Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Élie GOUDOUT

Concentrations simultanées de fonctions additives

Tome 31, nº 2 (2019), p. 385-402.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2019__31_2_385_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **31** (2019), 385–402

Concentrations simultanées de fonctions additives

par Élie GOUDOUT

Résumé. On étudie les concentrations simultanées de plusieurs fonctions additives, évaluées sur des valeurs polynomiales. Sous une légère restriction, on étend un résultat de 1975 dû à Halász.

Abstract. We study the simultaneous concentrations of the values of several additive functions along polynomial shifts. Under a slight restriction, this yields an extension of a result from Halász in 1975.

1. Introduction et énoncé des résultats

Étant donné f une fonction additive et $r \geqslant 0$ une fonction multiplicative, pour tout $x \geqslant 2$ on note

$$E_f(x;r) := 1 + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)\neq 0}} \frac{r(p)}{p},$$

et on pose $E_f(x;1) := E_f(x)$. En 1975, Halász [4] montre qu'uniformément pour f additive et $x \geqslant 1$, on a

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \#\left\{n \leqslant x \,:\, f(n) = k\right\} \ll \frac{x}{\sqrt{E_f(x)}}.$$

Dans le cas où $f = \omega$ est la fonction nombre de facteurs premiers, lorsque x est grand on a[1] $E_f(x) = \log_2 x + O(1)$, et la majoration est optimale à constante près lorsque l'entier k vérifie $k = \log_2 x + O(\sqrt{\log_2 x})$.

On s'intéresse à une généralisation de ce théorème lorsqu'on fixe plusieurs valeurs de fonctions additives. Il s'agit entre autres, étant données f et g deux fonctions additives, de majorer le cardinal

$$\sup_{k,k'\in\mathbb{R}} \#\left\{n \leqslant x \,:\, f(n) = k,\ g(n+1) = k'\right\}.$$

Le cas $f = g = \omega$ a été traité dans [2], puis repris avec plus de généralité dans [13]. Il y est notamment montré

$$\sup_{k,k'\in\mathbb{Z}} \#\left\{n \leqslant x \,:\, \omega(n) = k,\ \omega(n+1) = k'\right\} \ll \frac{x}{\log_2 x}. \tag{1.1}$$

Manuscrit reçu le 25 septembre 2018, accepté le 25 janvier 2019.
Classification Mathématique (2010). 11N25, 11N32, 11N60.
Mots-clefs. Fonction de concentration, fonctions additives, systèmes translatés.

[1]Ici et dans la suite, on note $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction log. ($k \geqslant 2$)

Dans ces deux articles, la majoration est même explicite en $k, k' \ll \log_2 x$. Ici, on traite le cas de fonctions additives quelconques, mais prenant peu de valeurs distinctes sur les puissances de grands nombres premiers. On note qu'en considérant

$$\mathcal{A} := \left\{ n \leqslant x : \log_2 x - 10\sqrt{\log_2 x} \leqslant \omega(n), \omega(n+1) \leqslant \log_2 x + 10\sqrt{\log_2 x} \right\},$$

qui vérifie $|\mathcal{A}| \geqslant x/2$ lorsque x est assez grand, avec (1.1) on obtient

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{Z}} \# \{ n \leqslant x \,:\, \omega(n) = k,\ \omega(n+1) = k' \} \asymp \frac{x}{\log_2 x}.$$

On définit maintenant le cadre général d'étude. Étant donné $r \geqslant 1$ un entier fixé, comme dans [13], on considère une famille $\{Q_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$ de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe. On pose $Q := \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} Q_j$. Pour $m \geqslant 1$, on note $\rho_j(m)$ (resp. $\rho_0(m)$) le nombre de racines de Q_j (resp. de Q) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et D_j (resp. D) le discriminant de Q_j (resp. de Q). On note

$$\begin{aligned}
g_j &:= \deg Q_j, \qquad (0 \leqslant j \leqslant r) \qquad g := g_0 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} g_j, \\
Q(X) &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant g} \beta_i X^i, \qquad \beta := \beta_g, \qquad \|Q\| := \max_{0 \leqslant i \leqslant g} |\beta_i|, \\
\varphi_j(n) &:= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{\rho_j(p)}{p}\right), \qquad (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant j \leqslant r)
\end{aligned}$$

où ici et dans la suite, p désigne un nombre premier. On rappelle quelques bornes classiques (cf. [8, Thm. 51-52] et [9, (44)]). Pour $0 \leqslant j \leqslant r$ et $\nu \geqslant 1$,

$$\rho_j(p^\nu) \leqslant \min(g_j p^{\nu-1}, g_j p^{\nu - \nu/g_j}, p^{\nu-1}\rho_j(p)), \qquad (p \geqslant 2) \tag{1.2}$$

$$\rho_j(p^\nu) = \rho_j(p) \leqslant \min(g_j, p-1). \qquad (p \nmid D_j,\ p \geqslant 2) \tag{1.3}$$

D'après [7, Satz 191] et [10, Lem. 3.1], il existe des constantes $M_j, M_j' \geqslant 1$ et une constante $c = c(g)$ telles que pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $x \geqslant 2$,

$$\left| \sum_{p \leqslant x} \frac{\rho_j(p)}{p} - \log_2 x \right| \leqslant M_j \tag{1.4}$$

$$\sum_{p \leqslant x} \rho_j(p) = \mathrm{li}(x) + O(M_j' + x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{1.5}$$

On pose $M := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} M_j$ et $M' := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} M_j'$. Étant donnée une fonction additive ou multiplicative définie sur $\mathbb{N}$, on l'étend naturellement à $\mathbb{Z}$ par parité et en fixant arbitrairement sa valeur en 0 à 0.

Théorème 1. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta, \lambda < 1$ des réels, tous fixés. Pour $x \geqslant 1$, on pose $z := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda}}$. Il existe des constantes $K, c_0 > 0$ telles qu'uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|^\delta$, $x^\varepsilon < y \leqslant x$, et $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions additives vérifiant, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,*

$$(*) \qquad \#\big\{f_j(n) \,:\, n \leqslant t^u,\ P^-(n) > t\big\} \leqslant \mathfrak{V}^u, \qquad (t \geqslant z,\ u \geqslant 1)$$

on a

$$(1.6) \qquad \sup_{k_1,\ldots,k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \Big(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\Big)^K \frac{\mathrm{e}^{3M+M'/z} y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}},$$

La constante implicite, K et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon, \delta$ et λ.

On note que dans beaucoup de cas d'étude, $M' \ll z$. En particulier, si les polynômes $Q_1, \ldots, Q_r$ sont fixés, on obtient

$$\sup_{k_1,\ldots,k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \frac{y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse $(*)$ ne fait pas intervenir les $f_j(p^\nu)$ pour $p \leqslant z$, et elle est automatiquement vérifiée si $f_j(p^\nu)$ ne dépend que de ν pour $p > z$. Par exemple, cela est vrai pour la fonction nombre de facteurs premiers, avec ou sans multiplicité. On mentionne aussi que

$$\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \ll \Big(\frac{\beta D}{\varphi(\beta D)}\Big)^g.$$

Il serait intéressant de pouvoir se passer de l'hypothèse $(*)$, qui semble n'être qu'un artefact de la méthode employée.

Pour compléter le résultat, on s'intéresse à une borne inférieure pour le membre de gauche de (1.6).

Théorème 2. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta < 1$ des réels, tous fixés. On pose $\varepsilon_0 := \varepsilon/(50g)$ et on note $(*')$ la condition $(*)$ restreinte aux $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle qu'uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|^\delta$, et $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions additives vérifiant $(*')$, on a*

$$(1.7) \qquad \sup_{k_1,\ldots k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \sup_{k_1,\ldots k_r \in \mathbb{R}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_r \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ f_j(a_j)=k_j \\ (a_i,a_j)=(a_j,\beta D)=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2},$$

et en particulier, en notant ω_y la fonction nombre de facteurs premiers distincts inférieurs ou égaux à y, uniformément pour $y_1, \ldots, y_r \geqslant 1$,

$$\sup_{k_1,\ldots k_r \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \left(\frac{\varphi(\beta D)}{\beta D}\right)^g \frac{\mathrm{e}^{-2M} y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{\omega_{y_j}}(x;\rho_j)}}. \tag{1.8}$$

Les constantes implicites et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon$ et δ

Dans le cas où les polynôme $Q_1, \ldots, Q_r$ sont fixés et $f_j = \omega_{y_j}$ pour tout j, les estimations (1.6) et (1.8) sont du même ordre de grandeur.

2. Majoration

Dans cette section, on démontre le Théorème 1. Pour cela, on commence par démontrer deux lemmes.

Lemme 3. *Uniformément pour $B_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ des réels, on a*

$$\int_0^1 \Big(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi n t) B_n\Big) \mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi n t)B_n} \mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} B_n}}.$$

Démonstration. On montre d'abord qu'uniformément pour $B > 0$, on a

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B} \mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$

En posant $\sin(\pi t)\sqrt{B} = u$, on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B} \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{B-u^2}} \mathrm{d}u \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$

Dans le cas général maintenant, quitte à ne sommer que sur les $B_n \neq 0$, on peut supposer que tous les B_n sont non nuls. De même, quitte à ne considérer que les sommes partielles pour $0 < |n| \leqslant N$ puis à faire tendre N vers $+\infty$, on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} B_n < \infty$. On définit alors, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, le réel ϑ_n tel que $\vartheta_n B_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}^*} B_i =: B$. On vérifie que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/\vartheta_n = 1$.

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Bigg(1+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi n t)B_n\Bigg)\,\mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi n t)B_n}\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^1 \prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\mathrm{e}^{-\frac12\sin^2(\pi n t)B_n}\Big)\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\bigg(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi n t)\frac{\vartheta_n}{2}B_n}\mathrm{d}t\bigg)^{1/\vartheta_n} \\ &\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\bigg(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)\frac{B}{2}}\mathrm{d}t\bigg)^{1/\vartheta_n} \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{1+B}},\end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé $1+x\leqslant 2\mathrm{e}^{x/2}$ pour $x\geqslant 0$, l'inégalité de Hölder et la 1-périodicité de $t\mapsto \sin^2(\pi t)$. □

On démontre maintenant une généralisation du théorème de Halász pour une seule fonction additive, dans le cas de poids non constants. Dans la suite, pour $1\leqslant y\leqslant x$, on note

$$\mathcal{S}(x,y):=\Big\{n\leqslant x\ :\ P^+(n)\leqslant y\Big\},\tag{2.1}$$

l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x. On utilise aussi la notation classique

$$\operatorname{Li}(t):=\int_2^t \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.\qquad (t\geqslant 2)$$

Lemme 4. *Soient $\varepsilon, b, A>0$ et $0<\lambda<1$ des constantes. Étant donné $y\geqslant 1$, on pose $z:=\mathrm{e}^{(\log y)^{1-\lambda}}$. Uniformément pour $C, C'\geqslant 1$, $2\leqslant y\leqslant x$ tels que $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)}\geqslant(\log_2 x)^2$, f une fonction additive telle que*

$$\#\,\{f(p)\ :\ t<p\leqslant t^{\mathrm{e}}\}\leqslant A,\qquad (z\leqslant t\leqslant y)\tag{2.2}$$

et $r\geqslant 0$ une fonction multiplicative telle que

$$\max_{p\leqslant y} r(p)\leqslant A,\qquad \sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 2}}\frac{r(p^\nu)\log(p^\nu)}{p^\nu}\leqslant A,\tag{2.3}$$

$$\bigg|\sum_{p\leqslant t}\frac{r(p)}{p}-b\log_2 t\bigg|\leqslant C,\qquad (2\leqslant t\leqslant y)\tag{2.4}$$

pour laquelle il existe une fonction multiplicative $\widetilde{r}$ *telle que*

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{|r(p)-\widetilde{r}(p)|}{p}\leqslant A, \tag{2.5}$$

$$\Bigl|\sum_{p\leqslant t}\widetilde{r}(p)-b\mathrm{Li}(t)\Bigr|\leqslant A\left(C'+\frac{t}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\right),\qquad (2\leqslant t\leqslant y) \tag{2.6}$$

on a, en posant $u:=(\log x)/\log y$,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}}\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)\ll\frac{\mathrm{e}^{2C+C'/z}x(\log x)^{b-1}\log(1+u)}{u^b\sqrt{E_f(y;r)}},$$

où la constante implicite dépend au plus de ε, b, A *et* λ.

On note que la condition (2.2) peut être affaiblie en

$$\#\left\{f(p)\,:\,t<p\leqslant t^{1+c}\right\}\leqslant A\qquad(z\leqslant t\leqslant y)$$

avec $c:=(\log_2 x)^2/(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)}\leqslant 1$, par adaptation directe de la méthode. Il est par ailleurs possible de démontrer une version uniforme en ε. La démonstration est fortement inspirée de [1, Thm. 1.1].

Démonstration. Comme le fait remarquer Halász au début de la démonstration du théorème de [4], quitte à modifier f d'une manière précise, on peut supposer qu'elle est à valeurs entières. La construction qu'il emploie garantit que le nombre de valeurs prises par $f(p)$ n'augmente pas, et que la somme étudiée ne peut qu'augmenter tandis que $E_f(y;r)$ demeure identique. Ainsi, en posant $R(t):=\sum_{n\in\mathcal{S}(x,y)}r(n)\mathrm{e}^{2i\pi f(n)t}$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)=\int_0^1 R(t)\mathrm{e}^{-2ik\pi t}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|R(t)|\mathrm{d}t.$$

En utilisant (2.3) et (2.4), on applique le théorème 1.1 de [12] avec le paramètre $T:=(\log_2 x)^2$ et on utilise la démonstration du corollaire 2.1 de ce même article, pour obtenir uniformément pour $t\in[0,1]$,

$$|R(t)|\ll\mathrm{e}^C x(\log x)^{b-1}\frac{\log(1+u)}{u^b}\left\{\frac{1+m(t)}{\mathrm{e}^{m(t)}}+\frac{1}{\log_2 x}\right\} \tag{2.7}$$

où

$$m(t):=\min_{|\tau|\leqslant(\log_2 x)^2}\sum_{p\leqslant y}\frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t-\tau\log p))}{p}.$$

On pose, pour $k \geqslant 0$ et $t \in [0,1]$,

$$\gamma_{k,t}(\vartheta) := 1 - \max_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ z<p\leqslant y}} \cos(2\pi f(p)t - \vartheta), \qquad (\vartheta \in \mathbb{R})$$

$$s_t := \min_{k\geqslant 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_{k,t}(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \geqslant 1 - \frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{A}\right) \gg 1,$$

avec la convention $\max_\emptyset = 0$. Dans la définition de $\gamma_{k,t}$, on rappelle que $f(p)$ prend au plus A valeurs différentes lorsque $k < \log_2 p \leqslant k+1$. Pour tous $z \leqslant y_0 \leqslant y$, on a alors pour un certain $|\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$,

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{r(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} \\ &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{\widetilde{r}(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} - A, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.5). De manière analogue à [11, Lem. III.4.13], on estime la somme ci-dessus à l'aide de (2.6), par sommation par parties. On obtient ainsi, uniformément pour $z \leqslant y_0 \leqslant y$ et $t \in [0,1]$, lorsque $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} m(t) \geqslant{}& s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) \\ &+ O\Bigg(\sum_{\log_2 y_0 - 1 < k \leqslant \log_2 y} \frac{1}{|\tau|\mathrm{e}^k} + (1+|\tau|)\Big(\frac{1}{(\mathrm{e}^k)^\varepsilon} + \frac{C'}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}}\Big)\Bigg) \\ \geqslant{}& s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) + O\Bigg(\frac{1}{|\tau|\log y_0} + (1+|\tau|)\Big(\frac{1}{(\log y_0)^\varepsilon} + \frac{C'}{y_0^{1/\mathrm{e}}}\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

Si $1 \leqslant |\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$, on pose $y_0 := z^{3\mathrm{e}}$. Puisque $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)} \geqslant (\log_2 x)^2$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t b \log_2 y + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

On définit ensuite w tel que

$$\log w = 2\mathrm{e}(\log y)\exp\Bigg(-\frac{\lambda}{b}\Bigg\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi v t)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}}\frac{r(p)}{p} - 2C\Bigg\}\Bigg).$$

D'après (2.4), on a $w \geqslant z^{2\mathrm{e}}$. Si $w \geqslant y$, on retient trivialement que $m(t) \geqslant 0$. Dans le cas contraire, si $1/\log w < |\tau| \leqslant 1$, avec $y_0 := w$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t\Bigg\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi v t)\sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}}\frac{r(p)}{p} - 2C\Bigg\} + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

Enfin, lorsque $|\tau| \leqslant 1/\log w$, on minore trivialement

$$\begin{aligned}
m(t) &\geqslant \sum_{p\leqslant w} \frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t))}{p} + O(1)\\
&= 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant w\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} + O(1)\\
&\geqslant 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2b\log\left(\frac{\log y}{\log w}\right) - 4C + O(1)\\
&\geqslant 2(1-\lambda)\left\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\right\} + O(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de τ, en posant

$$\eta := \min\big(\lambda s_t b, \lambda s_t, 2(1-\lambda), 1/2\big),$$

lorsque x (et donc z) est suffisamment grand, on a

$$m(t) \geqslant \eta \sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - \left(C + \frac{C'}{z} + O(1)\right)$$

et $m(t) \geqslant 0$. Ainsi, avec (2.7), on obtient le résultat désiré en intégrant selon t, par application directe du Lemme 3. □

On démontre désormais le théorème. Soit $2 \leqslant y \leqslant x$ et $n \in (x, 2x]$. Un élément clé de la preuve de (1.1) est que si l'on note n_y la partie y-friable de n, alors $\omega(n) - \omega(n_y)$ ne peut prendre au plus qu'un nombre fini de valeurs lorsque $\log y \asymp \log x$. Cela est toujours vrai lorsqu'on remplace ω par une fonction additive vérifiant $(*)$. C'est la seule hypothèse du théorème sur les fonctions additives, et il serait intéressant de pouvoir s'en passer. La démonstration diffère peu de celle de [13].

Démonstration du Théorème 1. On suppose que les paramètres de l'énoncé sont donnés. Durant la démonstration, on note K une constante positive qui sera toujours prise suffisamment grande au besoin. Puisque Q n'admet qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{Z}$, on peut, sans perte de généralité, faire tous nos raisonnements en supposant $Q(n) \neq 0$. On se donne $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ fixés. Pour tout entier $n \geqslant 1$ avec $Q(n) \neq 0$, on note ξ_n le plus grand entier tel que la partie ξ_n-friable de $Q(n)$ soit inférieure ou égale à $x^{2\varepsilon/3}$. On obtient ainsi la décomposition canonique $Q(n) = b_n \prod_{1\leqslant j\leqslant r} a_{j,n}$ où b_n est la partie ξ_n-criblée de $Q(n)$, et pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_{j,n} | Q_j(n)$. On note $p_n := P^-(b_n)$ et ν_n tel que $p_n^{\nu_n} \| Q(n)$.

On note $N_1(x)$ le nombre d'entiers n apparaissant dans la somme de (1.6) pour lesquels $a_{1,n}\dots a_{r,n}\leqslant x^{\varepsilon/3}$. On note $N_2(x)$ le nombre des autres entiers n de la somme de (1.6). Pour la suite, on pose

$$\gamma := g+1/\delta+1,$$

de sorte que $|Q(n)|\leqslant x^{\gamma}$ pour x suffisamment grand et $x<n\leqslant x+y$; et on note

$$\mathcal{V}_u := \Big\{f_j(n)\ :\ 1\leqslant j\leqslant r,\ n\leqslant x^{\gamma},\ P^-(n)>x^{\gamma/u}\Big\}. \qquad (u\geqslant 1)$$

D'après $(*)$, on a $|\mathcal{V}_u|\leqslant r\mathfrak{V}^u$ dès que $x^{\gamma/u}\geqslant z$.

Considérons n compté dans $N_1(x)$. Alors $p_n^{\nu_n}>x^{\varepsilon/3}$. Par ailleurs, si $p_n>x^{\varepsilon/(6g)}$, en posant $\eta_0:=6g\gamma/\varepsilon$, on a $f_j\big(Q_j(n)\big)-f_j(a_{j,n})\in\mathcal{V}_{\eta_0}$ pour tout $1\leqslant j\leqslant r$ lorsque x est assez grand. Ainsi,

$$\text{(2.8)}\quad N_1(x)\leqslant \sum_{\substack{a_1\dots a_r\leqslant x^{\varepsilon/3}\\ k_j-f_j(a_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}}}\ \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ a_j|Q_j(n)\\ P^-(Q(n)/(a_1\dots a_r))>x^{\varepsilon/(6g)}}} 1+\sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^{\nu}>x^{\varepsilon/3}}}\ \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^{\nu}\|Q(n)}} 1.$$

On majore en premier la seconde double somme. Pour les p considérés, quitte à remplacer ν par $\nu'\leqslant\nu$ le plus petit tel que $p^{\nu'}>x^{\varepsilon/3}$ et $p^{\nu}\|Q(n)$ par $p^{\nu'}|Q(n)$ (auquel cas $p^{\nu'-1}\leqslant x^{\varepsilon/3}$ et donc $p^{\nu'}\leqslant\ x^{\varepsilon/3}\leqslant x^{\varepsilon/2}\leqslant y$), on peut supposer $p^{\nu}\leqslant y$. On obtient

$$\sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^{\nu}>x^{\varepsilon/3}}}\ \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^{\nu}\|Q(n)}} 1\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ x^{\varepsilon/3}<p^{\nu}\leqslant y}}\ \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^{\nu}|Q(n)}} 1\leqslant 2\sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^{\nu}>x^{\varepsilon/3}}}\frac{y\rho_0(p^{\nu})}{p^{\nu}}\ll\frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}},$$

où la dernière inégalité est une conséquence directe de (1.2).

On majore maintenant la première double somme de (2.8). Comme dans [13], pour tout $1\leqslant j\leqslant r$, on décompose a_j sous la forme $a_j=t_jd_j$ où $t_j|(\beta D)^{\infty}$ et $(d_j,\beta D)=1$, de sorte que $k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}$ et $(d_i,d_j)=1$ pour tous $i\neq j$. En posant $T:=t_1\dots t_r$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a_1\dots a_r\leqslant x^{\varepsilon/3}\\ k_j-f_j(a_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}}}\ &\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ a_j|Q_j(n)\\ P^-(Q(n)/(a_1\dots a_r))>x^{\varepsilon/(6g)}}} 1\\ &\ll \sum_{\substack{t_1d_1\dots t_rd_r\leqslant x^{\varepsilon/3}\\ T|(\beta D)^{\infty}\\ (d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1\\ k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}}}\ \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ T|Q(n)\\ d_j|Q_j(n)\\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\dots d_r\text{ ou }p>x^{\varepsilon/(6g)}}} 1.\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement de crible que [13], on majore la dernière somme, sous les hypothèses $Td_1\dots d_r\leqslant x^{\varepsilon/3}$, $(d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1$ et $T|(\beta D)^{\infty}$, par

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ T\mid Q(n)\\ d_j\mid Q_j(n)\\ p\mid Q(n)\Rightarrow p\mid Td_1\dots d_r \text{ ou } p>x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 \ll \frac{\mathrm{e}^M y}{(\log x)^r}\left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r \frac{\rho_0(T)}{T}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

En posant

$$H := \mathrm{e}^M\left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r,$$

$$S_j(t_j) := \sum_{\substack{d_j\leqslant x\\ (d_j,\beta D)=1\\ k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta_0}}} \frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}, \qquad (1\leqslant j\leqslant r)$$

on obtient alors

$$N_1(x) \ll \frac{Hy}{(\log x)^r}\sum_{t_1\dots t_r\mid(\beta D)^\infty}\frac{\rho_0(T)}{T}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}S_j(t_j) + \frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}}.$$

Lorsque x est assez grand, on a $|\mathcal{V}_{\eta_0}| \leqslant r\mathfrak{V}^{\eta_0} \ll 1$. Pour $1\leqslant j\leqslant r$, on définit la fonction multiplicative $\tilde\rho_j$ par

$$\begin{aligned}
\tilde\rho_j(p^\nu) &:= \frac{\rho_j(p^\nu)p^\nu}{\varphi_j(p^\nu)}, && (p\nmid\beta D,\ \nu\geqslant 1)\\
\tilde\rho_j(p^\nu) &:= 0, && (p\mid\beta D,\ \nu\geqslant 2)\\
\tilde\rho_j(p) &:= \rho_j(p), && (p\mid\beta D)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$S_j(t_j) \ll \sup_{k\in\mathbb{R}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ f_j(n)=k}}\frac{\tilde\rho_j(n)}{n}.$$

Puisque $\rho_j(p)\leqslant\min(p-1,g_j)$, on a

$$\sum_{p\leqslant t}\frac{\tilde\rho_j(p)}{p} = \sum_{p\leqslant t}\frac{\rho_j(p)}{p} + O(1). \qquad (t\geqslant 2) \tag{2.9}$$

On pose

$$x_0 := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda/2}}. \tag{2.10}$$

Soit $\lambda'>0$ tel que $(1-\lambda/2)(1-\lambda')\geqslant 1-\lambda$. Avec (1.4), (1.5) et (2.9), on applique le Lemme 4 à $\tilde\rho_j$. Ainsi, pour tout $x'\in(x_0,x]$, en posant

$z' := \mathrm{e}^{(\log x')^{1-\lambda'}}$, on obtient

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{n\leqslant x'\\ f_j(n)=k}} \tilde\rho_j(n) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z'}x'}{\sqrt{E_{f_j}(x';\rho_j)}},$$

puisque $E_{f_j}(x';\tilde\rho_j) \asymp E_{f_j}(x';\rho_j)$. Par ailleurs, on a facilement

$$\sum_{n\leqslant x_0} \frac{\tilde\rho_j(n)}{n} \ll \mathrm{e}^{M_j}\log x_0 = \mathrm{e}^{M_j}(\log x)^{1-\lambda/2}.$$

Finalement, via une sommation par parties sur $(x_0,x]$, on obtient pour tout $1\leqslant j\leqslant r$,

$$S_j(t_j) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}. \tag{2.11}$$

La majoration voulue pour $N_1(x)$ découle alors de l'inégalité

$$\sum_{T|(\beta D)^\infty} \frac{\rho_0(T)\tau_r(T)}{T} \ll \Big(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\Big)^K,$$

qui est une conséquence facile de (1.2).

On majore désormais $N_2(x)$. On introduit $q_n := P^+(a_{1,n}\dots a_{r,n})$ et on pose $\eta(q_n) := \gamma(\log x)/\log q_n$, de sorte que $f_j(Q_j(n)) - f_j(a_{j,n}) \in \mathcal{V}_{\eta(q_n)}$ pour tout $1\leqslant j\leqslant r$ lorsque x est assez grand. Avec $(*)$, pour $q_n\geqslant z$, on a $|\mathcal{V}_{\eta(q_n)}|\leqslant r\mathfrak{V}^{\eta(q_n)}$. En décomposant les a_j comme dans le cas de $N_1(x)$, on obtient

$$N_2(x) \leqslant \sum_{q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \sum_{\substack{x^{\varepsilon/3}<t_1d_1\dots t_rd_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}\\ P^+(Td_1\dots d_r)=q\\ T|(\beta D)^\infty\\ (d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1\\ k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta(q)}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ T|Q(n)\\ d_j|Q_j(n)\\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\dots d_r \text{ ou } p>q}} 1. \tag{2.12}$$

Comme précédemment, sous les hypothèses $Td_1\dots d_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}$, $T|(\beta D)^\infty$ et $(d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1$, on majore la dernière somme

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ T|Q(n)\\ d_j|Q_j(n)\\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\dots d_r \text{ ou } p>q}} 1 \ll \frac{Hy}{(\log q)^r}\frac{\rho_0(T)}{T}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

Soit $C>0$ une constante que l'on fixera plus tard. Pour $q\geqslant 2$, on pose

$$\alpha = \alpha(q) := C/\log q.$$

Dans (2.12), on majore trivialement la contribution des $q\leqslant \mathrm{e}^{2gC}$. Pour cela, on remarque qu'avec (1.2), lorsque $P^+(m)\leqslant \mathrm{e}^{2gC}$ et $0\leqslant j\leqslant r$, on a les inégalités $\varphi_j(m) \gg m$ et $\rho_j(m) \ll m^{1-1/g_j}$. Pour le reste, on utilise l'astuce de Rankin en introduisant $(Td_1 \dots d_r/x^{\varepsilon/3})^\alpha > 1$. On obtient alors

$$(2.13) \quad N_2(x) \ll Hy \sum_{\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{t_1 d_1 \dots t_r d_r \leqslant x^{2\varepsilon/3} \\ P^+(Td_1 \dots d_r) = q \\ T \mid (\beta D)^\infty \\ (d_j, \beta D) = 1 \\ k_j - f_j(t_j) f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta(q)}}} \frac{\rho_0(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{\rho_j(d_j) d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)} + \frac{Hy}{x^{\varepsilon/(4g)}}.$$

Pour $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, on a $\alpha \leqslant 1/(2g)$ et avec (2.10), $x^{\varepsilon\alpha/3} \gg \mathrm{e}^{2(\log x)^{\lambda/3}}$. On majore alors la contribution des $q \in (\mathrm{e}^{2gC}, x_0]$ avec (1.2) et (1.3) en négligeant la condition sur les valeurs de $f_j(d_j)$. Pour cela, on remarque notamment qu'uniformément pour $p \leqslant q$ et $\nu \geqslant 1$,

$$(2.14) \qquad \frac{\rho_0(p^\nu)}{p^{\nu(1-\alpha)}} \ll \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^{\nu/(2g)}}\right),$$

$$(2.15) \qquad \frac{\rho_j(p^\nu) p^{\nu\alpha}}{\varphi_j(p^\nu)} \ll \frac{1}{p^{\nu(1-\alpha)}}. \qquad (p \nmid \beta D,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$$

On obtient alors

$$\sum_{\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{Td_1 \dots d_r \leqslant x^{2\varepsilon/3} \\ P^+(Td_1 \dots d_r) = q \\ T \mid (\beta D)^\infty \\ (d_j, \beta D) = 1}} \frac{\rho_0(T) \tau_r(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{\rho_j(d_j) d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \mathrm{e}^{-(\log x)^{\lambda/3}},$$

Par ailleurs, on montre que pour $q \in (x_0, x^{2\varepsilon/3}]$, la somme intérieure de (2.13) est

$$\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \frac{\mathrm{e}^{2M + M'/z} (\log x)^r \mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(q; \rho_j)}}.$$

Pour cela, on montre que pour $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q)\\(d,\beta D)=1\\f_j(d)=k}} \frac{\rho_j(d)d^\alpha}{\varphi_j(d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}},$$

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q-1)\\(q^\nu d,\beta D)=1\\f_j(q^\nu d)=k}} \frac{\rho_j(q^\nu d)(q^\nu d)^\alpha}{\varphi_j(q^\nu d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{q\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}}.$$

Avec (2.15), la première inégalité implique facilement la seconde. De manière analogue à (2.11), la première inégalité est conséquence du Lemme 4. Afin d'en vérifier les hypothèses, on remarque que

$$\sum_{p\leqslant q}\frac{\rho_j(p)}{p^{1-\alpha}} = \sum_{p\leqslant q}\frac{\rho_j(p)}{p} + O(1).$$

Par ailleurs, de manière analogue au cas $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, la somme sur T se majore avec (2.14). Pour conclure, il suffit de noter que l'on a

$$\sum_{x_0<q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{(\log x)^r\mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}} \ll \frac{1}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}$$

dès que $\varepsilon C > 3r\gamma\log(\mathfrak{V})$. □

3. Minoration

Démonstration du Théorème 2. On suppose que les paramètres de l'énoncé sont donnés. Pour tout $x < n \leqslant x+y$ tel que $Q(n) \neq 0$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, on pose $a_{j,n}$ la partie x^{ε_0}-friable de $Q_j(n)$. Pour x suffisamment grand, on a $|Q(n)| \leqslant x^{g+1/\delta+1}$. Ainsi, puisque $f_1,\dots f_r$ vérifient $(*)$ pour $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$, $f_j(Q_j(n)) - f_j(a_{j,n})$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs lorsque $x < n \leqslant x+y$. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que pour tout $p > x^{\varepsilon_0}$, on a $f_j(p^\nu) = 0$ lorsque $\nu \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant r$. Dans ce cas-là, pour tout $k_1,\dots k_r \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \geqslant \sum_{\substack{a_1\dots a_r\in\mathcal{S}(x,x^{\varepsilon_0})\\f_j(a_j)=k_j}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\a_j|Q_j(n)\\P^-(Q(n)/(a_1\dots a_r))>x^{\varepsilon_0}}} 1,$$

où l'on a utilisé la notation (2.1).

On introduit quelques notations utilisées dans [5] et [6]. Pour $n \geqslant 1$, on note $\kappa(n)$ le noyau sans facteurs carrés de n. Si de plus $m \geqslant 1$ est un autre entier, on écrit $n\|m$ pour signifier $n|m$ et $(n,m/n)=1$. Par ailleurs, pour $a_1,\dots,a_r\geqslant 1$, on pose

$$\begin{aligned}\check\rho(a_1,\dots,a_r):=\#\{n \mod [a_1\kappa(a_1)\dots a_r\kappa(a_r)]\ :&\\ \forall\, 1\leqslant j\leqslant r,\ a_j\|Q_j(n),\ a_1\dots a_r\|Q(n)\}.&\end{aligned}$$

D'après la version corrigée dans [6] de [5, Lem. 6], on a alors

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ f_j(Q_j(n))=k_j}}1\gg y\sum_{\substack{a_1\dots a_r\in\mathcal S(x^{3\varepsilon/25},x^{\varepsilon_0})\\ f_j(a_j)=k_j}}\frac{\check\rho(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\dots a_r\kappa(a_r)]}\prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ p\nmid a_1\dots a_r}}\Big(1-\frac{\rho_0(p)}{p}\Big).$$

Puisque $\rho_0(p)\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant r}\rho_j(p)$, avec (1.2) et (1.4), on a

$$\prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ p\nmid a_1\dots a_r}}\Big(1-\frac{\rho_0(p)}{p}\Big)\gg\frac{\mathrm e^{-M}}{(\log x)^r}.$$

Pour obtenir (1.7), il suffit de montrer qu'en imposant $(a_i,a_j)=(a_j,\beta D)=1$ pour tous $1\leqslant i<j\leqslant r$, alors

$$\frac{\check\rho(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\dots a_r\kappa(a_r)]}\geqslant\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}. \tag{3.1}$$

Pour cela, on commence par noter comme dans la démonstration du Théorème 1, que lorsque $p\nmid\beta D$, alors pour tous $i\neq j$, on a $p\nmid(Q_i(n),Q_j(n))$. Donc lorsque $p\nmid\beta D$, si $p^\nu\|Q_j(n)$ pour un certain j, alors $p^\nu\|Q(n)$. La minoration (3.1) découle alors de la multiplicativité de $\check\rho$ et de (1.3).

Il reste à démontrer (1.8). Pour cela, on utilise entre autres le « W-trick », technique introduite par Green [3], afin de gérer les conditions $(a_i,a_j)=1$. Soit $w\geqslant 1$ un entier, que l'on fixera plus tard, et $W:=\prod_{p\leqslant w}p$. On se donne par ailleurs $C\geqslant 1$, une autre quantité à fixer plus tard. Soit $y_1,\dots,y_r\geqslant 2$. Pour $1\leqslant j\leqslant r$, on introduit $y_j^*:=\min(y_j,x^{\varepsilon_0/C})$ et on pose

$$\begin{aligned}L_j(\alpha)&:=\sum_{\substack{w<p\leqslant y_j^*\\ p\nmid\beta D}}\frac{\rho_j(p)\varphi(p)p^\alpha}{p^2},\qquad (0\leqslant\alpha\leqslant(\log x)^{-\varepsilon_0/C})\\ L_j&:=\sum_{\substack{w<p\leqslant y_j^*\\ p\nmid\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}.\end{aligned}$$

Puisque $0\leqslant\rho_j(p)\leqslant g_j$ pour tout $1\leqslant j\leqslant r$, une sommation par parties fournit

$$L_j(\alpha)=L_j(0)+O(1)=L_j+O(1). \tag{3.2}$$

On démontre que la minoration (1.8) est valable pour les valeurs particulières

$$k_j := \lfloor L_j \rfloor. \qquad (1 \leqslant j \leqslant r) \tag{3.3}$$

Pour cela, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5. *Avec les notations ci-dessus, lorsque w et C sont suffisamment grands, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, uniformément pour $0 \leqslant k_j' \leqslant k_j$ on a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \asymp \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\Big\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \Big\}.$$

Démonstration. La majoration est aisée en remplaçant la condition $n \leqslant x^{\varepsilon_0}$ par $P^+(n) \leqslant x$. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} &\leqslant \frac{L_j(0)^{k_j'}}{k_j'!} \prod_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \Big\{ 1 + \frac{\rho_j(p)}{p} \Big\} \\ &\ll \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\Big\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \Big\}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.2). On démontre maintenant la borne inférieure. Pour cela, on introduit les notations

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2}, \qquad \Sigma_2 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ n > x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2},$$

de sorte que l'on a

$$\sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \geqslant \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

En utilisant l'astuce de Rankin, avec $\alpha := 1/\log\left(x^{\varepsilon_0/C}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leqslant x^{-\alpha\varepsilon_0} \sum_{\substack{P^+(n)\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ \omega_{y_j}(n)=k_j'\\ (n,W\beta D)=1\\ \mu(n)^2=1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)n^\alpha}{n^2}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j(\alpha)^{k_j'}}{k_j'!} \prod_{\substack{y_j^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}} \left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)p^\alpha}{p^2}\right)\\ &\ll \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!}\exp\Bigg\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on minore Σ_1 pour $k_j' \geqslant 1$ par

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\geqslant \left(\frac{L_j(0)^{k_j'}}{k_j'!}+O\Bigg(\sum_{\substack{w<p\leqslant y_j^*\\ p\nmid\beta D}}\frac{1}{p^2}\frac{L_j(0)^{k_j'-1}}{(k_j'-1)!}\Bigg)\right)\prod_{\substack{y^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}}\left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)}{p^2}\right)\\ &\gg \left(\frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!}+O\left(\frac{L_j^{k_j'-1}}{w(k_j'-1)!}\right)\right)\exp\Bigg\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\Bigg\}C^{-g_j}.\end{aligned}$$

La même inégalité est valable sans le terme d'erreur dans la parenthèse pour $k_j' = 0$. Finalement, puisque $k_j' \leqslant L_j$, lorsque w et C sont assez grands, on obtient bien le lemme énoncé. □

On peut désormais démontrer (1.8) pour le choix particulier (3.3). Grâce au « W-trick », les conditions $(a_i, a_j) = 1$ sont négligeables lorsque w est assez grand. On introduit donc

$$\Sigma_3 := \prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sum_{\substack{a_j\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(a_j)=k_j\\ (a_j,W\beta D)=1\\ \mu(a_j)^2=1}}\frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}$$

et

$$\Sigma_4 := \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}}\leqslant x^{\varepsilon_0} \quad (\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}([\![1,r]\!]),|\mathcal{I}|\geqslant 2)\\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}}\neq 1\\ (d_{\mathcal{I}},W\beta D)=1\\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \Big(\prod_{\mathcal{J}} \frac{\prod_{j\in\mathcal{J}}\rho_j(d_{\mathcal{J}})}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}}\Big) \times \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sum_{\substack{a_j\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(a_j)=k_j-\sum_{\mathcal{J}\ni j}\omega_{y_j}(d_{\mathcal{J}})\\ (a_j,W\beta D)=1\\ \mu(a_j)^2=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2},$$

de sorte que

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M}y}{(\log x)^r}\left(\Sigma_3-\Sigma_4\right).$$

Dans la définition de Σ_4, les variables $d_{\mathcal{I}}$ encodent les relations de coprimalité entre les a_i pour $i\in\mathcal{I}$. Dire que les $a_1,\ldots,a_r$ ne sont pas tous premiers entre eux est exactement dire $\prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}}\neq 1$. Avec le Lemme 5, on a d'une part,

$$\Sigma_3 \gg \prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{L_j^{k_j}}{k_j!}\exp\Big\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\Big\},$$

et d'autre part, puisque $\rho_j(p)\leqslant g$ et $k_j\leqslant L_j$ pour tout $1\leqslant j\leqslant r$,

$$\Sigma_4 \ll \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}}\leqslant x^{\varepsilon_0} \quad (\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}([\![1,r]\!]),|\mathcal{I}|\geqslant 2)\\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}}\neq 1\\ (d_{\mathcal{I}},W\beta D)=1\\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \Big(\prod_{\mathcal{J}}\frac{g^{r\omega(d_{\mathcal{J}})}}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}}\Big)\Sigma_3 \ll \frac{\Sigma_3}{\sqrt{w}}.$$

Ainsi, lorsque w est suffisamment grand, pour ce choix de $k_1,\ldots,k_r$ on obtient avec (1.4),

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M}y}{(\log x)^r}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\varphi_j(\beta D)\mathrm{e}^{-M_j}\log x}{\beta D\sqrt{1+L_j}},$$

et donc le résultat désiré. □

Remerciements

L'auteur remercie chaleureusement Régis de la Bretèche pour ses suggestions éclairées.

Bibliographie

[1] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, « A remark on Sarnak's conjecture », *Q. J. Math* **70** (2018), n° 1, p. 371-378.

[2] É. Goudout, « Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles », *Proc. Lond. Math. Soc.* **115** (2017), n° 3, p. 599-637.

[3] B. Green, « Roth's theorem in the primes », *Ann. Math.* **161** (2005), n° 3, p. 1609-1636.

[4] G. Halász, « On the distribution of additive arithmetic functions », *Acta Arith.* **27** (1975), p. 143-152.

[5] K. Henriot, « Nair–Tenenbaum bounds uniform with respect to the discriminant », *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **152** (2012), n° 3, p. 405-424.

[6] ———, « Nair–Tenenbaum uniform with respect to the discriminant–ERRATUM », *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **157** (2014), n° 2, p. 375-377.

[7] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Teubner, 1927.

[8] T. Nagell, *Introduction to number theory*, John Wiley & Sons, 1951.

[9] C. L. Stewart, « On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations », *J. Am. Math. Soc.* **4** (1991), n° 4, p. 793-835.

[10] G. Tenenbaum, « Sur une question d'Erdős et Schinzel », in *A Tribute to Paul Erdős*, Cambridge University Press, 1990, p. 405-443.

[11] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ème éd., Belin, 2015.

[12] ———, « Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes », *Ramanujan J.* **44** (2017), n° 3, p. 641-701.

[13] ———, « Note sur les lois locales conjointes de la fonction nombre de facteurs premiers », *J. Number Theory* **188** (2018), p. 88-95.

Élie Goudout
Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG,
Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité,
75013 Paris, France
E-mail: eliegoudout@hotmail.com