pages.
- [3] C. HOOLEY, « On a New Technique and Its Applications to the Theory of Numbers », *Proc. Lond. Math. Soc.* **38** (1979), p. 115-151.
- [4] A. LARTAUX, « Sur le nombre d'idéaux dont la norme est la valeur d'une forme binaire de degré 3 », *Q. J. Math.* **74** (2023), n° 2, p. 471-510.
- [5] P. SHIU, « A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions », *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), p. 161-170.
- [6] G. TENENBAUM, « Sur la concentration moyenne des diviseurs », *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), p. 411-428.

Alexandre LARTAUX

Université de Paris, Sorbonne Université, CNRS,
Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche,
F-75013 Paris, France

E-mail: alexandre.lartaux@imj-prg.fr

URL: <http://www.math.u-bordeaux.fr/A2X/>