

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

Rodolphe RICHARD

**Répartition galoisienne ultramétrique d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques: Le cas de la mauvaise réduction. Application aux hauteurs locales.**

Tome 30, n° 1 (2018), p. 1-18.

[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2018\\_\\_30\\_1\\_1\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2018__30_1_1_0)

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2018, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Répartition galoisienne ultramétrique d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques: Le cas de la mauvaise réduction. Application aux hauteurs locales.

par Rodolphe RICHARD

**Résumé.** Nous nous intéressons à un problème analogue à [3] et à [4], un analogue lui-même déjà de [2]. Il s'agit de la distribution « galoisienne » d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques, dans la courbe modulaire, mais en une place ultramétrique. Nous y répondons ici pour des invariants non entiers ultramétriques: ceux des courbes elliptiques à mauvaise réduction. La démarche adoptée est quantitative via un lien avec les séries de Dirichlet de séries d'Eisenstein. Nous montrons enfin comment appliquer la propriété d'équidistribution à l'asymptotique de la hauteur locale des valeurs de fonctions modulaires  $P \in \mathbb{Q}(j)$  le long d'une classe d'isogénie, sous une hypothèse sur les pôles de  $P$ .

Nous laissons la gestion des pôles de  $P$  et d'un problème inverse, l'équivalence entre asymptotique de hauteurs et équidistribution, à un article ultérieur. De même que les cas des courbes elliptiques à bonne réduction.

**Abstract.** The problem we are interested in is an analogue of [3] and of [4], itself an analogue of [2]. It is about "galoisian" equidistribution of an isogeny class of elliptic curves, in the modular curve, but at an ultrametric place. We answer here in the case of non ultrametric invariants: these of elliptic curves with bad reduction. The way chosen here is quantitative through a link with Dirichlet series of Eisenstein series. We show in the end how to apply the equidistribution property to the asymptotic of the local height of the values of modular functions  $P \in \mathbb{Q}(j)$  along a isogeny class, under some hypothesis on the poles of  $P$ .

We leave the treatment of poles of  $P$  and of an inverse problem, equivalence between heights asymptotic and equidistribution, to a later article. As the case of elliptic curves with good reduction.

---

Manuscrit reçu le 19 mai 2014, révisé le 1<sup>er</sup> juin 2017, accepté le 17 février 2015.

*Classification Mathématique (2010).* 37P50, 11S40, 14G40, 11F32.

*Mots-clés.* Modular curve, Berkovich space, Isogeny class, Equidistribution, Hecke orbits, Galois orbit, Dirichlet series, Asymptotic height, Local height.

### 1. Énoncés principaux

Soit  $p$  un nombre premier, et soit  $K$  une extension ultramétrique et algébriquement close de  $\mathbf{Q}_p$ . Pour tout entier  $N \geq 1$ , notons  $T_N$  l'opérateur de Hecke de niveau  $N$  défini comme suit. Pour  $j$  dans  $K$ , soit  $E$  une courbe elliptique sur  $K$  d'invariant  $j$ . Alors nous faisons agir  $T_N$  sur les masses de Dirac, puis par linéarité les mesures à support fini sur  $K$ , depuis

$$(1.1a) \quad T_N : j \mapsto \sum_{C \in (E(K), +), \#C=N} j(E/C),$$

où la somme porte sur les sous-groupes  $C$  d'ordre  $N$  de  $(E(K), +)$ . Nous utiliserons la variante, plus fine, où la somme porte sur les sous-groupes cycliques d'ordre  $N$ ,

$$(1.1b) \quad X_0(N) : j \mapsto \sum_{\substack{C \in (E(K), +), \\ (C, +) \cong (\mathbf{Z}/N, +)}} j(E/C),$$

donnant l'action de la correspondance de Hecke  $X_0(N)$  de niveau  $\Gamma_0(N)$ . Le lien

« L'opérateur  $T_N$  donne l'action de la correspondance  $X_0(N/d^2)$  »  
 $d^2|N$

s'encode formellement dans l'identité de séries de Dirichlet

$$(1.2) \quad \sum_{N \geq 1} T_N N^{-s} = (2s) \cdot \sum_{N \geq 1} X_0(N) N^{-s}.$$

L'action duale sur les fonctions  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$  est donnée par  $j(T_N f) = (T_N j)f$ , soit

$$(T_N f) : j \mapsto \sum_{C \in E(K), \#C=N} f(j(E/C))$$

Rappelons que le degré de  $T_N$  et de  $X_0(N)$  (en tant que correspondance) est donné par

$$(1.3a) \quad \deg(X_0(N)) = N \cdot \sum_{d|N} \frac{1}{d} = \phi_1(N) = \#\text{Proj}_1(\mathbf{Z}/(N))$$

$$(1.3b) \quad \deg(T_N) = \sum_{d|N} d = \sigma_1(N)$$

où, le produit portant sur les facteurs premiers et la somme sur les diviseurs  $d$  de  $N$ ,

$$(1.4) \quad \sum_{d|N} d^a = \prod_{p|N} (1 + p^{-a}) \quad \text{pour } a \in \mathbf{C}.$$

On définit une probabilité par la normalisation

$$\frac{T_N(j)}{\deg(T_N)}, \quad \text{resp.} \quad \frac{X_0(N)(j)}{\deg(X_0(N))}.$$

Nous donnons le comportement asymptotique des suites de mesures de probabilités

$$(1.5) \quad \frac{T_N(j)}{\deg(T_N)} \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} \mu_j, \quad \text{resp.} \quad \frac{X_0(N)(j)}{\deg(X_0(N))} \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} \mu_j$$

dans le cas où  $j$  n'est pas un entier ultramétrique de  $K$ , soit :  $1 < |j| < +\infty$ .

**1.1. Équidistribution.** Rappelons que  $K$  est muni d'une compactification naturelle, la droite projective analytique au sens de Berkovich  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ . Renvoyons à l'annexe A pour une esquisse de cet objet.

**Remarque 1.1.** La droite analytique au sens de Berkovich est définie a priori pour des corps ultramétriques complets. À défaut on pourra considérer la droite analytique d'une complétion  $\bar{K}$  de  $K$ . C'est compatible avec la construction ad hoc suivante de  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , qu'on pourra prendre par définition si  $K$  n'est pas complet.

- La droite projective analytique  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  est le compactifié d'Alexandrov de l'analytifié de la droite algébrique.
- Cet analytifié est l'espace des semi-normes multiplicatives homogènes sur l'algèbre  $a_n$   $K[X]$ , muni de la topologie faible.

Il y a compatibilité car<sup>1</sup> ce dernier est insensible au passage de  $K$  à  $\bar{K}$ . Quoi qu'il en soit, comme les théorèmes sont plus généraux à mesure que l'on agrandit le corps  $K$ , on peut, sans perte de généralité, remplacer  $K$  par un extension ultramétrique algébriquement close, à fortiori son complété.

Toute mesure à support fini sur  $K$  définit une mesure à support fini sur  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ . Nous sous-entendons la convergence de mesure, dans l'espace des probabilités sur  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , pour la convergence étroite (ou vague, ou faible qui reviennent ici au même). Les probabilités sur  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  décrivent un espace compact.

Il existe un point particulier de  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , extérieur à  $K$ , donné par la norme de Gauß. Nous le notons  $\mu$ . Concrètement

- une suite de mesures  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  prend pour limite  $\mu$  si et seulement si

$$P \in K[X], \quad \lim_n \int_K f(x) \mu_n(x) = \int_K f(x) \mu(x)$$

---

<sup>1</sup>Par homogénéité, multiplicativité, et inégalité triangulaire une telle semi-norme sur  $K[X]$  satisfait à  $\|a_i X^i\| = |a_i| \cdot X^{-i}$ . Sur chaque sous-espace  $K + \dots + K \cdot X^n$ , elle est manifestement continue, des  $a_i$ , en 0, et, par inégalité triangulaire, uniformément continue. Il y a donc un unique prolongement par continuité au complété de Cauchy  $\bar{K} + \dots + \bar{K} \cdot X^n$ . Par suite il correspond à  $\|\cdot\| : K[X] \rightarrow \mathbf{R}$  un unique prolongement par continuité  $\bar{K}[X] \rightarrow \mathbf{R}$ .

où  $f(x) = \max\{|P(x)|; 1\}$ ,

- si  $P \in K(X)$  la fonction réelle  $|P|(x)$  se prolonge par continuité en par

$$|P|(x) = \frac{\max\{|a_0|; \dots; |a_d|\}}{\max\{|b_0|; \dots; |b_e|\}} \quad \text{où } P = \frac{a_0 + \dots + a_d X^d}{b_0 + \dots + b_e X^e}.$$

L'énoncé suivant décrit le comportement asymptotique des suites de probabilités (1.5), dans l'espace des probabilités sur  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ .

**Théorème 1.2** (Équidistribution). *Soit  $j$  dans  $K$  et supposons  $|j| > 1$ . Alors*

$$(1.6) \quad \lim_N \frac{T_N(j)}{\deg(T_N)} = \lim_N \frac{X_0(N)(j)}{\deg(X_0(N))} = \dots$$

Nous donnerons une preuve explicite et quantitative, se ramenant au calcul suivant. Mentionnons qu'il est possible d'en tirer que la convergence (1.6) est *uniforme en  $j$*  sur les domaines où  $|j|$  est borné. En conséquence, le théorème s'étend aisément à tous les points  $j$  de  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  tels que  $1 < |j| < \dots$ .

Pour une variante galoisienne de cet énoncé, nous renvoyons au corollaire 2.4.

**1.2. Fonctions propres.** Nous notons  $\log^+ = \max\{0; \log\}$  la *partie positive du logarithme*. Alors  $(\log^+)^t$  est bien définie pour  $t > 0$  et définie sur  $]1; \dots[$  sinon. Dans l'énoncé suivant on reconnaît une fonction propre simultanée des opérateurs de Hecke, partout définie pour  $t > 0$ .

**Théorème 1.3** (Fonctions propres). *Soit  $j$  dans  $K$  et  $t$  dans  $\mathbf{R}$ . Supposons  $|j| > 1$  ou  $t > 0$ . Alors la fonction  $f = (\log^+ | - |)^t$  vérifie*

$$(1.7a) \quad (T_N f)j = f(j) \cdot N^{t-1-2t(N)},$$

$$(1.7b) \quad (X_0(N) f)j = f(j) \cdot N^{t-1-2t(N)}.$$

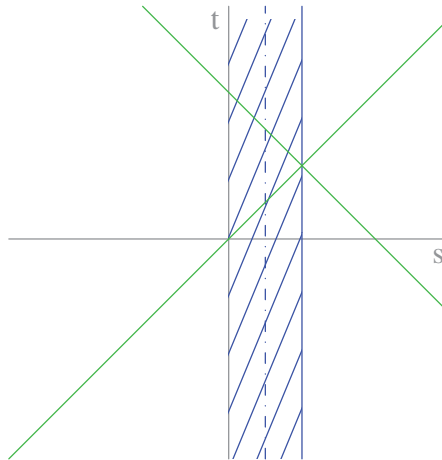
En termes de séries de Dirichlet, la convolution de Dirichlet donne la première identité

$$(1.8a) \quad \sum_{N=1}^{\infty} (T_N f)(j) \cdot N^{-s} = f(j) \cdot (s-t) \cdot (s+t-1),$$

$$(1.8b) \quad \sum_{N=1}^{\infty} (X_0(N) f)(j) \cdot N^{-s} = f(j) \cdot \frac{(s-t) \cdot (s+t-1)}{(2s)},$$

la seconde s'en déduisant par la convolution de Dirichlet issue de (1.2). Ces séries ont coefficients positifs et abscisse de convergence  $\max\{1-t; 1+t-1\}$ . (Rappelons que  $\zeta(s)$  a pôle simple en  $s=1$  et ni zéro ni pôle sur son demi-plan de convergence  $|s| > 1$ .)

C'est le dernier point du corollaire suivant qui sera à démontrer le théorème 1.2.



- Diagonales  $s + t - 1 = 1$  et  $s - t = 1$  : pôles du numérateur;
- verticale  $2 \cdot s = 1$  : pôle de  $(2s)$ ;
- hachuré  $0 < s < 1/2$  : bande critique de  $(2s)$  (bande des zéros possibles);
- tiret : droite critique (droite des zéros conjecturée).

**Remarque 1.4.** Nous notons  $a(N) = O_N(b(N))$  la domination asymptotique  $C \mathbf{R}_{>0}, N \rightarrow 0, |a(N)| \ll b(N)$ , et  $a(N) = o_N(b(N))$  lorsque  $C \mathbf{R}_{>0}, N \rightarrow 0, |a(N)| \ll b(N)$ . Nous notons  $a(N) \sim b(N)$  la conjonction  $a(N) - b(N) = o_N(a(N))$  et  $a(N) - b(N) = o_N(b(N))$ , soit l'équivalence asymptotique. Nous avons abrégé  $M, N \sim M$  en  $N \sim 0$ .

**Corollaire 1.5** (Asymptotique des valeurs propres). Soit  $j$  dans  $K$  et  $t$  dans  $\mathbf{R}$ . Supposons  $|j| > 1$  ou  $t > 0$ . Alors les faits suivants valent pour la fonction  $f = (\log^+ |-\cdot|)^t$ .

(1) Si  $t = 0$  ou  $t = 1$ , alors :  $N \rightarrow 1, \frac{T_N f}{\deg T_N}(j) = f(j)$ .

(2) Nous avons les équivalences asymptotiques, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\log(\deg(T_N)) \sim \log(\deg(X_0(N))) \sim \log(N)$$

et

(1.9a)  $\log(T_N(f)(j)) - \log f(j) - \log(\deg(T_N)) \sim \max\{t - 1; -t\} \cdot \log(N)$

(1.9b)  $\log(X_0(N)(f)(j)) - \log f(j) - \log(\deg(X_0(N))) \sim \max\{t - 1; -t\} \cdot \log(N)$

lorsque  $N$  diverge vers  $+\infty$ .

(3) Nous avons les limites

$$\lim_N \frac{(X_0(N)f)(j)}{\deg(X_0(N))} = \lim_N \frac{T_N(f)(j)}{\deg(T_N)} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < t < 1, \\ f(j), & \text{si } t = 0 \text{ ou } t = 1, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avant de passer au thème des hauteurs locales, nous démontrons ce Corollaire.

*Démonstration du corollaire 1.5.* Si  $t = 0$ , alors  $f(j) = 1$  (sur  $|j| > 1$ ) est constante, et toute correspondance agit sur  $f$  par multiplication par son degré :

$$T_N(f) = \deg(T_N)f \text{ et } X_0(N)f = \deg(X_0(N))f.$$

On déduit le cas  $t = 1$  par la parité  $t = 1 - t$  des formules (1.8a) et (1.8b).

Ce qui établit le second point pour  $\max\{t - 1; -t\} = 0$ , soit  $t = 0$  ou  $t = 1$  : la différence  $\log(T_N(f)(j)) - \log f(j) - \log(\deg(T_N))$  est nulle indépendamment de  $N$ , et donc bien équivalente à 0. Pareillement pour  $X_0(N)$ .

Lorsque  $\max\{t - 1; -t\} = 0$ , nous obtenons

$$a(N) \sim N^{\max\{0; a\}} o(N).$$

en majorant la somme à gauche par le produit du terme dominant par le nombre de ses termes. Nous avons encore

$$N^{\max\{0; a\}} \leq a(N)$$

en minorant la somme termes positifs à droite par le terme dominant. Nous avons enfin

$$a(N) \sim a(N).$$

car la somme de gauche est une partie de celle de droite. Il suit de<sup>2</sup> la domination  $o(N) = o_N(N)$ , que nous avons

$$(1.10a) \quad a \in \mathbf{R}, \log(a(N)) = \max\{0; a\} \cdot \log(N) + o_N(\log(N))$$

$$(1.10b) \quad \text{et } \log(a(N)) = \max\{0; a\} \cdot \log(N) + o_N(\log(N)).$$

Pour  $a = 1$  nous avons l'équivalent  $\log(\deg(X_0(N))) \sim \log(\deg(T_N)) \sim \log(N)$ . Les équivalents (1.9a) et (1.9b) recherchés se récrivent ainsi

$$\log((X_0(N)f)(j)) \sim \log((T_Nf)(j)) \sim \max\{t; 1 - t\} \cdot \log(N).$$

Ce qui se déduit de (1.7a), puis de (1.10a) en  $a = 1 - 2t$ .

Le troisième point est une conséquence du précédent.

Ces théorèmes ont des conséquences en termes d'asymptotique de *hauteurs locales*.

<sup>2</sup>Pour  $N = \prod_N k_\ell$  et  $\epsilon > 0$  fixé, nous avons  $\log(o(N)N^{-\epsilon}) = \sum_N \log(1+k) - k \log(p)$ . Si le nombre de facteurs premiers est borné, au moins un des exposants  $k$  diverge, et le terme correspondant tend vers  $-\infty$ , d'où  $\log(o(N)N^{-\epsilon}) \rightarrow -\infty$ . Chaque terme atteint son maximum en  $1+k = 1/\log(p)$ , d'où la majoration par  $\sum_N -\log(\log(p)) - k \log(p) - 1 + \log(p)$ , dont les termes sont de plus en plus négatifs, pour  $p$  assez grand. Si le nombre de facteurs premiers n'est pas borné, on a encore  $\log(o(N)N^{-\epsilon}) \rightarrow -\infty$ . Donc  $o(N)N^{-\epsilon} = o_N(1)$ . (Inspiré de <http://terrytao.wordpress.com/2008/09/23/the-divisor-bound/>)

**1.3. Hauteurs.** Dénotons la fonction partie positive du logarithme de  $|-|$  en base  $p$  par

$$\log_p^+ |-| = \max_i 0; \frac{\log |-|}{\log p}.$$

Notons  $\overline{\mathbf{Q}}$  la fermeture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $K$ . Pour un nombre  $j$  dans  $\overline{\mathbf{Q}}$ , sa hauteur logarithmique locale normalisée  $h_p(j)$  est la moyenne de  $\log_p^+ |-|$  sur la classe de conjugaison algébrique  $\text{Aut}(K) \cdot j$  de  $j$  dans  $K$  au-dessus de  $\mathbf{Q}$ . Si l'isobarycentre des masses de Dirac sur une partie finie non vide  $U$  est noté  $\mu_U = \frac{1}{\#U} \sum_{u \in U} \delta_u$ , alors

$$h_p(j) = \int \log_p^+ |x| d\mu_{\text{Aut}(K) \cdot j}(x).$$

**Théorème 1.6** (Asymptotique des hauteurs). *Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , et soit  $(j_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $K$  formée d'invariants deux-à-deux distincts de courbes isogènes à  $E$ .*

(1) *Supposons que  $|j(E)| > 1$  pour tout plongement  $\sigma : \mathbf{Q}(j(E)) \rightarrow K$ . Soit  $P(X) = \frac{a_0 + \dots + a_d X^d}{b_0 + \dots + b_e X^e} \in \mathbf{Q}(X)$  une fraction rationnelle de degré négatif ou nul :  $P(X) = \frac{a(X)}{b(X)}$ , satisfaisant l'hypothèse*

(H)  $P(X)$  est partout définie pour  $|X| > 1$ .

*Alors la hauteur locale  $p$ -adique  $h_p(P(j_n))$  de  $P(j_n)$  suit l'asymptotique*

$$(1.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_p(P(j_n)) = \log_p^+ |P|(x) \quad (x)$$

$$= \log_p^+ \frac{\max\{|a_0|, \dots, |a_d|\}}{\max\{|b_0|, \dots, |b_e|\}}.$$

(2) *La hauteur locale  $p$ -adique  $h_p(j_n)$  de  $j_n$  est bornée indépendamment de  $n$ .*

Anticipant sur la preuve, une borne supérieure des  $h_p(j_n)$  est donnée par le produit de  $h_p(j(E))$  par l'indice de l'image du groupe de Galois absolu de  $\mathbf{Q}(j(E))$  par sa représentation dans le groupe linéaire du module de Tate profini de  $E$ .

S'abstraire de l'hypothèse (H) requiert d'autres outils, d'approximation diophantienne, que nous laissons à une étude ultérieure. Une autre question, que nous laissons à un autre article, est de préciser en quelle mesure les asymptotiques (1.11) pour sommairement de fractions rationnelles impliquent réciproquement le théorème 1.2.



**1.4. Effectivité.** Avant de passer aux démonstrations, montrons l'intérêt du calcul au théorème 1.3 par un exemple d'application à la question de l'équidistribution effective pour des classes fonctions de  $| - |$  soumises à une hypothèse sur leur transformée de Fourier.

**Proposition 1.7.** *Considérons une fonction transformée de Laplace*

$$f(x) = \int_{\mathbf{C}} e^{tx} \mu(t) dt$$

d'une mesure finie  $\mu(t) dt$  sur  $\mathbf{C}$  à support compact dans la bande  $0 < \text{Re}(t) < 1$ , avec  $\mu(0) > 0$ . Alors, pour la fonction  $f(x) = \int_{\mathbf{C}} (\log \log |x|)^s \mu(t) dt$  sur le domaine  $1 < |x| < \infty$ , nous avons, uniformément en  $x$ ,

$$\begin{aligned} (T_N f)(x) &= \max_{t \in \text{Supp } \mu} N^{-t} \mu(1-2t(N)) \cdot f(x), \\ &= o_N(N^{-1}) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Donnons en exemple de fonctions  $f$  les fonctions :  $\overline{\log | - |}$  pour  $\mu(t) dt = \frac{1}{2} dt$ ; et  $\overline{\log | - |} \cos(a \log \log | - | + b)$  avec  $a, b \in \mathbf{R}$ , si  $\mu(t) dt = \frac{e^{ib}}{2} \delta_{1/2+ia} + \frac{e^{-ib}}{2} \delta_{1/2-ia}$ . Notons que la quantité  $\log | - |$  est proportionnelle à la valuation  $p$ -adique. Remarquons que la majoration de la valeur absolue d'une somme par la somme de celle de ses termes donne

$$| \sum_{n \leq N} a(n) | \leq \sum_{n \leq N} |a(n)| \leq O(N) \text{ et } | \sum_{n \leq N} a(n) | \leq O(N).$$

Exploitant ces majorations, on peut éviter l'hypothèse de compacité du support de  $\mu(t) dt$ .

*Démonstration.* Dans l'espace des fonctions complexes sur le domaine  $1 < |j| < \infty$ ,

$$(\log \log |x|)^s = \int_{\mathbf{C}} (\log |x|)^t \mu(t) dt.$$

En intégrant sur un compact, nous avons

$$\sum_{N < 1} T_N N^{-s} (\log \log |x|)^s = \int_{\text{Supp } \mu} \mu(s) (s-1+t) \cdot (\log |x|)^t \mu(t) dt.$$

comme identité de séries de Dirichlet formelles. Ces séries convergent pour  $s > 1$  grâce à la condition  $0 < \text{Re}(t) < 1$ . Le coefficient de niveau  $N$  est

$$(T_N \mu)(\log \log |x|)^s = \int_{\text{Supp } \mu} \mu(t) N^{-t} \mu(1-2t(N)) \cdot (\log |x|)^t \mu(t) dt.$$

En chaque valeur  $t$ , nous avons

$$N^{-t} \mu(1-2t(N)) = o_N(N^{-1})$$

pour  $0 > - > \max_{t \in \text{Supp}} \max_{dt} \{ -t; t - 1 \}$ . Sur le compact  $\text{Supp}$  nous pouvons en déduire une majoration uniforme

$$\max_{t \in \text{Supp}} N^{-t} \max_{dt} \{ -t; t - 1 \} = o_N(N^{-}).$$

Il suit une majoration, uniforme en  $x$ ,

$$\begin{aligned} (T_N)(\log \log |x|) &= \max_{t \in \text{Supp}} N^{-t} \max_{dt} \{ -t; t - 1 \} \cdot (\log |x|)^t \int (t) dt, \\ &= o_N(N^{-}) \cdot (\log \log |x|). \end{aligned}$$

## 2. Démonstrations

Nous commençons par démontrer le théorème 1.2 en le ramenant au corollaire 1.5.

Nous ramenons ensuite le théorème 1.3 au cas d'un niveau premier.

Par quelques conséquences de la théorie de la courbe de Tate nous obtenons ce cas.

Nous finissons avec le théorème 1.6, après quelques corollaires du théorème 1.2.

**2.1. Théorème 1.2.** Donnons le principe de la démonstration du théorème 1.2.

*Démonstration du théorème 1.2.* L'intégralité ultramétrique de l'invariant modulaire est une propriété invariante par isogénie (point (3) du corollaire 2.2). Donc les supports finis  $T_N(\{j\})$  sont tous situés dans la couronne ouverte

$$\{x \in K \mid 1 < |x| < \dots\}.$$

Il en ressort que, pour toute valeur d'adhérence  $\mu$  de la suite  $\frac{T_N(j)}{\deg(T_N)} \in \mathbb{N} \setminus 0$ , le support de  $\mu$  est contenu dans l'adhérence dans  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  de

$$\{x \in K \mid 1 < |x| < \dots\}.$$

Étant donnée la structure de la droite projective analytique au sens de Berkovich, cette adhérence s'obtient en adjoignant deux points seulement (voir l'appendice A)

- le point à l'infini de la droite projective, en lequel  $| - | = +$  ;
- le point norme de Gauß, pour lequel  $| - | = 1$ .

Soit une fonction positive continue  $f : \text{Proj}_1^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R}$   $\{ + \}$  s'annulant en et strictement positive sur le disque à l'infini (la couronne et l'infini)

$$\{x \in K \mid 1 < |x| < + \}.$$

Si l'on démontre

$$(2.1) \quad \lim_N \sum_K f \frac{T_N(j)}{\deg(T_N)} = 0,$$

alors nous saurons que le support de  $\mu$  est contenu dans le fermé d'annulation de la fonction positive  $f$ . Or ce dernier ne rencontre l'adhérence de  $\{x \in K \mid 1 < |x| < \dots\}$  qu'en  $\dots$ .

Il s'en suivra que le support de la probabilité  $\mu$  est  $\{\dots\}$  donc que  $\mu = \dots$ , ce qui démontrera le théorème.

Une telle fonction est  $(\log |-\cdot|)^t$ , pour  $0 < t < 1/2$ . Ses valeurs en  $\dots$  et en  $\dots$  et sa positivité s'obtiennent immédiatement. La propriété (2.1) découle du point 3 du corollaire 1.5.

Pour compléter la preuve du théorème 1.2, il reste à établir le théorème 1.3.

**2.2. Théorème 1.3.** L'algèbre  $\mathbf{Z}[(T_N)_{N \geq 1}]$  qui est engendrée par les opérateurs de Hecke est librement engendrée par les opérateurs  $T$  de niveau premier. Les relations entre opérateurs de Hecke sont codées dans l'identité de séries de Dirichlet formelles

$$\prod_{N \geq 1} T_N N^{-s} = \frac{1}{1 - T \cdot \dots^{-s} + \dots^{-2s}}$$

où le produit eulérien se fait sur tous les nombres premiers  $\dots$ . La factorisation en produit eulérien traduit l'indépendance algébrique d'opérateurs de niveaux premiers entre eux :  $T_N T_M = T_M T_N$  si  $(N, M) = 1$ . L'écriture en fraction rationnelle du facteur eulérien d'indice  $\dots$  traduit la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{k+1} - T \cdot u_k + \dots \cdot u_{k-1} = 0$$

satisfaite par la suite  $(u_k)_{k \geq 0} = (T^k)_{k \geq 0}$ .

*Démonstration du théorème 1.3.* Le passage de (1.8a) à (1.7a) résulte de la décomposition du produit par une convolution de Dirichlet. Nous souhaitons montrer

$$\prod_{N \geq 1} (T_N f)(j) N^{-s} = f(j) \cdot (s-t) \cdot (s+t-1)$$

soit encore

$$\frac{1}{1 - T \cdot \dots^{-s} + \dots^{-2s}} f(j) = f(j) \cdot \frac{1}{(1 - \dots^{-s+t})(1 - \dots^{-s+1-t})}$$

Il s'agit donc d'établir l'identité des facteurs eulériens, soit

$$(1 - T \cdot \dots^{-s} + \dots^{-2s}) f(j) = (1 - \dots^{-s+t})(1 - \dots^{-s+1-t}) f(j)$$

ou encore

$$(2.2) \quad (T f)(j) = (t + \dots - t) f(j).$$

Ce sera une conséquence de la théorie de la courbe de Tate et son corollaire 2.2. Il suffit d'appliquer la loi (2.8) à la fonction  $(\log^+)^t$ .

### 2.3. Uniformisation des correspondances par la courbe de Tate.

Les résultats de cette section sont bien connus. Nous les rappelons dans le contexte des références [8, 6].

Considérons, dans l'algèbre de séries de Laurent  $\mathbf{Z}[[q]][1/q]$ , les deux séries de Lambert et la série de Laurent

$$(2.3a) \quad E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} d/n q^n = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n},$$

$$(2.3b) \quad E_4(q) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} d/n q^n = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1 - q^n},$$

$$(2.3c) \quad j(q) = 12^3 \frac{E_4(q)^3}{E_4(q)^3 - E_6(q)^2} = \frac{1}{q} + 744 \pmod{q^2 \mathbf{Z}[[q]]}.$$

Ces séries, à coefficients entiers, convergent dans le disque unité ouvert de  $K$  pour (2.3a) et (2.3b), et ce disque épointé de l'origine dans le cas de (2.3c). Le premier terme  $1/q$  de  $j(q)$  est alors le terme dominant, d'où

$$(2.4a) \quad |j(q)| = |1/q|.$$

Nous avons une série réciproque, convergente sur  $|j| > 1$ ,

$$q(j) = j^{-1} \mathbf{Z}[[j^{-1}]],$$

telle que

$$(2.4b) \quad |q(j)| = |j^{-1}|.$$

L'énoncé suivant condense l'essentiel, en ce qui concerne l'écriture des correspondances de Hecke, de l'uniformisation de la courbe modulaire elliptique par la coordonnée  $q$  au voisinage de sa pointe parabolique.

**Proposition 2.1.** *Soit  $q$  dans  $K$  tel que  $0 < |q| < 1$ . Alors il y a une isogénie cyclique de degré  $N$  vers une courbe elliptique  $E_q$  sur  $K$  d'invariant modulaire  $j(q)$  depuis une courbe elliptique  $E_{q^N}$  sur  $K$  d'invariant  $j(q^N)$ .*

La référence sur la courbe de Tate est probablement [8]. En ce qui concerne la description des orbites de Hecke, une des plus anciennes références est peut-être [6, A.1.4], mais cette référence n'explicité pas de formulation du degré de l'isogénie cyclique sous-jacente. Notons enfin que la méthode originale de Tate peut être simplifiée en plusieurs points avec l'approche de [1]. Nous donnons quelques éléments de preuve qui permet de

déduire la Proposition des références [8] et [6]. Ce sera l'occasion de rappeler sur la courbe de Tate.

*Démonstration.* Il s'agit de l'isogénie que l'on voudrait écrire  $w \cdot q^{Nz}$   
 $w \cdot q^z$

$$(2.5) \quad E_{q^N}(K) = K^\times / q^{Nz} - E_q(K) = K^\times / q^z$$

induite par l'identité  $K^\times \rightarrow K^\times$ . Les courbes elliptiques sous-jacentes sont celles dont les algèbres de fonctions sont les « séries méromorphes sur  $K^\times$  invariantes » par  $q^{Nz}$  et par  $q^z$  respectivement ([6]). Ce sont les algèbres à bases explicites engendrées par les séries de Lambert en la coordonnée  $w$  sur  $K^\times$ ,

$$(2.6a) \quad X(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{wq^n}{(1-wq^n)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

$$(2.6b) \quad Y(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wq^n)^2}{(1-wq^n)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

liées par l'équation de Tate

$$Y(q)^2 - X(q)Y(q) = X(q)^3 - b_2(q)X(q) - b_3(q)$$

où

$$(2.6c) \quad b_2(q) = 3 \cdot \frac{E_4(q) - 1}{12^2} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n}$$

$$(2.6d) \quad b_3(q) = 2 \cdot \frac{E_6(q) - 1}{12^3} + 3 \cdot \frac{E_4(q) - 1}{12^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 + 5n^3}{12} \frac{q^n}{1 - q^n}$$

L'homomorphisme de groupe (2.5) définit bien un morphisme de courbes algébriques : c'est l'inclusion de l'algèbre des fonctions méromorphes invariantes par  $q^z$  parmi celles invariante par  $q^{Nz}$ . C'est un homomorphisme de groupes de noyau cyclique de degré  $N$ . D'après le théorème de Tate, les coordonnées  $[X(q) : Y(q) : 1]$  identifient le groupe  $K^\times / q^z$  avec le groupe des points  $K$ -rationnels de la courbe  $E_q(K)$ . L'application  $[X(q^N) : Y(q^N) : 1] \rightarrow [X(q) : Y(q) : 1]$  induite par (2.5),

$$E_{q^N}(K) \rightarrow E_q(K)$$

sera un morphisme de courbes elliptiques de noyau cyclique d'ordre  $N$ .

Nous utilisons la notation  $f \mu$  pour l'image directe d'une mesure  $\mu$  par une fonction  $f$ . Il s'agit aussi de la loi de la mesure  $f \mu$  de densité  $f$  par rapport à  $\mu$ .

**Corollaire 2.2.** Soit  $\ell$  un nombre premier et soit  $j$  dans  $K$  tel que  $|\ell j| > 1$ . Alors

(1) le support  $T(\{j\})$  de  $T(j)$  est donné par

$$(2.7) \quad j(q(j)) = j(q) \quad q \in K, (q) = q(j) ;$$

(2) la loi

$$|-| T(j) = \sum_{\substack{C \subset E(K) \\ (C,+) \in (\mathbf{Z}/\ell\mathbf{N},+)}} |\ell(E/C)|, \quad \text{où } j(E) = j,$$

de  $|-|T(j)$  vaut

$$(2.8) \quad \dots = |\ell j|^\ell + |\ell j| ;$$

(3) la correspondance  $T$  stabilise le domaine  $1 < |\ell j| < \dots$  :

$$\text{si } 1 < |\ell j| < \dots \text{ et } j \in T(\{j\}), \text{ alors } 1 < j < \dots .$$

*Démonstration.* Démontrons le premier point. Le troisième s'ensuivra immédiatement.

Soit  $U$  l'ensemble donné par (2.7). Nous savons déjà que  $\#T(\{j\}) = \dots + 1 = \#U$ . Il s'agit de montrer  $u \in U, u \in T(\{j\})$ . Par définition de  $T(\{j\})$  il faut pouvoir mettre  $(j, u)$  sous la forme  $(j(E), j(E/C))$ , avec  $C$  cyclique d'ordre  $\ell$ .

- Pour  $u = j(q(j))$ , nous appliquons la proposition à  $q = q(j)$ , prenons  $E = E_q$ , et l'isogénie duale de celle de la proposition.
- Pour  $u = j(q)$  nous appliquons la proposition à  $q = q$ , et prenons  $E = E_q$ .

Démontrons le second point. D'après le premier point, si nous faisons porter les sommes sur  $\overline{\{q(j)\}} = \{q \in K \mid (q) = q(j)\}$ ,

$$T_N(j) = \sum_{j(q(j))} + \sum_{q \in \overline{\{q(j)\}}} q .$$

Finalement, appliquons  $|-|$ ,

$$\begin{aligned} |-| T_N(j) &= \sum_{j(q(j))} |-| + \sum_{q \in \overline{\{q(j)\}}} |q| . \\ &= \sum_{j(j)} + \sum_{q \in \overline{\{q(j)\}}} |\ell j|^\ell, \quad \text{d'après (2.4a) et (2.4b),} \\ &= \sum_{j(j)} + \sum_{j(j)} |\ell j|^\ell \end{aligned}$$

Nous avons achevé les démonstrations des Théorèmes 1.2 et 1.3.

Mentionnons une reformulation du premier point du corollaire : la coordonnée  $q$  de Tate conjugue la correspondance de Hecke  $T$  avec la correspondance dont le graphe est d'équation

$$(X - Y)(X - Y) = 0.$$

Pour information la correspondance  $T_N$  de niveau général  $N$ , de degré  $d/N$ , devient

$$\text{correspondance d'équation } \ll (X^{N/d} - Y^d) = 0 \gg .$$

**2.4. Théorème 1.6.** Notons le support de  $X_0(N)(j)$  par

$$(2.9) \quad X_0(N)(\{j\}) = \{j(E/C) \mid C \in E(K), (C, +) \in (\mathbf{Z}/(N), +)\},$$

et notons, pour une partie finie  $U$ , l'isobarycentre des masses de Dirac sur  $U$  par

$$\mu_U = \frac{1}{\#U} \sum_{x \in U} \delta_x.$$

Commençons par deux corollaires du théorème 1.2.

**Corollaire 2.3.** Soit  $\epsilon > 0$ , et, pour tout  $N > 0$ , une partie  $U_N$  de  $X_0(N)(\{j\})$  telle que  $\#U_N \geq \epsilon \#X_0(N)(\{j\})$ . Alors

$$\lim_N \mu_{U_N} = \mu.$$

*Démonstration.* La condition  $|j| > 1$  élimine les invariants singuliers. Donc la densité de  $X_0(N)(j)$  en tout point de son support est 1 (il n'y a pas de multiplicité). Par conséquent, la mesure  $\mu_{U_N}$  est dominée par  $\frac{1}{\deg(X_0(N))} \sum_{x \in X_0(N)(j)} \delta_x$ . Toute valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_{U_N})_N$ , dans l'espace compact des probabilités sur  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , sera dominée par  $\frac{1}{\deg(X_0(N))}$ . Elle est supportée par  $\{j\}$ . C'est aussi une probabilité. Donc l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_{U_N})_N$  est  $\mu$ . C'est donc la limite  $\lim_N \mu_{U_N} = \mu$ .

**Corollaire 2.4.** Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $K$  telle que  $|j(E)| > 1$ . Soit une suite  $(j_n)_{n \geq 0}$  dans  $K$  formée d'invariants deux-à-deux distincts de courbes isogènes à  $E$ . Alors

$$\lim_n \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j_n)) \cdot j_n} = \mu.$$

*Démonstration.* Rappelons encore que l'invariant  $j(E)$  n'est pas singulier. Considérons la représentation  $\rho$  de  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E)))$  dans le module de Tate profini  $\hat{T}(E)$  de  $E$ . Alors  $GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E))$  est un groupe linéaire de rang 2 sur  $\hat{\mathbf{Z}}$ , et l'image de cette représentation en est un sous-groupe d'indice fini : si  $j(E)$  est algébrique c'est le théorème [5] de l'image ouverte de Serre ; si  $j(E)$  est transcendant, cela vaut encore, par un argument plus aisé, le

calcul de la monodromie de la correspondance  $T_N$  comme revêtement de la courbe modulaire  $\text{Spec}(\mathbf{Q}[j(E)])$ . Il existe donc tel que

$$0 < < 1 \# \frac{GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E))}{\text{Im}(\cdot)}.$$

Rappelons la paramétrisation naturelle (2.9) de  $X_0(N)(\{j\})$  par  $\text{Proj}_1(E[N])$ , où nous notons  $E[N]$  est le sous-groupe des points de  $N$ -division de  $E(K)$ , identifiable à  $\hat{T}(E) \mathbf{Z}/(N)$ . L'action d'un élément  $g$  de  $GL_{\mathbf{Z}/(N)}(E[N])$  sur  $T_N(\{j\})$  s'obtient via  $g : j(E/C) \rightarrow j(E/g(C))$ .

L'action de  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E)))$  sur  $X_0(N)(\{j\})$  se factorise par la représentation , puis la réduction  $GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E)) \rightarrow GL_{\mathbf{Z}/(N)}(E[N])$ , et l'action du groupe  $GL_{\mathbf{Z}/(N)}(E[N])$  sur  $T_N(\{j\})$  s'obtient via  $g : j(E/C) \rightarrow j(E/g(C))$ .

L'action de  $GL_{\mathbf{Z}/(N)}(E[N])$  est transitive sur les sous-groupes cycliques d'ordre  $N$  de  $E[N]$ , donc sur  $X_0(N)(\{j\})$ . Les orbites  $U$  de  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E)))$  dans  $X_0(N)(\{j\})$  vérifient  $\#U > \#X_0(N)(\{j\})$ .

Par hypothèse les  $j_n$  sont deux-à-deux distincts. En conséquence, le niveau  $N$  tel que  $j_n \in X_0(N)(\{j\})$  diverge avec l'indice  $n$ . Sans perte de généralité nous pouvons supposer  $N = n$ . En conséquence de quoi nous pouvons appliquer le corollaire précédent avec  $U_N = \text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_N$ .

Rappelons, cf. [7], que le long d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , la hauteur globale diverge vers  $+\infty$ . En fait, la partie archimédienne de la hauteur diverge déjà , par un résultat d'équidistribution archimédien [3]. L'équidistribution ultramétrique permet encore de conclure, mais conclut autrement, concernant la hauteur locale  $p$ -adique. Notons  $\overline{\mathbf{Q}}$  la fermeture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $K$ .

Nous entamons la démonstration du théorème 1.6 avec quelques faits sur la hauteur  $h_p(j_n)$ .

*Démonstration du théorème 1.6 — Préliminaire.* Comme  $E$  est définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , son invariant  $j(E)$  est algébrique sur  $\mathbf{Q}$ , et a une classe de conjugaison algébrique finie. Il en est de même des  $j_n$ . Soit  $P \in \mathbf{Q}(X)$ . Par définition

$$h_p(P(j_n)) = \log_p^+ |X| \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot P(j_n)}(X).$$

Comme  $P$  est à coefficient dans  $\mathbf{Q}$ , il commute à l'action de  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q})$ , et nous avons  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot P(j_n) = P(\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n)$ . L'action de  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q})$  agit transitivement sur la base de  $P : \text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n \rightarrow \text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot P(j_n)$ , et permute donc les fibres, qui auront donc toutes le même cardinal. Nous avons donc

$$\mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot P(j_n)} = P \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n},$$

et

$$h_p(P(j_n)) = \log_p^+ |P(X)| \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n}(X).$$



Choisissons des représentants  $\mu_{j_n}$ , fixés une fois pour toute, des classes du quotient  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) / \text{Aut}(K/\mathbf{Q})$ . Nous décomposons selon ces classes l'orbite

$$\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n = \sum_{\substack{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \\ \text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \setminus \text{Aut}(K/\mathbf{Q})}} \text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot (j_n).$$

Par conséquent  $\mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n}$  est un barycentre d'au plus  $[\mathbf{Q}(j(E)) : \mathbf{Q}]$  mesures de la forme

$$(2.10) \quad \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot (j_n)}.$$

*Démonstration du théorème 1.6 — Premier point.* Par hypothèse, pour chacun des  $\mu_{j_n}$ ,  $|j(E)| > 1$ . Nous pouvons appliquer le corollaire 2.4 précédent aux suites  $(\mu_{j_n})_{n \geq 0}$  relatives à la courbe  $(E)$  sur  $\overline{\mathbf{Q}}$  obtenue par changement de base par  $j_n$ . Nous concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot (j_n)} = \mu.$$

En passant au barycentre arbitraire,

$$(2.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}) \cdot j_n} = \mu.$$

La convergence (2.11) a lieu dans l'espace des probabilités sur le compact, dans l'espace  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , adhérence de la couronne  $1 < |x| < \infty$ . Par hypothèse (H) sur  $P$ , la fonction  $\log_p^+ |P(x)|$  est bornée sur le domaine  $1 < |x| < \infty$  et se prolonge par continuité par une valeur finie en  $\infty$ . Nous pouvons donc appliquer la convergence (2.11), sur le compact adhérence de la couronne  $1 < |x| < \infty$ , à la fonction réelle continue  $\log_p^+ |P|$ . Nous en déduisons (1.11).

Ceci conclut le premier point du théorème 1.6. Il reste le second point. D'après le Préliminaire de la démonstration, il suffit de traiter des mesures de la forme (2.10).

Quitte à changer  $E$  pour  $(E)$  et  $(j_n)_{n \geq 1}$  pour  $(j_n)_{n \geq 1}$ , tout revient à montrer

$$(2.12) \quad \log_p^+ |-| \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_n} = O_n(1).$$

*Démonstration de (2.12) — Le cas des invariants entiers ultramétriques.* Savoir le cas où  $|j(E)| = 1$ . La propriété d'intégralité ultramétrique de l'invariant  $j$  est conservée par isogénie. En outre la classe d'isogénie de  $E$  est définie sur  $\mathbf{Q}(j(E))$ . Donc les orbites  $\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_n$  sont toutes contenues dans le domaine d'annulation de  $\log_p^+ |-|$ , c'est-à-dire où  $|j| = 1$ . En bref,

$$\log_p^+ |-| \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_n} = 0.$$

Démonstration de (2.12) — Le cas  $|j_0| > 1$  de la mauvaise réduction.  
Revenons à la domination

$$\mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_n} \# \frac{\text{Im}(\ )}{GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E))} X_0(N)(\ j(E)).$$

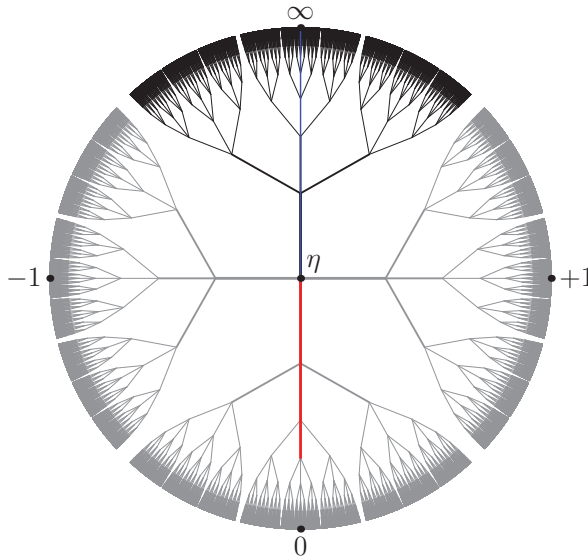
de la démonstration du corollaire 2.3 pour la quantité issue de la démonstration du corollaire 2.4. Nous avons choisi le niveau  $N$  tel que  $j_n$  soit dans  $X_0(N)(\{j\})$ . Finalement, en utilisant le premier point du corollaire 1.5, nous obtenons finalement les bornes, indépendantes de  $n$ ,

$$\begin{aligned} 0 & \log_p^+ | - | \mu_{\text{Aut}(K/\mathbf{Q}(j(E))) \cdot j_n} \\ & \# \frac{\text{Im}(\ )}{GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E))} \cdot \log_p^+ | - | X_0(N)(\ j(E)), \\ & = \# \frac{\text{Im}(\ )}{GL_{\mathbf{Z}}(\hat{T}(E))} \cdot \log_p^+ |j(E)|. \end{aligned}$$

Nous avons démontré tous nos résultats.

### Annexe A. La droite projective analytique

Si on identifie  $\mathbf{Q}_p \setminus \{ \}$  à l'ensemble des bouts d'un arbre  $p+1$ -régulier, alors le plongement de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  se prolonge à cet arbre. Cet arbre passe par le point « norme de Gauß » . Le domaine  $|j| \leq 1$  contient les segments joignant deux points entiers de  $\mathbf{Q}_p$ . Le domaine complémentaire,  $|j| > 1$  est formé des segments issus de , privés de , à destination de ou d'un point non entier de  $\mathbf{Q}_p$ .



L'espace  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  contient également les arbres de Bruhat-Tits (de  $PGL(2)$ ) pour toutes les extensions de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $K$ . Si  $K$  est sphériquement complet, cela suffit à décrire les points de  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ . Pour obtenir dans l'adhérence de  $K$ , on peut considérer des extensions de plus en plus ramifiées  $\mathbf{Q}_p(\sqrt[e]{\bar{p}})$  où  $e \rightarrow +\infty$ . La suite  $(1/\sqrt[e]{\bar{p}})_{e \geq 1}$  (peut importe le choix des racines de  $p$ ), vérifie  $1/\sqrt[e]{\bar{p}} = p^{1/e} > 1$  et  $\lim_{e \rightarrow \infty} 1/\sqrt[e]{\bar{p}} = 1$ . Nécessairement  $\lim_{e \rightarrow \infty} 1/\sqrt[e]{\bar{p}}$ , dans  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$ , est le seul point frontière du domaine  $|j| > 1$  avec le domaine  $|j| = 1$ , à savoir  $\infty$ .

Remarquons que si l'on paramètre le segment de  $\infty$  à  $1$  par  $[1; \ ]$  via la fonction  $| - |$ , alors la mesure (infinie)  $\frac{d| - |}{| - |} = d \log | - |$  est invariante sous les opérateurs normalisés  $\frac{T_N}{\deg(T_N)}$  et  $\frac{X_0(N)}{\deg(X_0(N))}$ . Les mesures à densité  $(\log | - |)^t \cdot d \log | - |$  seront des mesures propres des opérateurs de Hecke.

Mentionnons enfin que la pointe parabolique et  $\infty$  sont les seuls points de  $\text{Proj}_1^{\text{an}}$  fixés par tous l'opérateur  $T_p$  de niveau  $p$ . Dans le cas  $p = 3$ , il existe un autre segment remarquable, issu de  $\infty$  et en direction de  $0$ , mais sans l'atteindre, de points fixés par les opérateurs de Hecke de niveau premier à  $p$ . Nous laissons cette étude à un article futur traitant des invariants à réduction supersingulière.

## Bibliographie

- [1] V. G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, x+169 pages.
- [2] W. D. Duke, « Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms », *Invent. Math.* **92** (1988), n° 1, p. 73-90.
- [3] R. Richard, « Répartition galoisienne d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347** (2009), n° 3-4, p. 123-127.
- [4] ———, « Répartition galoisienne d'une classe d'isogénie de courbes elliptiques », *Int. J. Number Theory* **09** (2013), n° 02, p. 517-543.
- [5] J.-P. Serre, « Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques », *Invent. Math.* **15** (1972), n° 4, p. 259-331.
- [6] ———, *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, second éd., Advanced Book Classics, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, xxiv+184 pages.
- [7] L. Szpiro & E. Ullmo, « Variation de la hauteur de Faltings dans une classe de  $\bar{\mathbf{Q}}$ -isogénie de courbe elliptique », *Duke Math. J.* **97** (1999), n° 1, p. 81-97.
- [8] J. Tate, « A review of non-Archimedean elliptic functions », in *Elliptic curves, modular forms, Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, Series in Number Theory, vol. 1, International Press., 1995, p. 162-184.

Rodolphe Richard  
 13, rue du Croisic,  
 22200 Plouisy, France  
 55 Southstand Appartments,  
 Highbury Stadium Square,  
 N51EY, London, United Kingdom  
 E-mail: rodolphe.richard@normal.esup.org